



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 181.10

HARVARD COLLEGE



SCIENCE CENTER
LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

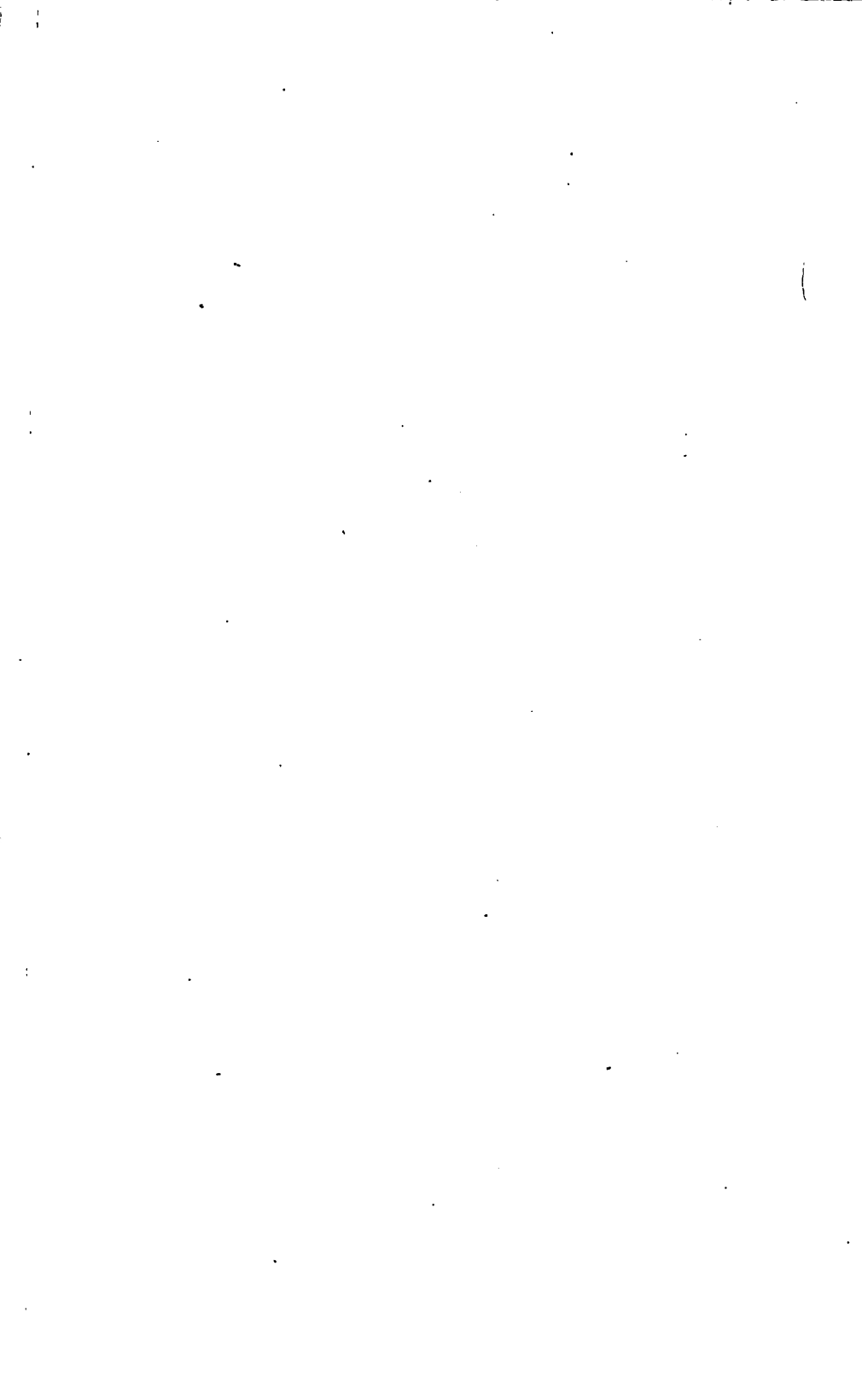
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"









the first of these is the fact that the

second of these is the fact that the

third of these is the fact that the

fourth of these is the fact that the

fifth of these is the fact that the

sixth of these is the fact that the

seventh of these is the fact that the

Das

GEBÄUDE DES WISSENS.

Von

Robert Grassmann.

Dreiundzwanzigster Band.

Die Formenlehre oder Mathematik

in strenger Formelentwicklung.

Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Die

Formenlehre oder Mathematik

in strenger Formelentwicklung.

Von

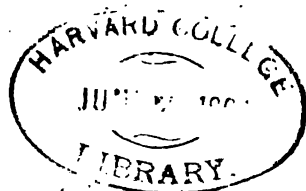
Robert Grassmann.



Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Math. $\frac{181.10}{5}$
✓



Farrar fund.

Vorwort.

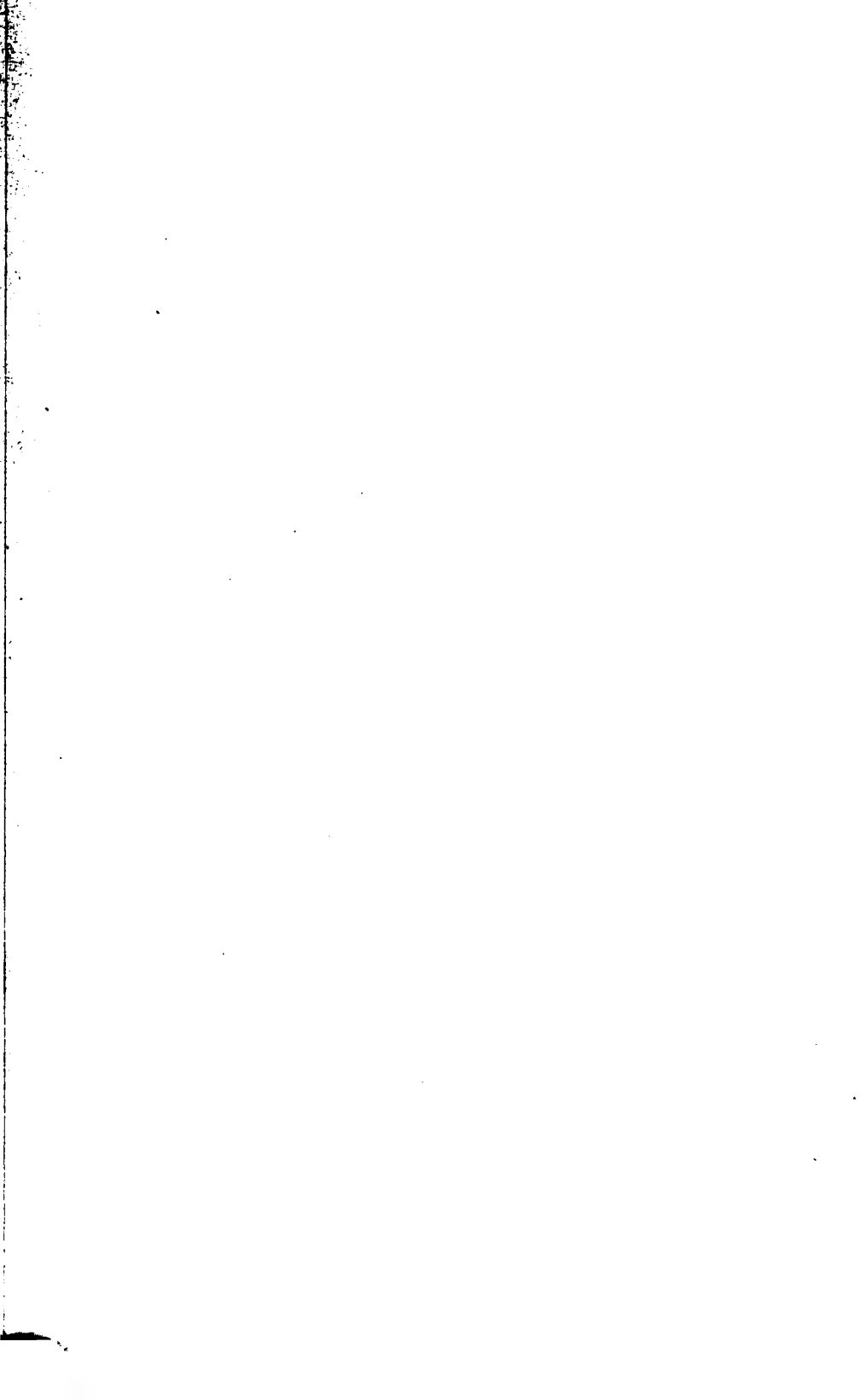
Die Formenlehre oder Mathematik soll in diesem Werke streng wissenschaftlich mit Ausschluss jedes Trugschlusses dargestellt werden. Sie wird alle vier Zweige der reinen Mathematik: Zahlenlehre oder Arithmetik, Folgelehre oder Funktionenlehre, Ausdehnungslehre und Erweiterungslehre umfassen; dagegen werden die Anwendungen auf die Raumlehre und auf die Mechanik aus diesem Bande ausgeschlossen.

Gegenwärtig entbehren noch fast alle Darstellungen der Mathematik der streng wissenschaftlichen Form, obwohl diese die leichteste und elementarste und zugleich die kürzeste und klarste Form der Entwicklung ist. Fast alle Lehrbücher der Mathematik, bez. ihrer Zweige, namentlich der Zahlenlehre und Funktionenlehre stellen noch Sätze auf, deren Anwendung zu den schlimmsten Trugschlüssen führt, und das traurige Ergebnis hat, dass man durch streng wissenschaftliche Anwendung dieser Sätze bez. Formeln die größten Widersprüche, ja jeden beliebigen Unfinn beweisen kann.

Der Verfasser will hier nicht die Beweise für diese Behauptung führen; er hat diese Beweise im Vorworte zu den einzelnen Zweigen, bez. ausserdem noch an den betreffenden Stellen des Textes in den Anmerkungen geführt und erlaubt sich hier darauf zu verweisen. Die geehrten Leser werden namentlich in dem Vorworte zur Zahlenlehre einen grossen Teil dieser Beweise, sowie die sie interessirenden Mitteilungen finden über die Form der Darstellung und über die Art, wie sich das Buch mit Leichtigkeit lesen und benutzen lässt.

Indem sich der Verfasser demnach auf die Vorworte zu den einzelnen Zweigen, namentlich zur Zahlenlehre bezieht, bittet er die geehrten Mathematiker, dies Werk einer Prüfung und geneigten Beurteilung zu unterziehen. Namentlich empfiehlt er dies Werk den Herren Lehrern, sie werden darin die leichtesten Methoden finden, welche trotz der Strenge der Form zu den schnellsten und zugleich sichersten Fortschritten ihrer Schüler führen müssen.

Der Verfasser.



Die

Zahlenlehre oder Arithmetik

streng wissenschaftlich in strenger Formel-
Entwicklung.

Von

Robert Grassmann.

»33«

Stettin 1891.

Druck und Verlag von R. Grassmann.



Vorwort.

Die vorliegende Darstellung der Zahlenlehre oder Arithmetik macht den Anspruch, die erste streng wissenschaftliche und zugleich ganz elementare Darstellung der Zahlenlehre zu sein. Sehen wir von den Arbeiten der Gebrüder Grassmann in Stettin und des Professors Schroeder in Karlsruhe (H. Grassmann Arithmetik Stettin 1860, Berlin 1861, R. Grassmann Zahlenlehre Stettin 1872, E. Schroeder Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Leipzig 1872) ab, so bieten sämmtliche andere Darstellungen der Zahlenlehre in ihren grundlegenden Abschnitten bei ihren sogenannten Beweisen die bedenklichsten Zirkelschlüsse und Trugschlüsse, welche nichts beweisen und nur geeignet sind, die Leser an unwissenschaftliches Denken zu gewöhnen und sie zu verwirren.

Es mag diese Behauptung vielen Lesern übertrieben und anmasend erscheinen; aber sie ist durchaus wahr und darf im Interesse der Wissenschaft nicht verschwiegen werden. Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre, auch die zuletzt erschienenen gründen (und dies ist ein Fehler, der zuerst gerügt werden muss, da er bereits die Möglichkeit strenger Wissenschaftlichkeit ausschließt) ihre Beweise auf logische Schlüsse, obwohl ihre Schüler noch gar keine Logik studirt haben, und obwohl es bis in die neueste Zeit noch gar keine wissenschaftliche Darstellung der Logik gegeben hat. Und diese Darstellungen thun dies, obwohl die strenge Mathematik gar keine Anwendung der logischen Schlüsse bedarf, sondern ohne jede Logik allein auf die Sätze der einwertigen Größen, ihrer Gleichheit und Ungleichheit gegründet werden kann und muss, wie ja auch die Kinder viel früher die Rechnungen mit Zahlen als die Gesetze der Logik kennen lernen,

In jeder streng wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre darf jede Zahl nur auf eine Weise erklärt werden und zwar fortschreitend jede folgende als die Summe der vorhergehenden plus eins (z. B. $8 = 7 + 1$) und muss erst bewiesen werden, dass jede andere Art, wie dieselbe entstehen kann (z. B. $8 = 5 + 3$, $8 = 4 \times 2$ u. f. w.) der obigen Zahl gleich ist. In jeder streng wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre muss ferner festgestellt werden, dass jede folgende Zahl mit allen vorhergehenden Zahlen ungleich sein muss, wenn man nicht in die grössten Trugschlüsse verfallen will.* Wenn aber jede Zahl mit allen vorhergehenden und allen folgenden Zahlen ungleich sein und nur einen Wert haben soll, so muss auch für jede Zahl ein eigener einwertiger Name und ein eigenes einwertiges Zeichen eingeführt und muss dies in der wissenschaftlichen Darstellung der Zahlenlehre unzweifelhaft nachgewiesen werden.

Alle Beweise in der Zahlenlehre können wissenschaftlich nur in fortschreitender Form geführt werden. Da alle Erklärungen der Zahlen fortschreitend sind, und jede Zahl fortschreitend aus der vorhergehenden Zahl a plus Eins erklärt ist, so muss auch jeder Satz, der für alle Zahlen gelten soll, auch so bewiesen werden, dass man beweist, wenn er für a gilt, so gilt er auch für $a + 1$ und so fortschreitend für alle folgenden Zahlen.

Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre ersparen sich aber die Mühe des fortschreitenden Beweises und wollen denselben durch einige nichtsagende und nichtsbeweisende Phrasen ersetzen.

Fast alle Darstellungen der Zahlenlehre enthalten aber auch weitere grose Fehler, lassen die Division durch Null zu, rechnen mit mehrwertigen Grösen wie $\sqrt{a^2}$ und lassen es ganz unbeachtet, dass man damit jeden Trugschluss beweisen kann.**

* Anm. Setzen wir z. B. $9 = 1$, so ergibt sich $8 = 9 - 1 = 1 - 1 = 0$, also auch $2 = \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$ und ebenso $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$, mithin auch $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + 0 = 0$.

** Anm. Lässt man die Division durch Null, oder die mehrwertige Gröse $\sqrt{a^2}$ zu, so ergeben sich aus den Gesetzen der Zahlenlehre die gefährlichsten Trugschlüsse und verliert die ganze Zahlenlehre jeden wissenschaftlichen Wert, wie dies die folgenden kurzen Beispiele beweisen.

1) Es ist unzweifelhaft $(a - b)c = (a - b)c$ oder $ac - ac = bc - bc$, also $a(c - c) = b(c - c)$. Dividiren wir nun durch $c - c$ und heben $\frac{c - c}{c - c}$, so ergibt sich $a = b$, d. h. jede Zahl jeder andern gleich.

Beim Gebrauche der Klammern musste eine wesentliche Aenderung vorgenommen werden, wenn man nicht eine höchst lästige Zahl von Klammern haben wollte.

Bekanntlich kann man beim fortschreitenden Knüpfen derselben Art die Klammern weglassen. So ist $a + b + c + d + e = (((a + b) + c) + d) + e$, ebenso $abcde = (((ab)c)d)e$, und auch $ab^{cd} = ((a^b)^c)^d$. Dagegen wenn verschiedene Knüpfungen vorkommen, so bezieht sich die höhere nur auf die unmittelbar vorhergehende GröÙe, so ist $a + bc = a + (bc)$, aber nicht gleich $(a + b)c$, so ist $ab^c = a(b^c)$, aber nicht gleich $(ab)^c$. Für die Funktionszeichen \log , \sin , \cos , \tan , \cot , f , u. f. w. gilt nun aber ein ganz anderes Gesetz; diese Zeichen müssen auf alle folgenden GröÙen deselben Gliedes bezogen werden, wenn man nicht eine höchst lästige Zahl von Klammern haben, oder durch Ersparung von Klammern Unklarheiten bereiten will. So ist $\sin abc = \sin(abc)$, so $\sin \frac{x}{y} = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, so $f_a \sin x = f_a(\sin x)$, so $\sin x^2 = \sin(x^2)$, dagegen $\sin^2 x = \sin \sin x = \sin(\sin x)$ und $(\sin x) \sin x = (\sin x)^2$. Diese Regel erspart namentlich für die Funktionenlehre zahlreiche Klammern und macht die Sache viel einfacher.

Es könnte nach dem Gefagten Manchem so scheinen, als müsse der Fortschritt in der Zahlenlehre ein sehr langsamer und weitläufiger werden, dem ist aber nicht so. Vermeidet man alle unnützen Beweise, und beweist man nicht vielmals, was man mit einem Male beweisen kann, so wird der Fortschritt in der Zahlenlehre ein überraschend schneller. Die vorliegende Darstellung bietet auf nur 242 Seiten trotz vielfacher erläuternder Bemerkungen und aller strengen Beweise die ganze niedere und höhere Zahlenlehre, nebst allen Sätzen über imaginäre und komplexe GröÙen, über Winkelfunktionen und höhere Gleichungen in 596 Sätzen.

Der Verfasser glaubt daher dies Buch allen empfehlen zu können, welche eine strenge Wissenschaft mit Vermeidung aller Trugschlüsse

2) Setzen wir $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$, so folgt, da $\sqrt{a^2}$ zwei Werte hat, nämlich $+a$ und $-a$, unmittelbar $+a = \sqrt{a^2} = -a$, also $a + a = a + \sqrt{a^2} = a - a = 0$, jede GröÙe der Zahlenlehre gleich Null.

Man wird nun sagen, ja solche Ansätze muss man nicht machen. Darauf antworte ich, man darf nicht solche unrichtigen Gesetze aufstellen, aus denen sich bei richtiger Anwendung solche Trugschlüsse ergeben; das ist schlechthin unwissenschaftlich und muss auf das schärfste gerügt werden,

wünschen. Namentlich erlaubt er sich aber dies Buch allen Lehrern dringend zu empfehlen.

Der vom Verfasser in seiner Darstellung eingeschlagene Weg ist nämlich ganz genau derselbe, den jeder Lehrer beim Rechnenunterrichte einschlägt und einschlagen muss. Jeder von uns hat einst auf diesem Wege zählen und rechnen gelernt. Jede Zahl wird auch vom Kinde fortschreitend gebildet, indem von der gewonnenen Zahl zu der um Eins grössern Zahl fortgeschritten wird. Ebenso wird beim Zufügen oder Addiren erst $2 = 1 + 1$ zugefügt, dann, wenn dies spielend vor sich geht, $2 + 1 = 3$ zugefügt, dann $3 + 1 = 4$ und so fort. Ebenso beim Vervielfachen oder Multiplizieren wird für jede Zahl z. B. 8 erst

$$1 \text{ mal } 8 + 1 \text{ mal } 8 = 2 \times 8,$$

$$\text{dann } (2 + 1) \text{ mal } 8 = 2 \text{ mal } 8 + 1 \text{ mal } 8 = 3 \times 8 \text{ u. s. w.}$$

stets fortschreitend gebildet, ganz wie dies in der vorliegenden Darstellung geschehen ist. Es ist ja auch unmöglich in andrer Weise rechnen zu lernen. Die Lehrer finden also in dieser Darstellung die wissenschaftliche Begründung ihres Rechnenunterrichtes. Die Darstellung des Verfassers ist hiernach ebenso ganz elementar wie sie streng wissenschaftlich ist.

Die Darstellung in reiner Formelentwicklung wird aber für viele Leser abschreckend und ermüdend sein. Auch dem Verfasser ist diese Form, zumal, wie sie in den meisten mathematischen Werken angewandt wird, wenig sympathisch. Er hat daher hier neue Wege einschlagen zu müssen geglaubt, und bittet die geehrten Leser diesen neuen Wegen ihre Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Der Verfasser wird die Zahlenlehre in zwei Formen darstellen, die eine in strenger Formelentwicklung, die andere in freier Gedankenentwicklung.

Die Zahlenlehre in strenger Formelentwicklung ist die streng wissenschaftliche, den Denkopoperationen entsprechende Form. In den mathematischen Werken, welche in Formelentwicklung vorschreiten, verlangen die Verfasser aber meist, dass der Leser alles lese, jeden Beweis mitmache, kurz, das Buch ausführlich studire; dadurch ermüden sie den geübten Fachgenossen, langweilen ihn, und müssen doch, um nicht die vorgeschrittenen Kräfte zu sehr zu ermüden, für die Anfänger oft zu schwierig und unverständlich werden. Dies ist ein Uebel, welches sich sehr leicht vermeiden lässt, wenn man verschiedene Schriftarten für den Text der Sätze, für die Beweise und für die sonstigen Bemerkungen anwendet und neben der Zahlenlehre ein ge-

sondertes Formelbuch und ein Uebungsbuch auflegt. So ist die Sache vom Verfasser geordnet.

Der Text der Sätze ist in halbfetter Borgis-Schrift gedruckt, so dass er hervortritt und man die Sätze lesen kann, ohne die Beweise durchzugehen. Es kann dann ein Jeder ganz nach Wunsch das aussuchen, was ihm besonders anregend oder wichtig erscheint.

Der Beweis der Sätze ist in gewöhnlicher Borgis-Schrift gedruckt. Jeder kann also leicht die Beweise durchnehmen, welche ihm besonders wichtig erscheinen; ebenso leicht kann er aber auch wieder Beweise überschlagen. Jeder Beweis aber ist Schritt für Schritt, ohne jeden Sprung geführt; für jede Formeländerung ist in derselben Zeile hinten der Satz in Klammern beigelegt, nach welchem diese Aenderung gestattet ist. Hat der Leser das Formelbuch neben sich liegen, so findet er in demselben unmittelbar die Formel oder den Satz, der hier angeführt ist.

Das Formelbuch giebt unter der fortlaufenden Nummer der Sätze für jeden Satz die Formel an, welche in dem Satze bewiesen ist. Dies Formelbuch soll beim Gebrauche neben der Zahlenlehre liegen und mit größter Leichtigkeit eingesehen werden können. Der gewiegte Fachmann überblickt darnach leicht den Gang des Werkes und findet mit einem Blicke das, worauf es ihm ankommt. Die Beweise lesen sich darnach leicht, wie ein gewöhnliches Buch. Der Anfänger aber kann darnach leicht die Sätze wiederholen und prägt sich die Formeln leicht bis zur größten Sicherheit ein. Dies aber ist bekanntlich die erste Bedingung für jeden weitem Fortschritt. Das Formelbuch wird daher jedem eine willkommene Gabe sein.

Die Bemerkungen sind in kleiner Schrift (in Petitschrift) gedruckt. Der wissenschaftlichen Darstellung jedes Abschnittes ist eine Einleitung vorausgeschickt, welche den Leser vorbereiten und mit der Idee und dem Gange des Zweiges vertraut machen soll, welche daher nicht zur streng wissenschaftlichen Darstellung gehört. Bei den einzelnen Sätzen sind, wo es erforderlich schien, Bemerkungen über den Erfinder des Satzes, über die Ansichten anderer Fachmänner, die Beurteilungen anderer Darstellungen, die Beispiele und die Anleitung zu den Uebungen, um die Anwendung der Sätze zu erleichtern, zugefügt und gehören gleichfalls nicht zur strengen Darstellung.

Das Uebungsheft endlich bildet für jeden einzelnen Zweig die Uebungen, welche für den Lernenden notwendig sind, um den Stoff zu beherrschen und die Sätze mit Leichtigkeit anwenden zu können.

Die Zahlenlehre in freier Gedankenentwicklung ist die freiere, kritische, die Denkopoperationen betrachtende Form. Es kann sich diese letzte Form der Entwicklung freier bewegen; sie kann die verschiedenen möglich erscheinenden Wege untersuchen, die Ideen, welche der Entwicklung zu Grunde liegen, beleuchten und dadurch den Leser mehr anregen, auch seinerseits Versuche in Formelentwicklung und Beweisen nach verschiedenen Richtungen hin zu machen. Es wird diese Art der Darstellung daher eine wünschenswerte Ergänzung zu der ersten Art der Darstellung gewähren. Auch bei der Darstellung in freier Gedankenentwicklung werden ebenso wie bei der Darstellung in strenger Formelentwicklung nur einwertige Größen durch einwertige Knüpfungen und ebenso die Zeichen derselben, die Buchstaben durch einwertige Knüpfungszeichen zu Formeln verbunden, aber der Unterschied besteht darin, dass bei der Darstellung in freier Gedankenentwicklung die Entwicklung durch Betrachtungen geführt wird, in welcher Weise man zu einer strengen Formel gelangen und wie man dieselbe umgestalten kann, und wie man dadurch zu den Sätzen des Formelbuches gelangt. Der Vorteil dieser Darstellung ist hier, dass man sich stets Rechenschaft giebt, welche Wege man einschlagen soll und dass man kritisch den eingeschlagenen Weg beleuchtet, sowie dass sich hieran dann eine Anleitung schliesst, wie man sich durch Uebungen im Uebungshefte die nötige Gewandtheit in der Umwandlung der Formeln und in der Anwendung derselben auf das äussere Leben erwerben kann.

Beide Arten der Darstellung ergänzen also einander und werden ihre Verehrer finden. Wer die Darstellung in strenger Formelentwicklung studirt hat, wird durch die Darstellung in freier Gedankenentwicklung einen freieren und umfassendern Blick gewinnen. Wer die Darstellung in freier Gedankenentwicklung studirt hat, wird durch die Einsicht in die strengen Beweise der strengen Formelentwicklung grössere Sicherheit gewinnen und auftauchende Bedenken leicht überwinden.

Die Kunstsprache ist gegenwärtig in allen mathematischen Werken eine sehr wenig brauchbare. Man bezeichnet jetzt mit demselben Kunstausdrucke die verschiedensten, nach ganz abweichenden Gesetzen vorzunehmenden Verknüpfungen und wird dadurch unklar und verworren, ohne die Allgemeinheit erreichen zu können, welche doch notwendig ist. Irrtümer und Verwechslungen sind daher ganz unvermeidlich. So z. B. wird das Wort die Multiplikation für die verschiedensten Knüpfungen gebraucht

für $a(bc)$, wo $a(bc) = abc$ und wo $a(bc) \gtrsim abc$,

für ab , wo $ab = ba$ und wo $ab \gtrsim ba$,

für ab , wo $aa = 0$ und wo $aa \gtrsim 0$ u. f. w.

Und so in vielen andern Fällen. Daselbe Wort bezeichnet bald eine Knüpfung in der Zahlenlehre, bald in der Ausdehnungslehre, bald in der Logik und bald in der Bindelehre, obwohl für diese Knüpfung in jedem der Zweige ganz verschiedene Gesetze gelten. Dies ist unwissenschaftlich und muss vermieden werden. Die neuen deutschen Kunstausdrücke gewähren hierfür ein gutes Mittel.

Als Kunstsprache werden daher in der Zahlenlehre neue, eindeutig erklärte Kunstausdrücke in rein deutscher Sprache eingeführt; alle mehrdeutigen Fremdwörter sind entfernt und durch rein deutsche Wörter ersetzt, die gewohnten Kunstausdrücke aber sind in Klammer beigelegt, damit auch denen Rechnung getragen werde, welche an diese Ausdrücke gewöhnt sind.

Nach dem Vorbilde des berühmten Mathematikers S. F. Lacroix giebt der Verfasser noch einen Ueberblick über die griechischen Buchstaben. Es werden dieselben mehrfach in der Zahlenlehre angewandt; um nun auch denen verständlich zu bleiben, welche die griechische Sprache nicht erlernt haben, mögen Zeichen und Namen folgen:

Zeichen.		Name.
Verfal.	Text.	
A	α	Álpha.
B	β	Bêta.
Γ	γ	Gámma.
Δ	δ	Délta.
E	ϵ	Épsilon.
Z	ζ	Zêta.
H	η	Êta.
Θ	θ	Thêta.
I	ι	Îôta.
K	κ	Káppa.
Λ	λ	Lámbda.
M	μ	Mû.
N	ν	Nû.
Ξ	ξ	Xî.

Zeichen.		Name.
Verfal.	Text.	
\mathcal{O}	o	Ómíkrón.
\mathcal{H}	π	Pí.
\mathcal{P}	ρ	Rhò.
Σ	σ, ς	Síigma.
\mathcal{T}	τ	Táu.
\mathcal{Y}	υ	Ûpfílón.
Φ	φ	Phí.
\mathcal{X}	χ	Chí.
Ψ	ψ	Pfí.
Ω	ω	Ôméga.

Zum Schlusse möge noch ein kurzer Ueberblick über die Geschichte der Zahlenlehre folgen.

Die niedere Zahlenlehre ist eine sehr alte Wissenschaft. Schon 2000 Jahre vor Chr. bildete das Rechnen in Egypten einen Zweig des Volksunterrichtes. Die erste wissenschaftliche Ausbildung erhielt die Zahlenlehre durch die Griechen, namentlich durch Eukleídes, (geb. 308 vor Chr.), durch Archimédēs (287 bis 212 vor Chr.) und durch Dióphantos (im vierten Jahrhundert nach Chr.). Eine weitere Ausbildung gewann die Zahlenlehre um 500 bis 650 nach Chr. in Indien; hier ward das zehnteilige Zahlensystem mit den zehn Ziffern, namentlich auch mit der Null eingeführt. Die Araber erfanden im Mittelalter die Zehntbrüche oder Dezimalbrüche, sowie die ersten trigonometrischen Funktionen. Von ihnen ist die Zahlenlehre um 1000 nach Chr. zuerst in Spanien eingeführt und später erst in den andern Ländern Europas bekannt geworden.

Die höhere Zahlenlehre gehört erst der neuen Zeit an. Erst um 1585 ist das Höhen oder Potenziren und erst 1614 sind die Logarithmen erfunden.

Die beiden höchsten Zweige der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre oder die Lehre von den komplexen Größen und die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den höhern Gleichungen haben erst in diesem Jahrhundert ihre Ausbildung erhalten.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.



Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

	Nummer.	Seite.
1. Die Erklärung und die Beweisform der Größenlehre	1	1
2. Die drei Arten der Größenknüpfung	25	15
3. Die beiden Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung	39	24
4. Die Beziehung zweier Knüpfungen	69	34

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder die Rechnungen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen.

5. Das Zählen oder die Bildung der Zahlen	114	51
6. Das Zufügen und Abziehen, Strichzahl und benannte Zahl	120	56
7. Das Vervielfachen und Teilen, Bruch, Eigenschaften der Zahlen und Brüche	155	66
8. Das Rechnen mit benannten Zahlen oder die Rechnungen des ge- wöhnlichen Lebens	259	109
A. Abgekürztes Rechnen	259	109
B. Rechnen mit benannten Zahlen	263	112
C. Proportion und Regeldetri	285	116
D. Gleichungen ersten Grades	302	121

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Die höhere Zahlenlehre oder Höhen, Tiefen, Loge oder Logarithmen.

9. Höhen, Tiefen und Loge der Zahlen	315	127
A. Höhen oder Potenziren	315	127
B. Tiefen oder Radiziren	341	138
C. Logen oder Logarithmiren	350	141
D. Eigenschaften von Höhen, Tiefen und Logen	377	150

	Nummer.	Seite.
10. Höhen von Summen und Summen von Höhen	387	154
A. Höhen und Loge von Summen	387	154
B. Zahlenreihen (arithmetische Reihen) und Stufenreihen (geometrische Reihen), Zins- und Rentenrechnung	398	161
C. Höhenreihen oder Potenzreihen	413	165
D. Reihenzahlen oder Systemzahlen (dekadische)	421	167

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre oder Richtgrößen, Winkelfolgen und Winkeltafeln.

11. Die Richtgröße, die Winkelfolge und die Winkeltafeln	423	169
1. Die Richtgröße oder komplexe Größe	423	169
2. Der Winkel, Sinus und Cosinus	435	174
3. Die Tangente, Cotangente und die Winkeltafeln	466	185
4. Der Bogen oder Arcus	490	193
12. Die Richtgrößen in Bafe, Stufe, Log und Winkel	498	196
1. Die Richtgröße in der Bafe	498	196
2. Die Richtgröße in der Stufe (im Exponenten)	510	200
3. Die Richtgröße im Loge (im Logarithmus)	532	206
4. Die Richtgröße im Winkel	546	210

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den Gleichungen.

13. Die allgemeinen Sätze über die Gleichungen	556	216
14. Die Gleichungen zweiten Grades	575	222
15. Die Gleichungen dritten Grades	585	226
16. Die Gleichungen vierten Grades	586	230
17. Die Gleichungen höhern Grades und ihre Lösung durch Näherung	587	232



Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

1. Die Erklärungen und die Beweisform der Größenlehre.

Das Erste, womit wir die Zahlenlehre beginnen müssen, wenn wir keine andre Lehre voraussetzen wollen, sind die allgemeinen Erklärungen und Sätze, welche ein streng wissenschaftliches Denken überhaupt erst möglich machen und welche uns lehren, wie man streng wissenschaftlich beweisen und fort-schreiten kann, ohne die Logik und ihre Gesetze zu bedürfen.

Diese Erklärungen und Sätze gehören aber der Größenlehre an. Wir müssen also auch die Zahlenlehre mit den ersten Sätzen der Größenlehre beginnen.

a. Die Erklärungen der Größenlehre.

Erklärung. Die Denklehre ist die Wissenschaft von der 1. Knüpfung der Größen. Der allgemeine Zweig derselben heist die Größenlehre.

Erklärung. Eine GröÙe heist jedes, was Gegenstand des 2. Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werte hat.

Alle Werke über Mathematik beginnen mit der Erklärung der GröÙe; aber in keinem mir bekannten Werke ist die schlechthin notwendige Bestimmung getroffen, dass jede GröÙe nur einen und nicht mehre Werte haben darf. Ohne diese Festsetzung bleibt aber das ganze Gebäude unwissenschaftlich. Denken wir uns, eine GröÙe habe auch nur zwei Werte, welche einander ungleich sind, so gilt für sie kein Satz der Mathematik oder überhaupt des strengen Denkens: denn dann kann man nicht einmal die GröÙe sich selbst gleich setzen, ohne dass man zu Trugschlüssen gelangt.

In neuester Zeit hat nun der Professor Paul Du Bois-Reymond „Die all-gemeine Funktionentheorie. Erster Teil: Metaphysik und Theorie der mathe-matischen Grundbegriffe: GröÙe, Grenze, Argument und Funktion“, Tübingen 1882, eine neue Erklärung von GröÙe aufgestellt, welche von der obigen Erklärung wesentlich abweicht. Er sagt a. a. O. S. 14 Folgendes: „Unter mathe-matischer GröÙe (quantum, quantitas, quantité) versteht man gewöhnlich eine gemeinfame Eigenschaft verschiedenartiger Dinge, in Bezug auf welche sie numerisch vergleichbar sind, wie deren Länge oder Gewicht. Doch keineswegs

alle Vorstellungsreihen. mit welchen sich mathematisch operiren lässt, fallen unter diese Definition. Allgemeiner ist unter mathematischer GröÙe der Inbegriff einer Folge von Vorstellungen zu verstehen, von der mindestens ausgelegt werden kann, 1. dass jede Einzelvorstellung in jener Folge ihren genügend bestimmten Platz beÙtzt, 2. dass zwischen den GröÙen der Folge, oder zwischen ihnen und den GröÙen anderer ebenfalls festgeordneter Folgen Beziehungen stattfinden, welche zu neuen Beziehungen combinirt werden können.“

Aber diese Erklärung ist unbrauchbar und fehlerhaft. Dieselbe ist zunächst unklar und nebelnd und zeigt, dass der Verfasser selbst nicht weiss, was GröÙe ist, dass vielmehr in seinem Kopfe die verschiedensten Vorstellungen von GröÙe durch einander laufen. Die GröÙe soll nach ihm zunächst eine Eigenschaft, und zwar „eine gemeinsame Eigenschaft verschiedener Dinge“, sie soll dann wieder eine Reihe und zwar „eine Vorstellungsreihe“ sein, sie soll drittens „ein Inbegriff von Vorstellungen“ sein. Der Herr D. B. giebt also drei von einander abweichende Erklärungen statt einer. Der allein notwendige Theil der Erklärung, dass jede GröÙe nur einen und nicht mehre Werte haben darf, fehlt dagegen. Hätte er diesen aufgestellt, so würde er die groben Fehler seiner Erklärung selbst erkannt haben.

Nicht minder bedenklich ist, was derselbe Verfasser in demselben Werke über die mathematische GröÙe sagt. Er behauptet zunächst a. a. O. S. 23, die mathematischen GröÙen seien linear, d. h. sie seien auf Längen zurückführbar, ihre Unterschiede, Teile und Vielfachen seien wie bei den Längen wieder GröÙen derselben Art, wie Längen messbar und in der Richtung des Kleinsten und Längsten ausgedehnt. Auch die Zahl entstehe durch das Messen der Länge durch ein bestimmtes MaÙ, die Einheit genannt. Gleich seien, sagt er S. 44, zwei lineäre mathematische GröÙen, wenn ihre sinnlichen Erscheinungen unter denselben Bedingungen denselben Eindruck hervorbringen. Er verweist also die Mathematik ganz auf die sinnlichen Erscheinungen und sagt, diese Wissenschaft sei in Wahrheit eine Naturwissenschaft.

Herr Du Bois-Reymond verkennt hiemit gänzlich den rein formellen Charakter der Mathematik. Er verkennt ganz, dass die Mathematik sich ihre GröÙen selbst setzt ohne jeden Inhalt, und ohne jedes sinnliche Substrat und dass sie dieselben nach rein geistigen Gefetzen verknüpft, ohne dass sie auf die Erfahrung der Naturwissenschaft zurückzugehen braucht. Im Gegentheil, er sieht in der Anwendung der Zahlen und des Messens auf die äussern Dinge der Welt und auf die Erscheinungen die eigentliche Quelle aller mathematischen GröÙen. „Ein „rein formalistisch-literales Gerippe der Analysis, worauf die Trennung der Zahl „nebst den analytischen Zeichen von der GröÙe hinauslief“, sagt er a. a. O. „Seite 53, „würde diese Wissenschaft, welche in Wahrheit eine Naturwissenschaft „ist, wenn sie auch nur die allgemeinsten Eigenschaften des Wahrgenommenen „in den Bereich ihrer Forschungen zieht, schlieslich, wie bemerkt, zum bloßen „Zeichenspiel hinabwürdigen, wo den Schriftzeichen willkürliche Bedeutungen „beigelegt werden, wie den Schachfiguren und Spielkarten. So ergötzlich ein „solches Spiel sein kann, ja so nützlich für analytische Zwecke die Lösung der „Aufgabe sich erweist, die Regeln zwischen den Zeichen, welche aus der GröÙen- „vorstellung hervorgingen, nun bis in ihre letzten formalen Konsequenzen zu „verfolgen. so würde dennoch diese literale Mathematik, wenn sie von dem

„Boden, auf dem sie gewachsen, völlig losgelöst würde, bald genug in unfruchtbaren Trieben sich erschöpfen, während die von Gauss so wahr und tief Größenlehre genannte Wissenschaft in dem natürlichen stets an Umfang zunehmenden Wahrnehmungsgebiet des Menschen eine unverfiebige Quelle neuer Forschungsgegenstände und ersprielicher Anregungen besitzt. Ohne Frage wird man mit Hilfe von sogenannten Axiomen, von Konventionen, ad hoc erdachten Philosophemen, unfassbaren Erweiterungen ursprünglich deutlicher Begriffe nachträglich ein System der Arithmetik konstruieren können, welches dem aus dem Größenbegriff hervorgegangenen in allen Punkten gleicht, um so die rechnende Mathematik gleichsam durch einen Kordon von Dogmen und Abwehrdefinitionen gegen das psychologische Gebiet abzusperren. Auch kann ein ungewöhnlicher Scharfsinn auf solche Konstruktionen verwendet worden sein. Allein man würde auf dieselbe Weise auch andre arithmetische Systeme sich ausdenken können, wie dies ja geschehen ist. Die gewöhnliche Arithmetik ist eben die einzige dem lineären Größenbegriff entsprechende, ist gleichsam seine erste Registrierung, während die Analysis, mit dem Grenzbegriff an der Spitze, seine höchste Entwicklung bildet.“

Herr Du Bois-Reymond sieht also in der reinen Zahlenlehre pp., welche ihre Zahlen und Zahlgrößen selbst erzeugt, nur ein bloßes Zeichenspiel ähnlich dem Schachspiele, nicht eine Wissenschaft. Er will die ganze Zahlenlehre auf die Begriffe der Länge, des Längenmaßes, auf Messungsaufgaben und auf die Erfahrung aus der Sinneswelt gründen und giebt daher die ganze strenge Formenlehre als Wissenschaft auf. Er ruft Seite 127 a. a. O. bei der Einleitung in die Folgelehre, den Analytikern, welche der numerischen Auffassung der Veränderlichen den Vorzug geben, zu: „Es darf nicht vergessen werden, dass die Zahl nur das Proteron sein kann. Das Proton ist und bleibt die lineäre mathematische Größe. Denn erst das Teilungsbedürfnis, insbesondere das Geschäft des Messens, konnte die Zahl und folgeweise deren Bildungsgefetze erzeugen. Die Messkunst teilt zunächst die Einheit in gleiche Teile, heischt sodann die inkommeturbale Teilung der Einheit, um geometrisch anschauliche Beziehungen arithmetisch festzulegen, es entsteht der Begriff des Irrationalen und seiner Gefetze. Und die wissenschaftliche Verallgemeinerung und Zusammenfassung dieses Vorganges ergibt schließlich den Begriff der Veränderlichen.“

Man sieht, Herr Du Bois-Reymond erblickt in der Zahlenlehre nur eine Anwendung der Messkunst und zwar nur in der geraden Linie; er übersieht, dass das ganze Messen mit einem Einheitsmaße ja selbst nur eine Anwendung der Zahlenlehre ist und diese mit ihren Gefetzen bereits voraussetzt. Aber auch die Messkunst, auch die gerade Linie ist ihm nicht das Erste, er will diese erst erfahrungsmäßig aus der Erfahrung der Sinneswelt ableiten, statt sie geistig durch Bewegung eines Punktes zu erzeugen und kommt nun zu dem Ergebnisse, dass es in der Erfahrung gar keine gerade Linie giebt, sofern man mit hinlänglicher Vergrößerung die Linie prüft; er hebt mithin überhaupt die Wissenschaft auf. In der That, Schwächeres kann man auf diesem Gebiete kaum leisten. Wir schätzen Herrn Du Bois-Reymond auf dem Gebiete der höhern Funktionenlehre, wo er sehr Tüchtiges geleistet hat. Aber in den elementaren Zweigen, in Begründung der Wissenschaft, im Auffinden streng wissenschaftlicher Formen und Beweise hat er sich nicht bewährt, dies ist nicht das Gebiet seiner bedeutenden Leistungen.

3. **Erklärung.** Der Buchstabe ist das Zeichen der Gröse. Derselbe Buchstabe bezeichnet in demselben Satze der Grösenlehre stets eine und dieselbe Gröse und hat also nur einen Wert. Im Uebrigen kann jeder Buchstabe jede beliebige Gröse bezeichnen.

Jeder Satz, welcher für einen Buchstaben bewiesen ist, gilt mithin für alle Grösen, welche der Buchstabe bezeichnen kann, d. h. für jede beliebige Gröse. Soll ein Buchstabe nur eine bestimmte Art von Grösen bezeichnen, so muss dies in dem Satze ausdrücklich gesagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Grösen dadurch bezeichnet werden sollen, sonst würde der Satz für alle beliebigen Grösen gelten.

Wenn eine Reihe von Grösen (z. B. von n Grösen) gegeben ist, so bezeichnet man die Grösen der Reihe gerne durch denselben Buchstaben mit darunter gesetztem Zeiger, z. B.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n - 1, a_n.$$

Dann bezeichnet a_1 die erste, a_n die letzte Gröse der Reihe. a_a eine beliebige, a_{a+1} die nächstfolgende Gröse der Reihe.

Der Buchstabe ist als allgemeines Zeichen der einwertigen Gröse bereits von Aristotélès 384 bis 322 vor Chr. in die Wissenschaft eingeführt worden und muss beibehalten werden. Er ist einerseits einwertig (einem andern Buchstaben entweder gleich oder ungleich) und ist andererseits ganz allgemein, nicht an bestimmte Begriffe gebunden, und kann also jedes bezeichnen, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann.

4. **Erklärung.** Ein Einfaches (ein elementum) heist eine Gröse, wenn sie geknüpft werden soll, ohne dass sie selbst durch eine Knüpfung von Grösen entstanden ist und welche also ursprünglich gesetzt ist.

In der Grösenlehre sind die Zeichen e_1, e_2, \dots die Zeichen der Einfachen (der Elemente), die Buchstaben (a, b, c, \dots) die Zeichen beliebiger Grösen.

Das Einfache, das Element, kann also Jedes sein, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann. Gleichgültig ist dabei, ob es vorher verknüpft gewesen, oder auch durch Verknüpfung entstanden ist, wenn es nur in dem Denkkakte, um den es sich handelt, als Einfaches gesetzt wird, d. h. noch nicht verknüpft ist. Es kann mithin auch jede beliebige Gröse als Einfaches gesetzt werden. Jede durch Knüpfung der Einfachen erzeugte Gröse ist im Gegenfatze dazu zusammengefasst.

5. **Erklärung.** Die Knüpfung (die nexio) von Grösen heist jede Zusammenstellung oder Verbindung von Grösen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern das Ergebniss nur einen und nicht mehrere Werte hat.

Das Ergebniss oder das Gefammt der Knüpfung heist das, was durch die Knüpfung zweier Grösen entsteht. Das Ergebniss ist, da

es nur einen Wert hat und Gegenstand des Denkens ist, wieder eine GröÙe und kann von neuem geknüpft werden. Das Zeichen für das Gefammt ist G.

Jede GröÙenknüpfung findet nur zwischen zwei GröÙen statt, deren Reihenfolge nicht geändert wird; denn nur diese Knüpfung hat einen und nicht mehrere Werte. Sollen mehrere GröÙen geknüpft werden, so muss genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche zwei GröÙen zuerst geknüpft werden sollen, und mit welcher weiteren GröÙe demnächst jedesmal das Ergebniss der Knüpfung geknüpft werden soll.

Die Knüpfung kann also jede beliebige Verbindung von GröÙen im Denken bezeichnen. Beispiele derselben sind die Verbindungen der Begriffe im Gedanken, der Gedanken in einem Werke. Beispiele sind ferner Addition, Multiplikation, Zeichnungen aller Art, Inhaltsverzeichnisse, Lexika, kurz jedes, was der Mensch im Denken verbinden kann, sofern das Ergebniss nur einen und nicht mehrere Werte hat.

Wie notwendig die letzte Bestimmung sei, das macht uns ein Beispiel aus der Raumlehre anschaulich. Denken wir uns, es solle mit der Strecke AB, deren Länge und Lage bestimmt sei, eine zweite Strecke BC von gegebener Länge geknüpft werden. Wenn hier die Richtung dieser zweiten Strecke beliebig sein kann, so hat $AB \circ BC$ unzählig viele Werte; schlagen wir nämlich mit BC um B einen Kreis, so ist jede von A nach dem Umfange des Kreises gezogene Strecke z. B. AC' und AC'' gleich $AB \circ BC$, also der Wert von $AB \circ BC$ ganz unbestimmt und kann nicht einmal $AB \circ BC = AB \circ BC$ gesetzt werden. Wenn dagegen der Winkel, den AB und BC mit einander bilden sollen, bestimmt ist, dann giebt es nur eine Strecke AC, welche der Forderung genügt und ist $AB \circ BC = AC$ eine einwertige GröÙe.

Erklärung. Das Zeichen der Knüpfung kann jedes beliebige 6. Zeichen werden. Dasselbe Knüpfungszeichen bezeichnet in demselben Satze der GröÙenlehre stets eine und dieselbe Knüpfung. Im Uebrigen kann jedes Knüpfungszeichen jede beliebige Knüpfung bezeichnen.

Jeder Satz, welcher für ein Knüpfungszeichen bewiesen ist, gilt mithin für alle Knüpfungen, welche das Knüpfungszeichen bezeichnen kann. Soll ein Knüpfungszeichen nur eine bestimmte Art von Knüpfungen bezeichnen, so muss dies bei seiner Einführung ausdrücklich gesagt und genau und unzweifelhaft festgestellt werden, welche Knüpfung dadurch bezeichnet werden soll.

Das allgemeine Zeichen der Knüpfung, welches jede beliebige Knüpfung bezeichnen kann, ist der Kreis \circ , welcher zwischen die zu knüpfenden GröÙen gesetzt wird (z. B. $a \circ b$, gelesen a geknüpft mit b oder kurz a mit b).

Erklärung. Die Klammer ist das Zeichen, dass die in die 7. Klammer eingeschlossenen GröÙen zuvor zu einem Gefamnte geknüpft

werden sollen, ehe dies mit der Gröſe auser der Klammer geknüpft werden soll.

In jeder Klammer dürfen nur zwei Gröſen stehen, ſind mehr Gröſen in derſelben enthalten, ſo müſſen alle bis auf eine in eine andre Klammer geſchloſſen ſein, und müſſen dann alle Gröſen in dieſer andern Klammer zuvor zu einem Geſammt geknüpft ſein, ehe das Geſammt dieſer Klammer mit der einen auser dieſer Klammer ſtehenden Gröſe geknüpft werden darf.

Sind demnach n Gröſen zu knüpfen, ſo ſind in dem Ausdrücke $n - 2$ Klammern erforderlich, ſofern kein Zweifel über die Reihenfolge der Knüpfung Statt finden ſoll (z. B. bei 5 Gröſen ſind drei Klammern erforderlich (ac([boc]od))ce.

Ein Beiſpiel wird uns die Bedeutung der Klammer klar machen. Es iſt z. B. $(3 + 4) 5 \cdot 7 \cdot 5 = 35$, denn nach der Regel dieſes Satzes muſs man zunächſt die beiden Gröſen in der Klammer knüpfen, alſo $3 + 4 = 7$ und nun dieſe Gröſe mit der Gröſe auser der Klammer knüpfen, alſo $7 \cdot 5 = 35$. Dagegen iſt $3 + (4 \cdot 5) = 3 + 20 = 23$. Man muſs demnach die Klammern ſtets genau beachten. Die Gröſenlehre wird die Aufgabe haben, feſtzuſtellen, in welchen Fällen eine Klammer ohne Aenderung des Wertes weggelaſſen werden darf.

Wenn mehr Klammern in einem Ausdrücke vorkommen, ſo muſs jede ein andres Zeichen haben, als die andern, damit Verwechſelungen unmöglich ſind. Man wendet demnach folgende Klammern an, zunächſt die runde Klammer $()$, dann die eckige Klammer $[]$, dieſe beiden Arten genügen meiſt, dann die faſſende Klammer $\{ \}$, endlich die gebogene Klammer $\langle \rangle$. Wenn noch mehr Klammern gebraucht werden, giebt man ihnen unten eine Ziffer und unterſcheidet demnach

$$\left(\begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \\ 3 \end{array} \right), \dots \dots \dots \left(\begin{array}{c} \\ n \end{array} \right).$$

Da viele Klammern den Ueberblick außerordentlich erſchweren, ſo ſucht man dieſelben möglichſt zu vermeiden. der folgende Satz zeigt uns, wie dies zu erreichen iſt.

8. **Erklärung.** Fortſchreitend knüpfen eine Reihe von Gröſen heiſt in der Reihe zuerſt die erſte mit der zweiten knüpfen; das Geſammt dieſer Knüpfung mit der dritten knüpfen, und ſofort jedesmal das Geſammt der Knüpfung aller frühern Gröſen mit der nächſtfolgenden knüpfen.

Eine Gröſe, in welcher nur Einfache (Elemente) fortſchreitend geknüpft ſind, heiſt eine einfache Gröſe.

Soweit mehr Gröſen durch dieſelbe Knüpfungsart fortſchreitend geknüpft werden, können die Klammern fortgelaſſen werden, da über die Folge der Knüpfung kein Zweifel Statt finden kann. Die Klammern

müssen nur dort stehen, wo von der fortschreitenden Knüpfung abgewichen wird, können aber auch in der fortschreitenden Knüpfung wieder eingeführt werden, z. B. $a + b + c = (a + b) + c$, $a + b + c + d = [(a + b) + c] + d$.

Das Gesammt aus der fortschreitenden Knüpfung der Größen $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ bezeichnen wir durch $G_{1,n} a_1 a_2 \dots a_n$, gelesen Gesammt von 1 bis n von a_1 , wo n eine ganze Zahl und wo a alle ganzen Werte von 1 bis n erhält; es ist demnach $G_{1,n} a_1 = a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ a_4 \circ \dots \circ a_n$.

Es ist von gröster Wichtigkeit, dass jede Klammer, welche irgend entbehrt werden kann, ohne zweideutig zu werden, auch wirklich vermieden werde, und ist daher das Weglassen der Klammern, wenn in derselben Knüpfungsart fortschreitend geknüpft werden soll, ein wichtiger Fortschritt.

Es ist aber wohl zu beachten, dass dies Weglassen bei fortschreitender Knüpfung nicht erlaubt ist, wenn bei verschiedenen Knüpfungsarten fortschreitend geknüpft werden soll. So z. B. ist $(a + b) + c = a + b + c$, so auch ist $(ab)c = abc$, dagegen ist nicht $(a + b)c = a + bc$, sondern letzteres ist $a + bc = a + (bc)$. Ebenso ist $(a^b)^c = a^{bc}$, aber nicht $(ab)^c = ab^c$, auch nicht $(a + b)^c = a + b^c$ u. f. w. Wir werden noch wiederholt auf diese Regel aufmerksam machen.

Gegenwärtig wird das Setzen und Weglassen der Klammern in fast allen mathematischen Werken noch sehr mangelhaft betrieben. Man setzt vielfach Klammern, wo sie weggelassen werden können und sollen, und lässt vielfach Klammern fort, wo sie gesetzt werden müssen. Die Darstellung wird dadurch häufig undeutlich, selbst fehlerhaft. Ich werde im Laufe des Werkes, namentlich in der Folgelehre, mehrfach auf diesen Punkt zurückkommen und die Regeln aufstellen, nach denen hier verfahren werden muss. Es können darnach in einzelnen Zweigen 90 bis 99 Hundertel der jetzt gebräuchlichen Klammern entbehrt werden, und wird dadurch ein wesentlicher Fortschritt erreicht.

Erklärung. Formel heist jede Knüpfung von Größen, die Art 9. der Knüpfung bestimmt die Gestalt der Formel.

Formel von a heist eine Formel, welche die Größe a enthält. Das Zeichen derselben ist F_a , gelesen „Formel von a“. Das Zeichen F_a bezeichnet in demselben Satze der Größenlehre eine und dieselbe Formel von a. Im Uebrigen kann sie jede beliebige Formel von a bezeichnen. Soll sie nur eine Art von Formeln bezeichnen, so muss dies ausdrücklich gesagt werden.

Gleichlautend heissen zwei Formeln, wenn sie beide ganz dieselben Knüpfungen ganz derselben Größen enthalten.

Verschieden heissen zwei Formeln, wenn die Knüpfungen oder die Größen der Formeln von einander abweichen.

Entsprechend heissen die Formeln zweier Größen, wenn die

Formeln gleichlautend werden, sobald man in der zweiten Formel die erste GröÙe statt der zweiten einführt.

Beispiele:

Gleichlautend find: $a + b(c + a)$ und $a + b(c + a)$.

Verschieden find: $a + b(c + a)$ und $a + bc + ba$.

Entsprechend find: $a + b(c + a^n)$ und $m + b(c + m^n)$.

Die Mathematiker oder Formenlehrer wenden zur Bezeichnung einer Formel. bez. später einer Folge oder Funktion die Zeichen f , F , g , ψ an und setzen, wenn noch mehrere Arten derselben unterschieden werden, Zeiger an das Zeichen. z. B. f_1 , f_2 , f_3, \dots, f_n oder f' , f'' , f''' , f^{IV}, \dots . Diesem Gebrauche muss man sich anschließen; da aber die Zeichen f , F , g , ψ auch häufig zur Bezeichnung von GröÙen gebraucht werden, so wird der Ausdruck fa bez. $f(a)$ zweideutig und kann ebenso das Zeug oder Produkt von f und a , als die Formel von a bezeichnen. Eine solche Zweideutigkeit ist in streng wissenschaftlichen Werken unzulässig. Viele Mathematiker suchen diese Zweideutigkeit dadurch zu vermeiden, dass sie Formel von a als $f(a)$ schreiben; aber dies ist fehlerhaft. Denn einmal hat die Klammer um eine einzelne GröÙe keinen Sinn und dann ist $f(ab)$ doch wieder zweideutig und kann ebenso f mal ab , als Formel von ab bezeichnen. Das einzig Richtige ist, dem Formelzeichen eine etwas andre Form zu geben, ich führe dafür die Zeichen \mathfrak{f} , \mathfrak{F} , \mathfrak{g} , $\mathfrak{\psi}$ ein, welche jede Verwechslung unmöglich machen.

b. Die Beweisform der GröÙenlehre.

Nicht minder wichtig, als die Erklärungen der GröÙenlehre sind, ist auch die Beweisform der GröÙenlehre für die Zahlenlehre und für die ganze Mathematik. Da wir in der Zahlenlehre keine andre Wissenschaft, auch nicht einmal die Logik voraussetzen, so dürfen wir auch nicht für die Beweise einen logischen Schluss und Beweis anwenden.

Glücklicher Weise bedürfen wir aber auch des begrifflichen oder logischen Schlusses gar nicht für unfre Beweise der GröÙenlehre. In dem begrifflichen Schlusse wird nämlich nur von einem Begriffe, der weiter ist, auf einen Begriff geschlossen, der ihm untergeordnet oder enger ist. Bei den Beweisen der GröÙenlehre dagegen haben wir es nicht mit untergeordneten, sondern allein mit gleichen und ungleichen GröÙen zu tun. Der begriffliche oder logische Schluss findet also in der GröÙenlehre gar keine Anwendung. Daselbe ergibt sich auch daraus, dass alle Beweise der GröÙenlehre in Formeln geführt werden können und müssen und dass die Uebersetzung der Beweise in die Sprache nur eine Uebersetzung ist in das Gebiet des gewöhnlichen Denkens, welches der GröÙenlehre und strengen Denklehre an sich fremd ist.

Die Beweise in der GröÙenlehre werden nun so geführt, dass eine Formel einer andern gleichgesetzt wird, diese einer dritten und so fort. Dies führt uns zu den Sätzen von der Gleichheit.

Bei den Sätzen von der Gleichung der GröÙen geht die Entwicklung von der Erklärung aus, dass zwei GröÙen nur dann gleich genannt werden, wenn man in jeder Knüpfung der GröÙenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Wertes setzen kann. Bewiesen wird, dass, wenn in einer Reihe von GröÙen

jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, auch die erste jeder folgenden gleich ist, indem dann die erste der zweiten gleich ist, statt der zweiten aber die gleiche dritte, statt dieser die gleiche nächstfolgende und sofort jede folgende gesetzt werden kann, so dass die erste jeder folgenden gleich ist. Es ist dies das erste Gesetz der Gleichheit oder der Satz des geraden oder direkten Größenbeweises.

Bewiesen wird ferner, dass, wenn in einer Reihe von Größen eine Gleichung für die erste GröÙe der Reihe gilt und wenn sie ausserdem, sobald sie für eine beliebige GröÙe der Reihe gilt, auch für die nächstfolgende GröÙe der Reihe gilt, dass sie dann auch allgemein für alle Größen der Reihe gilt. Es ist dies das zweite Gesetz der Gleichheit oder der Satz des fortleitenden oder induktischen Größenbeweises. Diese beiden Arten von Beweisen kommen in der Größenlehre allein vor.

In der Logik werden wir später noch die entsprechenden Formen des begrifflichen Beweises und ausserdem noch den ungeraden oder indirekten Beweis kennen lernen, welche in den späteren Zweigen der logischen Wissenschaften und der Formenlehre und in den Anwendungen dieser Wissenschaften häufig gebraucht werden.

Erklärung. Gleich heissen zwei Größen, wenn man in den 10. Knüpfungen der Größenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Wertes setzen kann.

Ungleich heissen zwei Größen, wenn man in den Knüpfungen der Größenlehre die eine nicht statt der andern ohne Aenderung des Wertes setzen kann.

Eine GröÙe kann nie einer andern GröÙe gleich und zugleich ungleich sein, sondern sie muss der andern GröÙe entweder gleich oder ungleich sein; denn jede GröÙe darf nur einen und nicht mehrere Werte haben.

Erklärung. Das Gleichheitszeichen $=$ ist das Zeichen der 11. Gleichheit, das Ungleichheitszeichen $>$ ist das Zeichen der Ungleichheit. Das erstere bezeichnet, dass die geknüpften Größen gleich sind (z. B. $a = b$, gelesen a gleich b), das zweite bezeichnet, dass die geknüpften Größen ungleich sind (z. B. $a > b$, gelesen a ungleich b).

Eine Gleichung heist die Knüpfung zweier Größen durch das Gleichheitszeichen, z. B. $a = b$. Die links stehende GröÙe a heist ihre linke Seite, die rechts stehende b ihre rechte Seite.

Wenn auf einer Seite der Gleichung zwei oder mehrere Größen durch Knüpfungszeichen verbunden sind, so müssen diese zuerst unter sich geknüpft werden, ehe sie der andern Seite gleich gesetzt werden können, oder es ist $a = b \odot c \odot d$ gleich $a = (b \odot c \odot d)$.

Zwei verschiedene Formeln sind einander gleich, wenn die eine ohne Aenderung des Wertes in die andre umgewandelt werden kann.

Herr Professor Paul Du Bois-Reymond giebt „Allg. Funktionenlehre I., Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe“, Tübingen 1882, S. 44 folgende Erklärung von gleich. „Die mathematischen Grösen sind ent-, weder gleich oder ungleich. Gleich sind sie, wenn ihre sinnlichen Erscheinungen unter denselben Bedingungen denselben Eindruck hervorbringen.“ Hieraus folgt, sie sind ungleich, wenn die sinnlichen Erscheinungen unter denselben Bedingungen nicht denselben Eindruck hervorbringen. Aber diese Erklärung ist in mehrfacher Beziehung fehlerhaft.

Denn einmal sind die Grösen der Formenlehre oder Mathematik, wie die der Denklehre vom Geiste gesetzte oder verknüpfte Gebilde, welche grosenteils gar nicht der Sinnenwelt angehören und daher auch keine sinnlichen Eindrücke hervorbringen, und dann brauchen sie, auch wenn sie von sinnlichen Erscheinungen begleitet sind, gar nicht denselben Eindruck unter denselben Bedingungen hervorzubringen. So ist logisch: der Mensch gleich der Mensch, mag er schwarz oder weis, gros oder klein, dick oder dünn, kurz, mag seine äussere Erscheinung fein, wie sie will. So sind mathematisch: 2 Menschen = 2 Menschen, 2 Dreiecke = 2 Dreiecke, mag die sinnliche Erscheinung derselben fein, welche sie wolle. Kurz, die Gröse hat mit der sinnlichen Erscheinung gar nichts gemein; Gröse kann jedes fein, was Gegenstand des Denkens ist, ob es der Sinnenwelt angehört oder nicht. Ebenso als gleich können jede 2 Grösen gesetzt werden, wenn in dem Denkkakte die eine statt der andern ohne Aenderung des Wertes gesetzt werden kann, mögen sie übrigens in andern Beziehungen so ungleich fein, wie sie wollen. Die Erklärung des Herrn Du Bois-Reymond ist also durchaus fehlerhaft.

Vor allem fehlt bei Herrn D. B. wieder die Hauptbestimmung in der Erklärung, dass eine Gröse einer andern Gröse nie gleich und zugleich ungleich fein darf. Ohne diese Bestimmung ist aber jede Erklärung der Gleichheit unbrauchbar.

12. **Satz.** $a = a$ **oder in Worten:**
Jede Gröse ist sich selbst gleich.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10. **oder in Worten:**
 Nach Erklärung 10 heissen zwei Grösen einander gleich, wenn man ohne Aenderung des Wertes die eine statt der andern setzen kann. Jede Gröse kann man, da sie nach Erklärung 2 nur einen Wert besitzt, ohne Aenderung des Wertes für sie selbst setzen, also ist jede Gröse sich selbst gleich.

13. **Satz.** $a \circ b \circ c \circ d = [(a \circ b) \circ c] \circ d$ **oder in Worten:**
In jeder fortschreitenden Knüpfung von Grösen in derselben Knüpfungsart kann man die Klammern beliebig weglassen oder fortschreitend setzen.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 8 **oder in Worten:**
 Die beiden Seiten der Gleichung sind verschieden in der Form der Knüpfung. Nun kann man aber nach Erklärung 8 in der fortschrei-

tenden Knüpfung die Klammern fortlassen; tut man dies auf der rechten Seite, so werden sie gleichlautend, also sind sie gleich nach 12.

Satz. $G_c a_n = (G_c a_n)_{n+1} a$ 14.

Das Gesammt aus $n + 1$ Größen a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ist gleich dem Gesamte aus den n ersten Größen geknüpft mit der Größe a_{n+1} .

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 8.

Die Sätze 12, 13 und 14 drücken nur in Formeln, bezüglich in Sätzen aus, was in den Erklärungen gegeben war; sie sind nur ein anderer Ausdruck des in den Erklärungen Gesetzten und bedürfen daher eines Beweises nicht.

Erklärung. Bedingt gleich oder gleich in Bezug auf 15. eine Bedingung heißen zwei Größen, wenn die Größen gleich sind, sofern die Bedingung eintritt.

Das Zeichen der bedingten Gleichheit ist \ast ; durch den Stern wird die Bedingung, für welche die Gleichheit eintritt, hinzugefügt. Ein zweites Zeichen der bedingten Gleichheit ist die Verbindung zweier Gleichungen, von denen die eine die Annahme oder die Bedingung (die hypöthesis), die andre die Folgerung (die thésis) heist.

Satz. $\text{Pa} \ast \text{Pb} \quad \ast \text{Bedingung } a = b$ oder 16.

Annahme: $a = b$ Folgerung: $\text{Pa} = \text{Pb}$ oder in Worten: Wenn zwei Größen einander gleich sind, so ist auch jede Formel der ersten Größe gleich der entsprechenden der zweiten Größe.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10 oder in Worten: Die Formeln zweier Größen heißen entsprechend, wenn sie gleichlautend werden, sobald man in der zweiten Formel die erste Größe statt der zweiten einführt. Nun ist aber $a = b$ nach der Annahme, also kann man ohne Aenderung des Wertes die eine statt der andern in jede Knüpfung, mithin auch in die Formel Pa setzen, dann werden beide Formeln gleichlautend oder gleich, also ist $\text{Pa} = \text{Pb}$.

Bemerkt möge hier werden, dass, wenn $\text{Pa} = \text{Pb}$ ist, daraus noch keineswegs immer folgt, dass $a = b$ ist. So ist $a \cdot 0 = b \cdot 0$; daraus folgt aber noch nicht $a = b$; so ist $(+a)^2 = (-a)^2$, daraus folgt aber nicht, dass $+a = -a$ sei.

Satz. $a \ast b \ast a \ast c \quad \ast \text{Bedingung } b = c$ oder 17.

Annahme: $b = c$ Folgerung $a \ast b = a \ast c$ oder in Worten: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Größen auf gleiche Weise knüpft.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 16.

Der Satz ist von grosser Wichtigkeit für die ganze Größen- und Denklehre. Wenn $a = b$ ist, so folgt daraus $a + c = b + c$, ferner $a \cdot c = b \cdot c$ und $a^c = b^c$, und zwar folgt dies für alle Zweige der Denklehre, für Zahlenlehre und

Ausdehnungslehre. für Logik und Bindelehre. Aber dieser Satz setzt auch voraus, dass jede Verknüpfung nur ein einwertiges Gefammt liefere, lässt man dies ausser Acht, so kann gerade dieser Satz zu den bedenklichsten Trugschlüssen führen. Es tritt dies sofort hervor, wenn man die Knüpfungen mit negativen Grösen oder mit Brüchen zulässt.

Sei z. B. bei der Zahlenlehre $\frac{1}{0}$ zugelassen, so wird, da $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, auch $a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0$ ist, nach diesem Satze, wenn auf beiden Seiten mit $\frac{1}{0}$ multipliziert wird, $(a \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = (b \cdot 0) \cdot \frac{1}{0}$ und $(a \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = a \cdot (0 \cdot \frac{1}{0}) = a \cdot 1 = a$ und ebenso $(b \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = b$, mithin $a = b$, d. h. jede Gröse jeder andern gleich.

Sei ferner z. B. bei der Logik, wo $a + a = a$ ist, die Gröse $a - a = 0$ zugelassen, so wird $a = a + 0 = a + (a - a) = (a + a) - a = a - a = 0$ und ebenso jede andere Gröse, also alle Grösen gleich Null und einander gleich.

Sei bei der Logik, wo $a \cdot a = a$ ist, die Gröse $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ zugelassen, so wird $a = a \cdot 1 = a \cdot (a \cdot \frac{1}{a}) = (a \cdot a) \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$, und ebenso jede andere Gröse, also alle Grösen gleich Eins und einander gleich.

Man muss also aufpassen und sich verfichern, dass jede Knüpfung nur einen Wert giebt, wie dies bereits die Erklärung 5 fordert. Ist dies erfüllt, dann gilt der Satz selbstverständlich ganz allgemein.

18. **Satz. Annahme:** $a = c$, $b = c$ **Folgerung** $a = b$.

Wenn zwei Grösen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich.

Beweis: In Formeln: Annahme $b = c$ Folg.: $(a = c) \stackrel{*}{=} (a = b)$
(nach 17) oder in Worten:
Die Gleichung $c = b$ bleibt nach Satz 17 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen Grösen a auf gleiche Weise knüpft, also ist $(a = c) \stackrel{*}{=} (a = b)$.

In dem Satze 18 kommt zuerst die Formel vor $(a = c) \stackrel{*}{=} (a = b)$, wo in einer Gleichung jede Seite der Gleichung wieder eine Gleichung darstellt. Da die Grösen auf jeder Seite des Gleichheitszeichens unter sich geknüpft werden müssen, ehe sie gleichgesetzt werden können, so muss hier jede Seite der Hauptgleichung in eine Klammer geschlossen werden, wie dies im Beweise geschehen ist. Dann ist der Sinn der Bezeichnung unzweifelhaft und einwertig.

19. **Satz.** $(a = b) = (b = a)$

oder

Annahme $a = b$, **Folgerung** $b = a$

oder in Worten:

Die beiden Seiten einer Gleichung kann man vertauschen.

Beweis: Unmittelbar aus Erklärung 10.

Zwei Grösen sind einander gleich, wenn man ohne Aenderung des Wertes in jeder Knüpfung die eine statt der andern setzen kann,

also kann man statt der ersten die zweite und statt der zweiten die erste setzen.

Satz. Annahme: $a = b$, $b = c$ **Folgerung:** $a = c$ oder in Worten: 20.
Wenn die erste GröÙe der zweiten und die zweite der dritten gleich ist, so ist auch die erste der dritten gleich.

Beweis: Unmittelbar nach 17. **Annahme:** $b = c$ **Folgerung:**
 $(a = b) \stackrel{*}{=} (a = c)$ oder in Worten:
Die Gleichung $b = c$ bleibt nach 17 richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen GröÙen a auf gleiche Weise knüpft, also ist $(a = b) \stackrel{*}{=} (a = c)$.

Satz. $[a = (b \circ c \circ d \circ \dots)] \stackrel{=}{=} [a = b \circ c \circ d \circ \dots]$. oder in Worten: 21.
Wenn die eine Seite einer Gleichung in eine Kammer geschlossen ist, so kann man die Klammer weglassen.

Beweis: Unmittelbar aus der Erklärung 10.

Satz des geraden (direkten) GröÙenbeweises. Annahme: 22.
 $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3 \dots a_{n-1} = a_n$ oder $a_1 = a_{1+1}$ **Folgerung:** $a_1 = a_n$
oder in Worten: Wenn in einer Reihe von GröÙen jede vorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, so ist auch die erste der letzten gleich.

Beweis in Formeln: **Annahme:** $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$ **Folgerung:**
 $a_1 = a_3$ (nach 20)

Annahme: $a_1 = a_3$, $a_3 = a_4$ **Folgerung:** $a_1 = a_4$ (nach 20)
u. f. w.

Annahme: $a_1 = a_{n-1}$, $a_{n-1} = a_n$ **Folgerung:** $a_1 = a_n$ (nach 20)

Beweis in Worten: Nach der Voraussetzung ist die erste GröÙe gleich der zweiten. Da aber nach der Voraussetzung ferner jede nächstvorhergehende der nächstfolgenden gleich ist, so kann ich in jeder Gleichung statt der nächstvorhergehenden GröÙe die nächstfolgende setzen; also kann ich in der rechten Seite der ersten Gleichung statt der zweiten die dritte, statt der dritten die vierte und sofort bis zu der letzten GröÙe der Reihe setzen, also ist auch die erste GröÙe der letzten GröÙe gleich.

Satz des fortleitenden (induktorischen) GröÙenbeweises. 23.

Annahme: $\mathbb{R}a_1 = \phi a_1$, $[\mathbb{R}a_n = \phi a_n] \stackrel{=}{=} [\mathbb{R}a_{n+1} = \phi a_{n+1}]$
Folgerung: $\mathbb{R}a_n = \phi a_n$ oder in Worten:
Jede Gleichung der Formenlehre, welche für die erste GröÙe einer Reihe gilt und welche, wenn sie für eine beliebige GröÙe der Reihe gilt, dann auch für die nächstfolgende GröÙe der Reihe Geltung hat, gilt auch für alle folgenden GröÙen der Reihe.

Beweis in Formeln:

Es ist $\mathbb{P}a_1 = \Phi a_1$ und $[\mathbb{P}a_1 = \Phi a_1] = [\mathbb{P}a_2 = \Phi a_2]$ Folgerung:
 $\mathbb{P}a_2 = \Phi a_2$ (nach 10)

Es ist $\mathbb{P}a_2 = \Phi a_2$ und $[\mathbb{P}a_2 = \Phi a_2] = [\mathbb{P}a_3 = \Phi a_3]$ Folgerung:
 $\mathbb{P}a_3 = \Phi a_3$ (nach 10)

u. f. w.

Es ist $\mathbb{P}a_{n-1} = \Phi a_{n-1}$ und $[\mathbb{P}a_{n-1} = \Phi a_{n-1}] = [\mathbb{P}a_n = \Phi a_n]$
 Folgerung: $\mathbb{P}a_n = \Phi a_n$ (nach 10)

In Worten: Nach der Annahme gilt die Gleichung $\mathbb{P}a_1 = \Phi a_1$ für die erste GröÙe der Reihe. Ferner gilt diese Gleichung, sobald sie für eine beliebige GröÙe der Reihe a_a gilt, auch für die nächstfolgende GröÙe der Reihe a_{a+1} ; man kann mithin in dieser Gleichung a_{a+1} statt a_a setzen, oder es ist in Bezug auf diese Gleichung $a_a \vdash a_{a+1}$, mithin ist auch in Bezug auf diese Gleichung $a_1 \vdash a_n$ nach Satz 22, d. h. man kann in dieser Gleichung auch statt der ersten GröÙe der Reihe a_1 die letzte GröÙe der Reihe a_n setzen, oder die Gleichung gilt, da sie für die erste GröÙe gilt, auch für die letzte GröÙe der Reihe.

24. Satz des einfachen GröÙenbeweises (des elementaren Beweises).

Jede Gleichung der GröÙenlehre, welche für ein Einfaches oder für ein Element gilt, und welche, sobald sie für eine beliebige GröÙe gilt, auch für jede GröÙe gilt, welche ein Einfaches mehr enthält, gilt auch für alle durch fortschreitende Knüpfung von Einfachen erzeugten GröÙen.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 23, wenn man das erste Einfache als erste GröÙe und jedesmal die ein Einfaches mehr enthaltende GröÙe auch jedesmal als nächstfolgende GröÙe in der Reihe setzt.

Alle die Sätze über die Gleichung der GröÙen gehen aus der Erklärung der gleichen GröÙe hervor, dass man statt jeder GröÙe die gleiche setzen kann. Die ersten Sätze ergeben sich daraus unmittelbar, die letzten ergeben sich durch wiederholte Anwendung der Erklärung und wiederholte Einstellung der gleichen GröÙe.

Es hat uns diese Nummer namentlich in den letzten Sätzen 22, 23 und 24 die Form der Beweise gelehrt, welche in der GröÙenlehre, wie in allen Zweigen der Denklehre: in allen Zweigen der Formenlehre oder Mathematik, wie in allen Zweigen der logischen Wissenschaften die allein gültige und stets wiederkehrende ist und daher die größte Wichtigkeit für die strenge Wissenschaft besitzt.

2. Die drei Arten der Größenknüpfung.

Nachdem wir die Erklärungen und die Beweisform der Größenlehre kennen gelernt haben, könnten wir nunmehr zu den Größen und Knüpfungen der Zahlenlehre übergehen, dann aber müssten wir das Gesetz der Einigung etwa sechsmal beweisen und ebenso oft das Gesetz der Vertauschung und ebenso viermal die Gesetze der Trennung einer Knüpfung. Viel kürzer, einfacher und auch für die Schüler leichter ist es, diese Gesetze einmal in der Größenlehre zu beweisen und dann diese Gesetze einfach in den verschiedenen Ordnungen der Zahlenlehre anzuwenden. Ich ziehe daher diesen Weg vor und entwickle also aus der Größenlehre noch die Sätze über die Arten der Knüpfung und demnächst auch die über die Gattungen der Knüpfung.

Erklärung. Unter der GröÙe $a \circ (ob)$ verstehen wir die GröÙe 25.
 $a \cdot b$. Die GröÙe (ob) , gelesen „Mit b “, heist eine KnüpfgröÙe.

Satz. $a \circ (ob) = a \circ b$.

26.

Statt eine KnüpfgröÙe zu knüpfen, kann man die GröÙe ohne Vorzeichen knüpfen.

Erklärung. Satz. Bei der Größenlehre unterscheiden wir drei 27.
 Arten der Knüpfung: Die Anreihung, die Einigung und die Vertauschung der Größen.

a. Die Anreihung der Größen.

Erklärung. Die Anreihung heist eine Knüpfung von Größen, 28.
 sofern die Klammer nicht weggelassen, die Stellung der Größen nicht geändert werden darf, ohne dass sich der Wert des Gesamtes ändert.

Die Anreihung der Größen ist die einzige Form der Knüpfung, bei welcher jede Knüpfungsform von jeder andern Knüpfungsform verschieden und nur sich selbst gleich ist. So ist für die Anreihung nicht nur $a \circ b \geq b \circ a$, sondern auch $a \circ b \circ c \geq a \circ (b \circ c)$.

Für die Anreihung, wo also weder Einigung, noch Vertauschung gilt, giebt uns jedes wissenschaftliche System, jedes Buch, namentlich jedes Wörterbuch ein Beispiel. Ein andres Beispiel bietet die Erhöhung oder Potenzirung, denn auch bei dieser ist weder $a^b = b^a$, noch ist $(a^b)^c = a^{(b^c)}$.

b. Die Einigung der Größen.

Erklärung. Die Einigung (die connexio) heist eine Knüpfung 29.
 von Größen, sofern man, statt mit der zweiten GröÙe ein Einfaches (ein Element) zu knüpfen, dies auch mit dem Gesamte der Knüpfung der beiden Größen knüpfen kann, ohne dass sich der Wert des Gesamtes ändert.

30. **Grundformel der Einigung.** $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ oder in Worten **Statt mit der zweiten Gröse ein Einfaches (ein Element) zu einigen, kann man es mit dem Gesamte der beiden Grösen einigen, und — Statt mit dem Gesamte zweier Grösen ein Einfaches zu einigen, kann man es mit der zweiten Gröse einigen.**

Die Erklärung der Einigung muss so gefasst werden, dass das Ergebniss der Einigung wieder einwertig ist. Daraus ergibt sich die obige Erklärung mit Notwendigkeit. Denn gegeben sind uns die Einfachen (die Elemente), welche noch nicht geknüpft sind. Festgesetzt ist bereits, dass wir in der fortschreitenden Knüpfung der Einfachen die Klammern fortlassen können, also dass $(a \circ e_1) \circ e_2 = a \circ e_1 \circ e_2$ ist. Festgesetzt muss noch werden, was gelten soll, wenn mit einer Gröse a das Gesamte einer Gröse b und eines Einfachen geknüpft werden soll, z. B. $a \circ (b \circ c)$. Darf hier die Klammer nicht weggelassen werden, so ist eine Weglassung der Klammern ausserhalb der fortschreitenden Knüpfung überhaupt nicht möglich; darf sie dagegen hier weggelassen werden, ist also $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, so lässt sich daraus das ganze Gesetz der Einigung ableiten. Zunächst gilt dann nämlich $a \circ (e_1 \circ e_2) = a \circ e_1 \circ e_2$. Ferner gilt $a \circ (e_1 \circ e_2 \circ e_3) = a \circ (e_1 \circ e_2) \circ e_3 = a \circ e_1 \circ e_2 \circ e_3$ u. f. w.

Die Erklärung: Eine Knüpfung heist Einigung, wenn $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ ist, genügt also für die ganze Klammerlösung. Andererseits enthält sie auch nicht zuviel; denn angenommen, sie sollte nur gelten bis zu 10 Einfachen (Elementen), weiter aber nicht, so setzen wir, dass b 10 Einfache enthalte, dann gilt also nicht $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$, also auch von da ab keine einzige Art der Klammerlösung (ausserhalb der fortschreitenden Knüpfung). Aus der Erklärung, dass $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ sei, wird in den Sätzen über die Einigung das Gesetz der Einigung oder das Klammergesetz abgeleitet, dass, sofern jene Grundformel gelte, auch jede Klammer beliebig gesetzt oder weggelassen werden könne und dass das Ergebniss wieder eine Gröse sei, deren Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft sind.

Man hat von anderer Seite die Erklärung so gefasst, dass man $a \circ (b \circ a) = a \circ b \circ c$ erklärt hat, wo a, b, c beliebige Grösen sind. Aber wollten wir die Erklärung in dieser Weise fassen, so wäre in der Erklärung bereits das ganze Gesetz der Einigung vorausgesetzt. Denn, wenn man alle Klammern herstellt, so enthält jede Klammer nur zwei Grösen und kann man demnach von der äussersten Klammer anfangend nach dieser Erklärung jede Klammer weglassen. Die Erklärung könnte dann also auch lauten: Die Einigung ist die Knüpfung der Grösen, bei welcher man jede Klammer beliebig setzen oder weglassen kann. In dieser Erklärung wäre dann aber als Erklärung ausgesprochen, was sich aus einer viel engeren Erklärung ableiten lässt. Es würde daher auch gar nicht erkannt werden, welche Voraussetzung notwendig ist, damit das ganze Gesetz der Einigung statthinde. Eine gute Erklärung aber darf nichts weiter festsetzen, als diese für die Sache unumgänglich notwendige Voraussetzung.

Andererseits kann dann aber auch jede mehrfach zusammengesetzte Gröse auf mehrfache Weise entstanden sein, und könnte daher auch sehr wohl mehrfache Werte haben: jedenfalls müsste doch erst bewiesen werden, dass alle diese Werte gleich sind, wenn man wissenschaftlich sein und Trugschlüsse vermeiden

will. Die gegebene Erklärung ist also die allein mögliche, wenn man streng wissenschaftlich sein will.

Es ist diese strenge Form der Erklärung zuerst 1847 von den Gebrüdern Grassmann bei ihrer gemeinsamen Arbeit in der Arithmetik eingeführt worden. Sie erkannten bereits damals, dass bei allen Größen, welche aus mehreren Einfachen zusammengesetzt sind, genau die Reihenfolge der Knüpfung bestimmt werden müsse, in welcher die Einfachen verbunden werden sollen. Eine verschiedene Art der Knüpfung kann auch einen verschiedenen Wert der geknüpften Größen erzeugen, so z. B. ist für Größen (Variationen) $ab \succ ba$, so ist für Höhen (Potenzen) $a^{b^c} \succ a^{(b^c)}$. Die Gebrüder Grassmann liessen es für den ersten Unterricht im Rechnen gelten, wenn der Lehrer sagt: „Seht Kinder, es giebt ganz dasselbe, ob ich sage $6 + 1$ ist 7, oder $4 + 3$ ist 7, die Reihenfolge im Zusammenzählen ist also ganz gleichgültig“; dagegen erklärten sie es für schlechthin unwissenschaftlich, in der Wissenschaft eine solche Annahme zu machen, ohne sie zu beweisen.

Jede einwertige GröÙe, so schlossen die Gebrüder Grassmann, darf nur in einer einzigen bestimmten Reihenfolge durch Knüpfung der Einfachen erzeugt werden, und sie setzten als die einfachste Reihenfolge der Knüpfung die fortschreitende Knüpfung fest, bei welcher das jedesmalige Ergebniss der Knüpfung nur mit einem, und zwar dem nächstfolgenden Einfachen geknüpft wird. Sie gaben demnach auch bereits 1847 und demnächst in ihren Werken H. Grassmann, Arithmetik 1861, R. Grassmann, Formenlehre 1872, der auf a folgenden GröÙe die Form $a \circ e$ und so fort und erklärten jede GröÙe aus der nächstvorhergehenden durch Knüpfung mit einem Einfachen. Auch Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende, Erster Band 1872 ist, ohne damals diese Arbeiten zu kennen, ganz zu derselben Erklärung gekommen und erklärt jede Zahl durch Zufügung von Eins zu der nächstvorhergehenden.

Auch der Beweis für die fortschreitend aus Einfachen erzeugten Größen und für ihre Knüpfungen muss, dies erkannten die Gebrüder Grassmann gleichfalls schon damals, wenn er streng wissenschaftlich sein soll, fortleitend (von a zu $a \circ e$ vorgehend) geführt werden.

Satz. Das Gesammt der Einigung zweier einfachen Größen a 31. und b ist wieder eine einfache GröÙe, d. h. eine GröÙe, deren Einfache (Elemente) fortschreitend geknüpft sind.

Formelbeweis: Nach Einfachen d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b .

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Einfaches e enthält, denn es ist a , also auch $a \circ e$ nach 8 eine einfache GröÙe, in welcher die Einfachen fortschreitend geknüpft sind.
2. Wenn der Satz für eine GröÙe $a \circ b$ gilt, so dass $a \circ b$ eine GröÙe ist, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind (Annahme), so gilt er auch für die GröÙe $a \circ (b \circ e)$, wo b ein Einfaches e mehr enthält, so dass auch $a \circ (b \circ e)$ wieder eine GröÙe ist, in welcher

die Einfachen fortschreitend geknüpft sind (Folgerung); denn es ist

$$a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e \quad (\text{nach } 30)$$

d. h. da $a \circ b$ nach der Annahme eine GröÙe ist, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind, so ist auch $a \circ b \circ e$, also auch $a \circ (b \circ e)$ eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

3. Mithin gilt der Satz nach 24 allgemein für alle GröÙen b .

Der fortleitende und namentlich der nach Einfachen (Elementen) fortleitende oder elementare Beweis erscheint zur Zeit Vielen, welche an das unwissenschaftliche Geschwätz gewöhnlicher Beweise in der Logik und Arithmetik gewöhnt sind, ermüdend, abschreckend und namentlich für Schulen unpraktisch und unpassend. Diese werden vorausichtlich auch über den vorliegenden streng wissenschaftlichen Weg die Nase rümpfen und vornehm aburteilen. Diesen daher noch ein Wort. Ich lege diesen Gegnern des fortleitenden Beweises die folgenden Fragen vor:

1. Wollen sie mit bereits geknüpften GröÙen anfangen, ohne die Gesetze der Knüpfung zu bestimmen und ohne Einfache oder Elemente zu setzen welche sie knüpfen?

Ich für meinen Teil halte es allein für wissenschaftlich und für Schüler einfach (elementar), erst nach einander eine Reihe ungeknüpfter Einfacher oder Elemente zu setzen und diese demnächst zu andern GröÙen nach bestimmten Gesetzen zu knüpfen.

2. Wollen sie aus den Einfachen alle GröÙen, welche sich aus denselben durch Knüpfung erzeugen lassen, gleichzeitig ableiten, ohne allmählich von der jedesmal erzeugten GröÙe zu der nächstfolgenden durch Knüpfung eines neuen Einfachen überzugehen?

Ich für meinen Teil erzeuge erst allmählich jede folgende GröÙe aus der vorhergehenden durch Knüpfung eines neuen Einfachen oder Elementes, und jeder Elementarlehrer wird mir bestätigen, dass man nur auf diesem Wege in der Zahlenlehre die Zahlen erzeugen könne. Auch die Gegner des fortleitenden Weges haben so in der Kindheit zählen gelernt, indem sie lernten: Eins und eins ist zwei; zwei und eins ist drei; drei und eins ist vier u. f. w. Der fortleitende (induktorische) Weg ist also bei dem Setzen der Einfachen (der Elemente) und bei der fortschreitenden Knüpfung der Einfachen zu GröÙen der gebotne, allein richtige und allein einfache (elementare).

3. Wollen sie bei der Knüpfung mehrerer GröÙen sofort beliebig viele und zwar beliebig zusammengesetzte knüpfen, oder wollen sie erst zwei GröÙen knüpfen und zwar zunächst so, dass die zweite nur zwei Einfache (Elemente), demnächst dass sie drei Einfache und fortschreitend immer ein Einfaches mehr enthält?

Ich für meinen Teil wähle wieder den letztern Weg als den allein wissenschaftlichen und einfachen (elementaren). Nachdem nämlich die Kinder die Zahlen erzeugt haben, so beginnt nun in der Schule das Zufügen der Zahlen oder Addiren. Der Lehrer zeigt den Kindern, dass statt 2 zuzufügen, sie erst eins und dann noch eins zufügen können und übt dann ein „eins und zwei giebt drei, zwei und zwei giebt vier u. f. w.“ Ist dies bis zu voller Sicherheit

eingelübt, so zeigt der Lehrer, dass statt drei zuzufügen, man zwei und eins zuzufügen könne und übt dann das Zufügen von drei bis zu voller Sicherheit ein und ebenso bei jeder folgenden Zahl zeigt der Lehrer, dass statt die folgende zuzufügen, man die vorhergehende und eins zufügen könne und übt jede folgende Reihe, ehe er weiter fortschreitet, bis zu voller Sicherheit ein.

Es giebt also nur einen einfachen (elementaren) Weg des Unterrichtes in der Formenlehre, das ist der fortleitende (induktorische), und ebenso giebt es nur einen wissenschaftlichen Weg der Entwicklung und des Beweises in den Anfangsgründen der Größenlehre, das ist wiederum der fortleitende (induktorische).

Das Werk des ausgezeichneten Mathematikers E. Schroeder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1872, gehört zu den besten Werken dieses Zweiges. Er hat bereits die fortschreitende Erklärung der Zahlen $a+1$, wo jede folgende von allen früheren verschieden ist, dagegen hat er nicht den fortleitenden Beweis. Wenn der Satz für a gilt, gilt er auch für $a+1$, obwohl dies der einzig wissenschaftliche ist, hier kommen wieder Trugschlüsse, oder es werden Voraussetzungen gemacht, welche bewiesen werden können. Dagegen ist das Werk von H. Grassmann, Arithmetik, Berlin 1861, das erste, in welchem einer der Zweige der Formenlehre namentlich die Arithmetik in streng wissenschaftlicher Weise dargestellt ist.

Satz. $a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ oder in Worten 32.

In der Einigung dreier Größen kann man die Klammern beliebig weglassen oder setzen.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf c .

1. Die Gleichung gilt, wenn c nur ein Einfaches enthält (nach 30)
2. Wenn die Gleichung für eine GröÙe c gilt (Annahme), so gilt sie auch für die GröÙe $c \circ e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}
 a \circ [b \circ (c \circ e)] &= a \circ [b \circ c \circ e] && \text{(nach 30)} \\
 &= a \circ (b \circ e) \circ e && \text{(nach 30)} \\
 &= a \circ b \circ c \circ e && \text{(nach Annahme)} \\
 &= a \circ b \circ (c \circ e) && \text{(nach 30)}
 \end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach 24 auch allgemein für alle Größen.

Beweis in Worten: Wenn man nach Satz 31 in der dritten GröÙe c alle Klammern herstellt und die Einfachen nach 30 rück-schreitend aus der Klammer entfernt, so kann man die sämtlichen Einfachen von c aus der Klammer entfernen und die Klammer also weglassen.

Satz. Gesetz der Einigung oder Klammergefetz. 33.

In jeder Knüpfung beliebiger Größen, für welche Einigung gilt, kann man jede Knüpfklammer dieser Knüpfung beliebig weglassen

oder setzen, und das Gesamt der Knüpfung ist eine GröÙe, deren **Einfache (Elemente)** fortschreitend geknüpft sind.

Beweis in Formeln, fortleitend (induktorisch) in Bezug auf $G_{1,n}^o b_n$.

Es sei gegeben $a_o(G_{1,n}^o b_n) = a_o(b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n)$, zu beweisen ist $a_o(b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n) = a_o b_1 \circ b_2 \cdots \circ b_n$.

1. Die Gleichung gilt, wenn $G_{1,n}^o b_n$ nur zwei GröÙen $b_1 \circ b_2$ enthält (nach 32).

2. Wenn die Gleichung für irgend ein Gesamt $G_{1,n}^o b_n$ gilt (Annahme), so gilt sie auch für das Gesamt $G_{1,n+1}^o b_n$, welches eine GröÙe b_{n+1} mehr enthält (Folgerung), denn

$$a_o(G_{1,n+1}^o b_n) = a_o(G_{1,n}^o b_n \circ b_{n+1}) \quad (\text{nach 14})$$

$$= (a_o G_{1,n}^o b_n) \circ b_{n+1} \quad (\text{nach 32})$$

3. Mithin gilt die Gleichung nach 23 allgemein.

Beweis in Worten: Man stelle zunächst alle Klammern wieder her. Dann sind in jeder Klammer nach 7 nur zwei GröÙen enthalten, und ist das Gesamt der Klammer nur mit einer dritten GröÙe ausser der Klammer zu knüpfen. Man kann also nach 32 jedesmal die äusserste Klammer weglassen, und so nach der Reihe sämtliche Klammern weglassen, die Formel wird dabei eine GröÙe, in welcher alle Einfache fortschreitend geknüpft sind.

34. **Satz.** In jeder Knüpfung von GröÙen, für welche **Einigung** gilt, kann man statt der **Einfachen (Elemente)** auch beliebige aus diesen erzeugte GröÙen, welche ungleich der nichtigen GröÙe dieser Knüpfung sind, als **Einfache (Elemente)** setzen und daraus neue GröÙen ableiten, und gelten auch für diese alle Gesetze der **Einigung**.

Beweis: Die Grundformel der **Einigung** ist $a_o(b \circ e) = a \circ b \circ e$, aus dieser sind alle Gesetze der **Einigung** abgeleitet. Diese Formel gilt aber nach 32 auch, wenn wir statt des Einfachen e eine beliebige GröÙe c einführen u. f. w.

Das Gesetz der **Einigung** der GröÙen findet in den Zweigen der Denklehre oder GröÙenlehre, wie der Formenlehre und der logischen Wissenschaften eine überaus reiche Anwendung. In der GröÙenlehre wird es bei der Addition, bei der Multiplikation und auch bei der Potenzirung angewandt. In der Zahlenlehre wird es bei der Addition und bei der Subtraktion, bei der Multiplikation und bei der Division, bei der Potenzirung ff. angewandt. In der Logik wird es bei der Addition und Multiplikation, in der Bindelehre wird es bei der Addition und bei der Multiplikation, und zwar bei den Kombinationen, wie Variationen und ferner bei den Potenzen gebraucht. Es wäre wenig wissenschaftlich, wollte

man daselbe Gesetz 18 bis 20 mal an verschiedenen Stellen ableiten und beweisen, statt es einmal in der Größenlehre abzuleiten und dann nur anzuwenden. Ganz unwissenschaftlich aber ist es, wenn man es gar nicht ableitet, sondern ohne Ableitung und ohne Beweis als selbstverständlich voraussetzt, oder auch statt des Beweises einige nichts beweisende Phrasen giebt, hinter denen man Unwissenschaftlichkeit verstecken will, wie dies gewöhnlich geschieht. Für die Einübung empfiehlt es sich, dies Gesetz für verschiedene Knüpfungszeichen, z. B. $a + (b + c) = a + b + c$ und $a(bc) = abc$ zu beweisen und an Zahlenbeispielen zu erläutern, z. B. dass $8 + (3 + 10) = (8 + 3) + 10$, dass $4 \cdot (5 \cdot 7) = (4 \cdot 5) \cdot 7$ ist. Es wird dadurch das Gesetz anschaulich und tritt lebendiger ins Bewusstsein. Sehr zweckmäßig ist es, bei Geübteren die Grenzen dieses Gesetzes aufzustellen, dass z. B. in der Zahlenlehre zwar $a^{(b \cdot c)} = (a^b)^c$ gilt, dass aber nicht $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ ist. Ein Beispiel für Einigung ohne Vertauschung bieten uns die Geänder oder Variationen in der Bindelehre (Kombinationslehre); denn bei den Geändern ist $a(bc) = abc$, aber nicht $ab = ba$; es gilt also Einigung ohne Vertauschung.

c. Die Vertauschung der Größen.

Erklärung. Die Vertauschung (die mutatio) heist eine 35.
Knüpfung von Größen, sofern ausser der Einigung auch die Vertauschung zweier Einfachen (Elemente) gilt.

Grundformel der Vertauschung. $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ 36.

Zwei Einfache (Elemente) kann man, wenn Vertauschung gilt, mit einander vertauschen.

Für die Vertauschung der Größen muss zunächst bemerkt werden, dass Vertauschung ohne Einigung nichts Neues giebt. Sollte z. B. die Vertauschung zweier Einfachen $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ gelten, aber nicht Einigung: so könnte man in $e_1 \circ e_2 \circ e_3$, wohl $e_1 \circ e_2$ vertauschen, aber nicht $e_2 \circ e_3$, denn stellt man die Klammern her, so ist $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = (e_1 \circ e_2) \circ e_3$, also wird e_2 und e_3 durch eine Klammer getrennt und kann, sofern nicht Einigung gilt, auch nicht vertauscht werden, gilt dagegen Einigung, so kann man die Klammern beliebig setzen, also ist dann $e_1 \circ e_2 \circ e_3 = e_1 \circ (e_2 \circ e_3)$. Hier kann man e_2 und e_3 vertauschen und erhält also $e_1 \circ (e_3 \circ e_2) = e_1 \circ e_3 \circ e_2$. Die Erklärung der Vertauschung wird also die sein müssen, dass nicht nur Einigung, sondern auch ausserdem die Vertauschung zweier benachbarter Einfacher (Elemente) gilt. Bewiesen wird dann das Gesetz der Vertauschung, dass man die Klammer beliebig setzen und weglassen und die Ordnung der Größen beliebig ändern kann ohne Aenderung des Werts des Ergebnisses.

Lehrsatz. Gesetz der Vertauschung.

37.

In jeder Knüpfung beliebiger Größen, für welche Vertauschung gilt, kann man die Klammern beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der zu verknüpfenden Größen beliebig ändern, ohne dass sich

der Wert des Gesamtes ändert, und das Gesamt der Knüpfung ist eine GröÙe, deren Einfache (Elemente) fortschreitend verknüpft sind.

Beweis in Formeln: Der Formelbeweis zerfällt in drei Teile, man muss nämlich beweisen,

- a. dass man eine GröÙe und ein Einfaches vertauschen kann, oder dass $a \circ e = e \circ a$,
- b. dass man zwei GröÙen unter einander vertauschen kann, oder dass $a \circ b = b \circ a$ und
- c. dass bei mehreren GröÙen jede GröÙe eine beliebige Stelle erhalten kann, oder dass $a \circ b \circ c \circ d = a \circ d \circ c \circ b$.

a. Beweis nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Die Gleichung $a \circ e_1 = e_1 \circ a$ gilt, wenn a nur ein Einfaches e_2 enthält, denn $e_2 \circ e_1 = e_1 \circ e_2$ (nach 36).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige GröÙe a gilt (Annahme), so gilt sie auch für die GröÙe $a \circ e_2$, welche ein Einfaches e_2 mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}
 (a \circ e_2) \circ e_1 &= a \circ (e_2 \circ e_1) && \text{(nach 30)} \\
 &= a \circ (e_1 \circ e_2) && \text{(nach 36)} \\
 &= (a \circ e_1) \circ e_2 && \text{(nach 30)} \\
 &= (e_1 \circ a) \circ e_2 && \text{(nach Annahme)} \\
 &= e_1 \circ (a \circ e_2) && \text{(nach 30)}
 \end{aligned}$$

3. Also gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

b. Beweis nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b.

1. Die Gleichung $a \circ b = b \circ a$ gilt, wenn b nur ein Einfaches e enthält (nach 37a).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige GröÙe b gilt (Annahme), so gilt sie auch für jede GröÙe $b \circ e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}
 a \circ (b \circ e) &= (a \circ b) \circ e && \text{(nach 30)} \\
 &= (b \circ a) \circ e && \text{(nach Annahme)} \\
 &= b \circ (a \circ e) && \text{(nach 30)} \\
 &= b \circ (e \circ a) && \text{(nach 37a)} \\
 &= (b \circ e) \circ a && \text{(nach 32)}
 \end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

c. Da Einigung gilt, so kann man die GröÙen zwischen der zu versetzenden GröÙe d und der Stelle, wohin sie versetzt werden soll, in eine Klammer schliessen, dann ist

$$\begin{aligned}
 a \circ b \circ c \circ d &= a \circ [(b \circ c) \circ d] && \text{(nach 33)} \\
 &= a \circ [(c \circ b) \circ d] && \text{(nach 37b)} \\
 &= a \circ [d \circ (c \circ b)] && \text{(nach 37b)} \\
 &= a \circ d \circ c \circ b && \text{(nach 33)}
 \end{aligned}$$

Beweis in Worten: a. Da Vertauschung gilt, so gilt nach 35 auch Einigung, also kann man nach 34 auch die Klammern beliebig setzen oder weglassen, ohne dass sich der Wert des Gesamtes ändert.

b. Man kann aber auch jedes Einfache in jede beliebige Stelle bringen. Denn nach dem Gesetze der Einigung (33) kann man ein beliebiges Einfaches mit seinem benachbarten, z. B. dem vorhergehenden, in eine Klammer schliessen, dann die Einfachen (nach 36) vertauschen und demnächst die Klammer wieder lösen. Auf gleiche Weise kann man dasselbe Einfache wieder mit dem nunmehr benachbarten, z. B. vorhergehenden, in eine Klammer schliessen, wieder die Einfachen vertauschen und dann die Klammer lösen und sofort. Man kann also jedes beliebige Einfache in jede beliebige vorhergehende oder nachfolgende Stelle bringen ohne Aenderung des Wertes.

c. Ebenso kann man jede GröÙe in jede beliebige Stelle bringen, indem man nach der Reihe jedes Einfache der GröÙe ohne Aenderung des Wertes an jene Stelle bringt. Mithin kann man die Ordnung der zu knüpfenden GröÙen beliebig ändern, ohne dass sich der Wert des Gesamtes ändert. Das Gesamt ist nach 34 wieder eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

Satz. In jeder Knüpfung von GröÙen, für welche Vertauschung 38. gilt, kann man statt der Einfachen (der Elemente) auch beliebige, aus diesen erzeugte GröÙen, welche ungleich der nichtigen GröÙe dieser Knüpfung sind, als Einfache (Elemente) setzen und daraus neue GröÙen ableiten, und gelten auch für diese alle Gesetze der Vertauschung.

Beweis: Die Gesetze der Vertauschung sind sämtlich aus den beiden Grundformeln $a \circ (b \circ e) = a \circ b \circ e$ und $e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1$ abgeleitet, diese gelten aber nach 37 auch für beliebige GröÙen, also u. f. w.

Auch der Beweis für das Gesetz der Vertauschung kann selbstredend, wenn er streng wissenschaftlich sein soll, wieder nur fortleitend nach Einfachen oder Elementen, d. h. elementar geführt werden.

Das Gesetz der Vertauschung der GröÙen findet wieder in den Zweigen der Größenlehre, wie der Formenlehre und der Denklehre eine überaus reiche Anwendung. In der Größenlehre wird es bei der Addition, bei der Multiplikation und bei der Potenzirung angewandt. In der Zahlenlehre wird es bei der Addition

und Subtraktion, Multiplikation und Division, Potenzirung ff. gebraucht. In der Logik wird es bei der Addition und Multiplikation, in der Bindelehre bei der Addition, der Multiplikation und Potenzirung der Kombinationen gebraucht. Es wäre wenig wissenschaftlich, wollte man auch hier den Beweis 12 bis 20 mal wiederholen oder gar ihn überschlagen und durch unwissenschaftliche bemäntelnde Phrasen ersetzen, wie dies meistens geschieht. Die strenge Wissenschaft fordert den Beweis hier an dieser Stelle vor den einzelnen Zweigen und findet die Darstellung hierin ihre Begründung und Rechtfertigung. Für die Einübung empfiehlt es sich, dies Gesetz wieder für verschiedene Knüpfungszeichen, z. B. $a + b = b + a$, $ab = ba$ zu beweisen und an Zahlenbeispielen zu erläutern, also dass $7 + 9 = 9 + 7$, dass $7 \cdot 9 = 9 \cdot 7$ ist. Es wird dadurch das Gesetz anschaulich und tritt lebendiger ins Bewusstsein. Für die Geübteren empfiehlt es sich, die Formeln $(a \cdot b)^c = (b \cdot a)^c$, $a^{b+c} = a^c \cdot a^b$, $(a^b)^c = (a^c)^b$ zu üben und nachzuweisen, dass nicht $ab = b^a$ ist.

3. Die beiden Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung.

Bei der Knüpfung gibt es nun zwei grose Gattungen mit überaus abweichenden Gesetzen, sie unterscheiden sich dadurch, dass bei der einen das Gesammt wieder in seine geknüpften Grösen zerlegt oder getrennt werden kann, und die durch diese Trennung erzeugte Gröse nur einen und nicht mehrere Werte hat, dass bei der andern dagegen es mehrere Grösen giebt, welche der Lösung der Knüpfung entsprechen, ja dass es wohl selbst ein ganzes Gebiet solcher Grösen giebt. Wir nennen die erste Gattung die trennbare Knüpfung, die zweite die untrennbare Knüpfung. Die beiden Gattungen der Knüpfung sind es, welche das Denken des Menschen mannigfach und reich gestalten.

Der ersten dieser beiden Gattungen der trennbaren Knüpfung entspricht die Trennung, wo die übrig bleibende Gröse nur einen Wert hat. Der untrennbaren Knüpfung entspricht die Lösung, wo die übrig bleibende Gröse mehrere Werte hat.

Beiden Gattungen der Knüpfung sind gemeinsam einerseits die nicht ändernde Gröse einer Knüpfung, welche mit jeder Gröse in dieser Knüpfung geknüpft werden kann, ohne den Wert derselben zu ändern. Als Beispiele haben wir für dieselbe bei der Addition die Null, denn $a + 0 = a$, bei der Multiplikation die Eins, denn $a \cdot 1 = a$ und bei dem Exponenten auch die 1, denn $a^1 = a$.

Andererseits sind beiden Gattungen gemeinsam die unveränderliche Gröse einer Knüpfung, welche mit jeder Gröse in dieser Knüpfung geknüpft werden kann, ohne dass sich ihr Wert ändert. Als Beispiele haben wir für dieselbe bei der Multiplikation die Null, denn $0 \cdot a = 0$, bei der Base die Eins, denn $1^a = 1$.

Wir werden zuerst diese beiden Grösen behandeln und dann zu den beiden Gattungen der Knüpfung und zu den beiden Gattungen der Zerlegung übergehen.

39. **Erklärung.** Die nicht ändernde Gröse einer Knüpfung heist die Gröse, welche mit jeder Gröse a durch diese Knüpfung ver-

bunden werden kann, ohne dass der Wert dieser Größe a geändert wird.

Das Zeichen der nicht ändernden Größe für die allgemeine Knüpfung ist μ , gelesen *my*.

Es ist höchst wichtig, dass man sich für jede Knüpfung die nicht ändernde Größe merke. Für die Addition oder Fügung ist 0 die nicht ändernde Größe, denn für jede Größe a ist $a + 0 = a$; für die Multiplikation ist 1 die nicht ändernde Größe, denn für jede Größe a ist $a \cdot 1 = a$, für das Potenzieren ist im Exponenten die 1 die nicht ändernde Größe; denn für jede Größe a ist $a^1 = a$.

Satz. $a \circ \mu = a$ $\mu \circ a = a$

40.

Die nicht ändernde Größe einer Knüpfung mit jeder beliebigen Größe a in dieser Knüpfung geknüpft, ändert diese Größe a nicht.

Unmittelbar aus der Erklärung 39.

Erklärung. Die unveränderliche Größe einer Knüpfung 41. heist die Größe, welche mit jeder Größe a durch diese Knüpfung verbunden werden kann, ohne dass ihr eigener Wert verändert wird.

Das Zeichen der unveränderlichen Größe für die allgemeine Knüpfung ist v , gelesen *psilon*.

Es ist auch hier wieder höchst wichtig, dass man für jede Knüpfung die unveränderliche Größe merke. Für die Addition ist Unendlich oder ∞ die unveränderliche, denn für jede Größe a ist $\infty + a = \infty$; für die Multiplikation ist 0 die unveränderliche, denn es ist $0 \cdot a = 0$; für die Potenzierung ist 1 in der Base die unveränderliche, denn es ist $1^a = 1$, ausserdem ist für positiven Exponenten auch 0 in der Base eine unveränderliche, denn dann ist $0^a = 0$.

Satz. $a \circ v = v$ $v \circ a = v$

42.

Die unveränderliche Größe einer Knüpfung bleibt auch, wenn man eine beliebige Größe a in dieser Knüpfung mit ihr knüpft, ganz unverändert.

Unmittelbar aus der Erklärung 41.

Erklärung. Bei der Knüpfung unterscheiden wir zwei Gat- 43. tungen: eine trennbare und eine untrennbare.

Man kann darüber, ob die beiden Gattungen der Knüpfung in die Größenlehre gehören, verschiedener Ansicht sein. Ich selbst habe in meiner Größenlehre von 1872 die Betrachtung der beiden Gattungen von der Größenlehre ausgeschlossen. Als ich jedoch die Bearbeitung der zeichnenden Raumlehre vornahm, welche eine Anwendung der Größenlehre auf den Raum darstellt, erkannte ich, dass die Unterscheidung der beiden Gattungen der Knüpfung bereits in der Größenlehre vorgenommen werden muss, und erweiterte demnach die Größenlehre zunächst nach dieser Richtung.

Erklärung. Die Zerlegung der Knüpfung heist die Verbindung 44.

zweier Größen, durch welche das geknüpfte Gesammt wieder in feine geknüpften Größen zerlegt wird.

Es gibt zwei Gattungen von Zerlegung der Knüpfung: die Trennung und die Lösung, erstre entspricht der trennbaren, letztre der untrennbaren Knüpfung.

Jeder Gattung und Art der Knüpfung entspricht auch eine Gattung und Art der Zerlegung. Wenn zwei oder mehrere Größen zu einem Gesammt geknüpft sind, so kann man diese Knüpfung wieder zerlegen, indem man von dem Gesammt die eine GröÙe wieder wegnimmt. In diesem Falle ist also das Gesammt und eine wegzunehmende GröÙe gegeben und wird die dann übrig bleibende GröÙe gefucht.

Sei z. B. $7 + 8 = 15$ die Knüpfung, so ist $15 - 8 = 7$ die Zerlegung, sei $3 \cdot 5 = 15$ die Knüpfung, so ist $15 : 5 = 3$ die Zerlegung, sei $4^3 = 64$ die Knüpfung, so ist $64^{\frac{1}{3}} = 4$ die Zerlegung.

Bei der Zerlegung ist nun aber groÙe Vorsicht geboten, wenn noch ferner die Gesetze der Größenlehre gelten sollen. In der Größenlehre darf nämlich, wie wir oben feststellten, jede GröÙe nur einen und nicht mehrere Werte haben, beachtet man dies nicht, so gerät man in die bedenklichsten Trugschlüsse. Dies mussten wir schon bei der Erklärung der Knüpfung ins Auge fassen. Wir erklärten daher die Knüpfung so: Die Knüpfung von Größen heist jede Zusammenstellung oder Verbindung von Größen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern das Ergebniss nur einen und nicht mehrere Werte hat.

Ganz entsprechend werden wir nun auch bei der Zerlegung verfahren müssen. Wir nennen die Zerlegung eine Trennung, wenn es nur eine GröÙe a giebt, welche mit derselben GröÙe b geknüpft, das Gesammt c liefert. Nimmt man dann b aus c fort, oder trennt man b von c, so bleibt nur eine GröÙe a übrig; das Ergebniss der Trennung hat dann nur einen und nicht mehrere Werte und gelten dann für die Trennung alle Gesetze der Knüpfung. Namentlich ist dann $(a \circ b) \vee b = a$. Diese Trennung entspricht der trennbaren Knüpfung.

Wenn es dagegen zwei oder mehrere Größen $a_1 \dots a_n$ giebt, welche mit b geknüpft, das Gesammt c geben, so bleiben, wenn man b wieder aus c fortnimmt oder wenn man $c = a \circ b$ zerlegt, n Größen $a_1 \dots a_n$ übrig, von denen jede der Forderung genügt, sei nun \vee das Zeichen dieser Gattung der Zerlegung, so hat $c \vee b$ also n verschiedene Werte und darf dann nicht mehr $a = (a \circ b) \vee b$ gesetzt werden, sondern $(a \circ b) \vee b$ hat dann n Werte $a_1 \dots a_n$ und wollte man also $a = (a \circ b) \vee b$ setzen, so würde es gleich $a_1 \dots a_n$ sein und also nicht mehr eine GröÙe sein, da diese nur einen und nicht mehrere Werte hat bez. haben darf. Tut man es dennoch, so kommt man in die gröÙsten Trugschlüsse. So ist in der Logik für jede GröÙe a stets $a + a = a$, also darf man in der Logik nicht $a - a = 0$ einführen, da man sonst zu groben Trugschlüssen gelangt; es ergibt sich dann beispielsweise, da auch Einigung gilt, $a = a + 0 = a + (a - a) = a + a - a = a - a = 0$, d. h. jede GröÙe der Logik gleich Null; ebenso darf man in der Logik, da in derselben für jede GröÙe a auch $a \cdot a = a$ ist, nicht $a : a = 1$ einführen, da man hier wieder zu Trugschlüssen gelangt; es ergibt sich dann beispielsweise, da auch wieder Einigung gilt, $a = a \cdot 1 = a \cdot (a : a) = a \cdot a : a = a : a = 1$, d. h. jede GröÙe der Logik gleich Eins.

So ist in der Zahlenlehre $a \cdot 0 = 0$, also darf man in der Zahlenlehre nicht $1 = 0 : 0$ einführen, denn es ist dann $a = a \cdot 1 = a \cdot (0 : 0) = (a \cdot 0) : 0 = 0 : 0 = 1$, also jede Zahl gleich eins.

So ist in der Zahlenlehre $(+a)^2 = (-a)^2 = a^2$, also darf man hier nicht die zweite $\sqrt{a^2}$ als GröÙe setzen; denn es wäre dann $+a = \sqrt{a^2} = -a$.

Es werden diese Beispiele hinreichen, um zu zeigen, dass man, wenn es bei der Zerlegung der Knüpfung mehr GröÙen giebt, welche der Zerlegungsaufgabe genügen, die übrig bleibenden GröÙen nicht einander gleich setzen darf. In diesem Falle ist es aber wünschenswert, dass festgestellt werde, welche GröÙen der Aufgabe genügen, und dass diese Feststellung ein einfaches Zeichen habe. Ich führe dafür das Zeichen \cong ein, gelesen entsprechend gleich, es ist also $\sqrt{a^2} \cong \pm a$. Die Zerlegung nenne ich in diesem Falle eine Lösung, das Ergebnis das GelöÙe.

Die ersten, welche eine streng wissenschaftliche Untersuchung über die möglichen Zerlegungen in den einzelnen Ordnungen der Arithmetik und der Ausdehnungslehre vorgenommen haben, sind meines Wissens die Gebrüder Grassmann gewesen. Dieselben haben bereits 1847 die Gesetze ganz in der Form dargestellt, wie sie in H. Grassmanns Arithmetik, Berlin 1861, erschienen sind. Hier ist zuerst in der Wissenschaft bei jeder Art der Trennung zunächst der Beweis geführt, dass es nur eine GröÙe giebt, welche der Aufgabe genügt, und ist zuerst bewiesen, dass man nie durch Null teilen darf.

In R. Grassmanns Formenlehre, Stettin 1872, ist ferner die Subtraktion und die Division für die Logik und für die Kombinationslehre verworfen, welche von andern Gelehrten auch noch nach 1872 angewandt ist, ohne dass diese Gelehrten die Trugschlüsse bemerkt haben, denen sie dadurch verfallen sind und dass hienach alle GröÙen der Logik einerseits gleich Null und andererseits gleich Eins sein müssen, dass also dann kein Gesetz der Logik gilt.

A. Die trennbare Knüpfung und die Trennung der GröÙen.

Erklärung. Die trennbare Knüpfung der GröÙen heist die 45. Knüpfung, wenn es nur eine GröÙe a giebt, welche mit der gegebenen GröÙe b durch diese Knüpfung verbunden dasselbe Gesammt $a \circ b$, bez. dasselbe Gesammt $b \circ a$ giebt, sofern die gegebene GröÙe b ungleich der unveränderlichen GröÙe dieser Knüpfung ist.

Man nennt die unveränderliche GröÙe der Knüpfung daher auch die untrennbare GröÙe der Knüpfung, die andern GröÙen heißen bei der trennbaren Knüpfung trennbare GröÙen.

Es ist die Bedingung, dass die gegebene GröÙe b ungleich der unveränderlichen GröÙe der Knüpfung sein müsse, eine ganz notwendige; denn nach 42 ist $v \circ a = v = v \circ c$, wo a und c ganz beliebige GröÙen sein können. Würde man hier also auch die Trennung zulassen, so würde folgen $a = c$, d. h. jede beliebige GröÙe jeder andern beliebigen GröÙe gleich.

Bei der Addition ist die unendliche GröÙe ∞ die unveränderliche, hier ist also $\infty + a = \infty = \infty + c$; bei der Multiplikation ist Null die unveränderliche, hier ist also $0 \cdot a = 0 = 0 \cdot b$, in der Base ist die Eins die unveränderliche, hier ist $1^a = 1 = 1^b$, ebenso ist im Exponenten die Null die unveränderliche, denn es ist $a^0 = 1^0 = b^0$.

46. **Satz.** Bei trennbarer Knüpfung ist,
wenn $a \circ b = a \circ c$ oder wenn $b \circ a = c \circ a$, wo $a \succ v$ (Annahme)
auch $b = c$ (Folgerung) oder
Je zwei GröÙen (b und c), welche mit derselben GröÙe a durch trennbare Knüpfung verbunden gleiche Gefamnte liefern, sind einander gleich, sofern die GröÙe a der unveränderlichen GröÙe der Knüpfung ungleich ist.

Beweis: Unmittelbar aus 45.

47. **Erklärung.** Die Trennung (die *secretio*) zweier GröÙen heist die Verbindung zweier GröÙen, wenn zu dem gegebenen Gefamnte a und einer gegebenen trennbaren GröÙe b (d. h. einer GröÙe, welche ungleich der unveränderlichen GröÙe dieser Knüpfung ist) die andre GröÙe c gesucht wird, welche mit der gegebenen GröÙe b in entsprechender Weise geknüpft, das Gefamnt a giebt und es zugleich nur eine GröÙe c giebt, welche mit b in dieser Weise geknüpft, das Gefamnt a liefert.

Im Folgenden wird stets bei der Trennung vorausgesetzt, dass die zu trennende GröÙe ungleich der unveränderlichen GröÙe dieser Knüpfung ist.

48. **Erklärung.** Das Zeichen der Trennung ist \smile , gelesen „trenn“. Vor dem Zeichen steht das Gefamnt a , nach demselben die zu trennende GröÙe b . Die zu trennende GröÙe heist der Trenner, die übrig bleibende GröÙe heist das Bleibfel.

49. **Grundformel der Trennung.** $a = a \circ b \smile b$, $a = a \smile b \circ b$.
Eine GröÙe fortschreitend trennbar knüpfen und trennen oder fortschreitend trennen und trennbar knüpfen, ändert den Wert der GröÙe nicht.

Nach der Erklärung 48 ist das Gefamnt $a = c \circ b$, und ist auch $a \smile b = c$, mithin ist, wenn wir den Wert von a einsetzen, $c \circ b \smile b = c$. Nach der Erklärung 48 ist ebenso $a \smile b = c$ und $c \circ b = a$, also, wenn wir den Wert von c einsetzen, $a \smile b \circ b = a$. Die Grundformel enthält also genau das, was in der Erklärung gegeben ist.

50. **Erklärung.** Die TrenngröÙe heist die GröÙe, welche mit a trennbar geknüpft $a \smile b$ giebt.

Das Zeichen der TrenngröÙe ist $(\smile b)$, gelesen „Trenn b “.

Satz. $a \circ (\vee b) = a \vee (\circ b) = a \vee b$ und $a \vee (\vee b) = a \circ (\circ b) = a \circ b$. 51.

Eine TrenngröÙe knüpft man, indem man die entsprechende KnüpfgröÙe trennt und eine TrenngröÙe trennt man, indem man die entsprechende KnüpfgröÙe knüpft und statt eine KnüpfgröÙe zu knüpfen bez. zu trennen, kann man die GröÙe ohne Vorzeichen knüpfen bez. trennen.

Beweis. 1. Es ist $a \circ (\vee b) = a \vee b$. Unmittelbar aus 50.

2. Es ist $a \vee (\circ b) = a \vee (\circ b) \circ b \vee b$ (nach 49)
 $= a \vee (\circ b) \circ (\circ b) \vee b$ (nach 26)
 $= a \vee b$ (nach 49)

3. Es ist $a \vee (\vee b) = a \vee (\vee b) \vee b \circ b$ (nach 49)
 $= a \vee (\vee b) \circ (\vee b) \circ b$ (nach 51.1)
 $= a \circ b$ (nach 49)

Satz. Es giebt den drei Arten der Knüpfung entsprechend drei 52.
 Arten des Trennens: das Antrennen, das Eintrennen und das Abtrennen.

Die drei Arten der Knüpfung, welche wir im zweiten Abschnitt kennen gelernt haben, waren die Anreihung, für welche weder Einigung, noch Vertauschung gilt, die Einigung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung gilt, und die Vertauschung, für welche sowohl Einigung als auch Vertauschung gilt.

Von den drei Arten der Trennung entspricht nun das Antrennen der Anreihung, das Eintrennen der Einigung und das Abtrennen der Vertauschung.

a. Das Antrennen der GröÙen.

Erklärung. Das Antrennen (die *dejunctio*) heist die Tren- 53.
 nung, wenn für die entsprechende Knüpfung nur das Gesetz der Anreihung gilt.

Gesetz des Antrennens. Für das Antrennen gelten nur die 54.
 allgemeinen Gesetze der Trennung; dagegen darf man weder eine Klammer auflösen, noch die Reihenfolge der GröÙen ändern.

Beweis: Da das Antrennen nach 53 eine Trennung ist, so gelten für dieselbe auch die allgemeinen Gesetze der Trennung, d. h. die Sätze 47 bis 51. Da ferner für die entsprechende Knüpfung nach 53 weder Einigung, noch Vertauschung gilt, so darf man keine Klammer auflösen, und darf auch nicht einmal innerhalb einer Klammer die Reihenfolge der GröÙen ändern, noch weniger darf man eine GröÙe in einer Klammer mit einer GröÙe ausser der Klammer vertauschen.

b. Das Eintrennen der Größen.

55. **Erklärung.** Das Eintrennen (die *sejunctio*) heist die Trennung, wenn für die entsprechende Knüpfung die Einigung gilt.
56. **Satz.** In jeder Knüpfung beliebiger Größen, für welche sowohl Einigung, als auch Trennung gilt, kann man jede Knüpfklammer dieser Knüpfung beliebig weglassen oder setzen ohne Aenderung der Vorzeichen und ohne Aenderung des Wertes. Die Ordnung der Größen bleibt dabei unverändert.

Beweis: 1. Es sei die erste GröÙe in der Klammer eine GröÙe ohne Vorzeichen oder eine KnüpfgröÙe, so kann man nach 51 für jede GröÙe, welche in der Klammer zu trennen ist, die entsprechende TrenngröÙe knüpfen. also z. B. statt $a \circ (b \vee c)$ setzen $a \circ (b \circ (\vee c))$. dann sind alle GröÙen in der Klammer nur zu knüpfen und kann man also die Klammer nach 33 weglassen und dann ausser der Klammer wieder statt $\circ(ob)$ nur ob , statt $\circ(\vee b)$ nur $\vee b$ setzen nach 51.

2. Es sei die erste GröÙe in der Klammer eine TrenngröÙe, so kann man nach 56.1 alle folgenden Glieder in der Klammer in eine zweite Klammer schliesen, welche zu knüpfen ist. Die Formel hat dann die Form $a \circ (\vee boc)$. Setzen wir hier $(\vee b) = d$, so ist

$$\begin{aligned}
 a \circ (\vee boc) &= a \circ (doc) && \text{(nach Annahme)} \\
 &= a \circ (doc) \vee c \circ c && \text{(nach 49)} \\
 &= a \circ (doc) \circ (\vee c) \circ c && \text{(nach 51)} \\
 &= a \circ (doc \circ (\vee c)) \circ c && \text{(nach 33)} \\
 &= a \circ (doc \vee c) \circ c && \text{(nach 51)} \\
 &= a \circ doc && \text{(nach 49)} \\
 &= a \circ (\vee b) \circ c && \text{(nach Annahme)} \\
 &= a \vee boc && \text{(nach 51)}
 \end{aligned}$$

57. **Satz.** $b \vee b = \vee boc = \mu$ oder
 Das Gefammt aus der KnüpfgröÙe und der entsprechenden TrenngröÙe und ebenso das Gefammt aus der TrenngröÙe und der entsprechenden KnüpfgröÙe ist in der Eintrennung gleich der nicht ändernden GröÙe.

Beweis: Nach 40 ist $a = a \circ \mu$. Nach 49 und nach 56 ist aber auch $a = a \circ b \vee b = a \circ (b \vee b)$, und $a = a \vee boc = a \circ (\vee boc)$. Mithin ist nach 18 auch $a \circ \mu = a \circ (b \vee b) = a \circ (\vee boc)$. Bei der Trennung giebt es aber nur eine GröÙe, welche mit a geknüpft das gleiche Gefammt giebt, mithin ist auch $\mu = b \vee b = \vee boc$, was zu beweisen war.

58. **Satz.** Statt eine Klammer, welche mehrere Knüpf- bez. TrenngröÙen enthält, einzutrennen, kann man die Vorzeichen der GröÙen

entgegengesetzt nehmen und die so erhaltenen Größen in umgekehrter Reihenfolge fortschreitend knüpfen, oder

Eine Trennklammer kann man, wenn Einigung gilt, nach Entgegensetzung der Vorzeichen aller Größen in der Klammer und, nachdem man die Reihenfolge dieser Größen umgekehrt hat, weglassen oder setzen.

Beweis: 1. Der Satz gilt, wenn in der Klammer nur zwei Größen sind; denn es ist

$$\begin{aligned}
 a \vee (\vartheta b \vartheta c) &= a \vee (o(\vartheta b)c(\vartheta c)) = a \vee ((\vartheta b)o \vartheta c) \quad (\text{nach 52}) \\
 &= a \vee (d o e) \quad \text{wo } d = (\vartheta b) \text{ und } e = (\vartheta c) \\
 &= a \vee (d o e) o d \vee d \quad (\text{nach 49}) \\
 &= a \vee (d o e) o d o e \vee e \vee d \quad (\text{nach 49}) \\
 &= a \vee (d o e) c (d o e) \vee e \vee d \quad (\text{nach 56}) \\
 &= a \vee e \vee d \quad (\text{nach 49}) \\
 &= a \vee (\vartheta c) \vee (\vartheta b) \quad \text{da } e = (\vartheta c) \text{ und } d = (\vartheta b) \\
 &= a \wedge c \wedge b \quad (\text{nach 51})
 \end{aligned}$$

2. Wenn der Satz für n Größen in der Klammer gilt, so gilt er auch für $n + 1$ Größen in der Klammer. Angenommen nun, dass $a \vee (c_1 o c_2 o c_3 \dots o c_n) = a \vee c_n \vee c_{n-1} \vee \dots \vee c_3 \vee c_2 \vee c_1$ und $c_a = (\vartheta b_a)$ gefetzt ist, dann setze $c_1 o c_2 o c_3 \dots o c_n = C$, so ist

$$\begin{aligned}
 a \vee (c_1 o c_2 o c_3 \dots o c_n o c_{n+1}) &= a \vee ((c_1 o c_2 o c_3 \dots o c_n) o c_{n+1}) \\
 &= a \vee (C o c_{n+1}) \\
 &= a \vee c_{n+1} \vee C \quad (\text{nach 58,1}) \\
 &= a \vee c_{n+1} \vee (c_1 o c_2 o c_3 \dots o c_n) \\
 &= a \vee c_{n+1} \vee c_n \dots \vee c_3 \vee c_2 \vee c_1 \\
 &\quad (\text{nach Annahme})
 \end{aligned}$$

Setzen wir hierin wieder $c_a = (\vartheta b_a)$, so wird jede GröÙe $\vee (\vartheta b_a) = \wedge b_a$ nach 32, d. h. das Vorzeichen entgegengesetzt genommen.

Gefetz der Einigung und Eintrennung. In jeder Ver- 59.
bindung von Größen durch Knüpfen mit Einigung oder durch Eintrennung kann man ohne Aenderung des Wertes jede Knüpfklammer unter Beibehaltung der Ordnung ohne Weitres, jede Trennklammer aber erst nach Entgegensetzung der Vorzeichen und nach Umkehr der Reihenfolge aller Größen in der Klammer beliebig weglassen oder setzen.

Beweis: Unmittelbar aus 56 und 58.

Satz. In jeder Knüpfung und Trennung von Größen, für welche 60.
Einigung gilt, kann man statt der Einfachen (Elemente) auch belie-

bige aus diesen durch Knüpfung oder Trennung erzeugte Größen, welche ungleich der nicht ändernden GröÙe dieser Knüpfung sind, als Einfache (Elemente) setzen und daraus neue Größen ableiten und gelten auch für diese alle Gesetze der Einigung und der Trennung.

Beweis: Für die Knüpfung ist der Satz bereits in Nummer 34 bewiesen. Die Gesetze der Trennung gelten aber auch nach 55, wie in den Nummern 56 bis 59 bewiesen, wenn für die Knüpfung die Gesetze der Einigung gelten, also gelten sie auch hier.

c. Das Abtrennen der Größen.

61. **Erklärung.** Die Abtrennung (die disjunctio) heist die Trennung, wenn für die entsprechende Knüpfung die Vertauschung gilt.
62. **Gesetz der Vertauschung und Abtrennung.** In jeder Verbindung von Größen durch Knüpfen mit Vertauschung oder durch Abtrennung kann man ohne Aenderung des Wertes jede Knüpfklammer ohne Weiteres, jede Trennklammer nach Entgegensetzung der Vorzeichen aller Größen in der Klammer beliebig weglassen oder setzen, und die Ordnung der verknüpften Größen beliebig ändern.

Beweis: Die Klammern kann man sämtlich nach 59 wegschaffen, wenn man die richtige Reihenfolge beobachtet. Giebt man dann jeder GröÙe $\vee e$, welche ein Trennzeichen hat, nach 51 die Form $\circ(\vee e)$, so sind dann alle Größen nur zu knüpfen und kann man also nach 37 auch die Ordnung der verknüpften Größen beliebig ändern und der GröÙe $\circ(\vee e)$ dann wieder die Form $\vee e$ geben.

63. **Satz.** In jeder Knüpfung und Trennung von Größen, für welche Vertauschung gilt, kann man statt der Einfachen (Elemente) auch beliebige aus diesen durch Knüpfung oder Trennung erzeugte Größen als Einfache (Elemente) setzen und daraus neue Größen ableiten und gelten auch für diese alle Gesetze der Vertauschung und der Trennung.

Beweis: Für die Knüpfung ist der Satz bereits in 38 bewiesen. Wenn aber die Gesetze der Vertauschung für die Knüpfung gelten, so gelten nach 61 auch die Gesetze der Abtrennung, also auch hier.

64. **Erklärung.** Die untrennbare Knüpfung der Größen heist die Knüpfung, wenn es mehrere Größen a_1, a_2, \dots giebt, welche mit der gegebenen GröÙe b durch diese Knüpfung verbunden dasselbe Gesammt $a_1 \circ b$, bezüglich dasselbe Gesammt $b \circ a_1$, geben, sofern die gegebene GröÙe b ungleich der unveränderlichen GröÙe dieser Knüpfung ist.

Auch hier muss die Bedingung hinzugefügt werden, wenn $b \geq v$ ist, denn wenn $b = v$ ist, so lässt sich gar nicht erkennen, ob die Knüpfung trennbar oder

untrennbar ist, da in beiden Fällen für je zwei beliebige Größen a und b nach 42 auch $r \circ a = r \circ b$ ist.

Erklärung. Die Lösung (die lysis) zweier Größen heist die 65. Verbindung zweier Größen, wenn zu dem gegebenen Gesamte a und einer gegebenen GröÙe b alle die Größen $c_1, c_2 \dots c_n$ gefucht werden, welche mit der gegebenen GröÙe b in entsprechender Weise geknüpft, das Gesamt a geben und es zugleich mehr als eine solche GröÙe c_1 giebt, welche dieser Forderung genügt.

Erklärung. Das Zeichen der Lösung ist \sim , gelesen „los“. 66. Vor dem Zeichen steht das Gesamt a , nach demselben die zu löfende GröÙe b . Die zu löfende GröÙe heist der Löfer; die Gesamtheit der Größen, welche der Aufgabe genügen, heist das GelöÙ, jede einzelne dieser Größen heist eine Wurzel.

Beispiel aus der Zahlenlehre: $(a^*)^{\frac{1}{4}}$ hat die vier Werte $+a, -a, +ai, -ai$, die GröÙe $a0:0$ hat die unendlich vielen Werte von Null bis $+\infty$.

Beispiel aus der Logik: Die GröÙe, welche mit b gefügt $a + b$ giebt, hat die Werte $a + x(a + b)$, die GröÙe, welche mit b multipliziert $a \cdot b$ giebt, hat die Werte $a + x(a + b)$.

Der Name die Wurzel (die radix) ist für die einzelnen Werte, welche der Lösungsaufgabe $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ entsprechen, bereits allgemein in Gebrauch. Diesen Namen nehme ich hier auf und erweitere die Bedeutung auf jeden Wert eines GelöÙes.

Erklärung. Das GelöÙ kann dem Gesamte nach Lösung des 67. Löfers nur entsprechend gleich gesetzt werden. Das Zeichen hierfür ist \cong , gelesen „entsprechend gleich“. Beim GelöÙ werden die entsprechenden Werte in scharfe Klammer gesetzt.

Beispiele: $(a^*)^{\frac{1}{4}} \cong [\pm a, \pm ai]$ $a \cdot 0:0 \cong \text{Med. } [+ \infty, - \infty]$.

Satz. Für die Lösung gilt kein Gesetz der Größenlehre, da das 68. GelöÙ nicht einen, sondern mehrere Werte hat. Die Lösung kann erst dann angewandt werden, wenn die Lösung so bestimmt ist, dass jedem Werte der Lösung auch nur ein bestimmter Wert des GelöÙes entspricht.

Beispiel: $\sqrt[n]{a^n}$ hat bekanntlich n Werte. und es ist

$$\sqrt[n]{a^n} = a \left(\cos \frac{2a\pi}{n} + i \sin \frac{2a\pi}{n} \right). \text{ Ebenso hat das Integral}$$

$\int ax^2$ bekanntlich eine ganz willkürliche Konstante w und es ist $\int ax^2 = w + \frac{1}{3}ax^3$. Hier muss in jedem einzelnen Falle der Wert der willkürlichen Konstante w bestimmt werden und hat dann das Integral einen ganz bestimmten Wert.

Da man mit dem Gelöfe nicht weiter knüpfen kann, so scheint es, als habe das Gelös für die strenge Denklehre oder für die Formenlehre und für die logischen Wissenschaften keinen Wert; dem ist aber nicht so. Es ist in vielen Fällen sehr wichtig zu wissen, welcher Größenkreis einer bestimmten Aufgabe Genüge leistet und dies ermittelt gerade die Lösung. Wir werden die Lösung in vielen Fällen auftreten sehen und die Wichtigkeit kennen lernen, welche dieselbe für die Wissenschaft hat. Dagegen giebt es auch andre Gelöfe, welche stets ganz unbestimmt bleiben, so z. B. $\frac{1}{0}$; mit diesen Gelöfen darf man dann gar nicht rechnen.

4. Die Beziehung zweier Knüpfungen.

Wir haben bisher immer nur eine einzelne Knüpfung für sich betrachtet, ohne in einer Formel die eine Knüpfung mit einer andern Knüpfung in Beziehung zu setzen. In dieser Nummer werden wir nun die Beziehung zweier Knüpfungen kennen lernen und dadurch die niedrigste und die nächsthöhere Ordnung der Größenknüpfung gewinnen.

Eine Beziehung nennen wir es, wenn bei einer Knüpfung von Größen jedes Einfache der einen Gröse mit der andern Gröse zu knüpfen ist, z. B.

$$3 \cdot 8 = (1 + 1 + 1) \cdot 8 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8.$$

Wir haben hier zwei Knüpfungen: eine niedere $1 + 1 + 1$ und eine höhere $3 \cdot 8$.

69. **Erklärung der Fügung.** Die Fügung oder Addition (gr. die próthesis, lat. die additio) heist die niedrigste Knüpfung der Größen, für welche es keine Beziehung zu einer noch niederen Knüpfung giebt.

Das Stück (der summandus) heist die zu fügende Gröse.

Die Summe (die summa) heist das Gefammt der Fügung.

Die Einfachgrößen (die Elementargrößen) heissen die Einfachen (die Elemente) und die durch fortschreitende Fügung derselben erzeugten Größen.

70. **Erklärung.** Das Zeichen der Fügung ist ein stehendes Kreuz $+$, gelesen „plus“ oder „zu“. Eine Gröse mit einem Kreuz als Vorzeichen heist eine Plusgröse. Eine Gröse ohne Vorzeichen ist gleich der Plusgröse oder $a = +a$. Eine Klammer, vor welcher das Kreuz $+$ steht, heist eine Plusklammer. Das Zeichen der Summe von n Größen a_1, a_2, \dots, a_n ist $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Wenn kein Anfangszeichen unter dem Summenzeichen steht, so beginnt die Reihe mit a_0 oder $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Die Fügung (die additio) ist also die niedrigste Ordnung der Größenlehre, wie des Denkens überhaupt. In ihr werden die vom Geiste gesetzten Einfachen (die Elemente) an einander geknüpft, daraus die Größen gebildet und diese weiter

mit einander geknüpft, aber so, dass keine Beziehung zu einer noch niederen Ordnung der Knüpfung gilt.

Erklärung. Die nicht ändernde Gröse der Fügung heist Null. 71.
Das Zeichen der Null ist 0.

Die Null ist also diejenige Gröse, welche zu jeder Gröse gefügt werden kann, ohne den Wert derselben zu ändern; oder

Die Knüpfung, für welche Null die nicht ändernde Gröse ist, ist die Fügung oder die Addition.

Eine unveränderliche Gröse für die allgemeine Fügung giebt es nicht, sofern man nicht die unendliche Gröse, deren Zeichen ∞ ist, in die Fügung einführen will.

Satz. $a + 0 = a$ $0 + a = a$ 72.

Null zu jeder Gröse gefügt, ändert die Gröse nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 71.

Satz. Es giebt drei Arten der Fügung: 1. die Anfügung, 73.
für welche weder Einigung noch Vertauschung der Stücke gilt, 2. die Einfügung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Stücke gilt und 3. die Zufügung, für welche sowohl Einigung, als auch Vertauschung der Stücke gilt.

Man könnte hier für die verschiedenen Gattungen der Fügung verschiedene Namen einführen und würden sich in dem Falle die folgenden Namen empfehlen:

Allgemeines Fügen. Aeuseres Fügen. Inneres Fügen.

Fürs Fügen:	Reihen.	Fügen.	Stellen.
Anfügen:	Anreihen.	Anfügen.	Anstellen.
Einfügen:	Einreihen.	Einfügen.	Einstellen.
Zufügen:	Zureihen.	Zufügen.	Zustellen.

Ich halte dies aber für überflüssig. Der Name Fügen ist ganz allgemein und kann für alle Zweige verwandt werden. Welche Gattung der Fügung gemeint ist, das ergibt sich leicht aus den Sätzen, wenn gesagt wird, was gefügt werden soll. In der Logik und in der Kombinationslehre nennt man übrigens bereits das Fügen allgemein ein Aufstellen und redet vom Aufstellen der Gebinde oder Kombinationen, vom Aufstellen der Geänder oder Variationen u. s. w. Dies kann man zur Unterscheidung beibehalten.

Erklärung der Anfügung. Die Anfügung (die additio im 74. weiten Sinne) heist die Fügung, sofern für die Grösen derselben weder Einigung noch Vertauschung gilt.

Die Anfügung ist die einzige Form der Fügung, bei welcher jede einzelne Ordnung und Klammerfetzung von jeder andern verschieden und nur sich selbst gleich ist. Bei der Anfügung ist nicht nur $a + b \neq b + a$, sondern auch $a + b + c \neq a + (b + c)$.

Jedes wissenschaftliche System, selbst jedes Wörterbuch giebt uns ein Beispiel der Anfügung; ebenso jedes Buch, wo die Folge und die Zusammenordnung der Gedanken eine feste ist, für welche weder Vertauschung noch auch nur Einigung gilt.

75. **Gesetz der Anfügung.** In jeder Knüpfung durch Anfügung darf man weder eine Klammer lösen, noch die Reihenfolge der Größen ändern; auch giebt es für diese Art der Knüpfung keine höhere Ordnung der Knüpfung.

Beweis: Da nicht Einigung gilt, so darf man keine Klammer lösen; da nicht Vertauschung gilt, so darf man auch innerhalb einer Klammer nicht einmal die Reihenfolge der Größen ändern; noch weniger darf man eine Größe in einer Klammer mit einer Größe ausser der Klammer vertauschen. Endlich giebt es auch für das Anfügen nicht eine Knüpfung höherer Ordnung; denn für jede Knüpfung höherer Ordnung muss das Beziehungsgesetz zur niederen Knüpfung gelten; dies aber erfordert, wie wir demnächst sehen werden, die Einigung für die niedere Knüpfung. Da nun für die Anfügung keine Einigung gilt, so giebt es auch für die Anfügung keine höhere Ordnung der Knüpfung.

76. **Erklärung der Einfügung.** Die Einfügung (die additio im mittlern Sinne) heist die Fügung, sofern für dieselbe die Grundformel der Einigung gilt.

77. **Grundformel der Einfügung (der additio im mittlern Sinne).**

$$a + (b + e) = a + b + e$$
oder in Worten
Statt zu dem zweiten Stücke ein Einfaches (ein Element) zu fügen, kann man es zur Summe fügen und: Statt zu der Summe ein Einfaches zu fügen, kann man es zu dem zweiten Stücke fügen.

78. **Gesetz der Einfügung (der additio im mittlern Sinne).** In jeder Knüpfung der Größen durch Einfügung kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern beliebig setzen oder weglassen. Die Summe ist wieder eine Einfachgröße (eine Elementargröße).

Beweis: Nach 77 gilt die Grundformel der Einigung, also nach 30 bis 34 auch das Gesetz der Einigung, d. h. man kann die Klammern beliebig setzen oder weglassen, und das Ergebniss ist wieder eine Größe, deren Einfache fortschreitend gefügt sind, d. h. nach 69 eine Einfachgröße (eine Elementargröße).

79. **Erklärung der Zufügung.** Die Zufügung (die additio im engen Sinne) heist die Fügung, sofern für dieselbe ausser der Grundformel der Einigung auch die Grundformel der Vertauschung gilt.

80. **Grundformel der Zufügung (der peradditio oder der additio im engen Sinne).**

$$e_1 + e_2 = e_2 + e_1$$

Bei der Zufügung kann man zwei Einfache (zwei Elemente) vertauschen.

Gefetz der Zufügung (der additio im engen Sinne). In jeder 81. Knüpfung der Größen durch Zufügung kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern, die Summe ist wieder eine Einfachgröße (eine Elementargröße).

Beweis: Nach 77 und 78 gilt für jede Zufügung zunächst das Gefetz der Einfügung oder der Einigung, d. h. man kann ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern beliebig setzen oder weglassen, und die Summe ist wieder eine Einfachgröße. Nach 79 und 80 gilt ferner die Grundformel der Vertauschung, also gilt nach 36 bis 38 auch das Gefetz der Vertauschung, d. h. man kann ohne Aenderung des Wertes die Ordnung der Stücke beliebig ändern. Mithin gilt das ganze Gefetz der Zufügung.

Erklärung des Webens. Das Weben (die multiplicatio) heist 82. die mittlere Ordnung der Größenknüpfung, für welche das Gefetz der einfachen Beziehung zur Fügung gilt, d. h. statt die Summe einer Größe und eines Einfachen mit einer andern Größe zu weben, kann man die beiden Größen mit einander weben und ebenso das Einfache mit der andern Größe weben und die Ergebnisse fügen.

Die Bedingung ist, dass für das Fügen wenigstens Einfügen gilt und dass ein Einfaches (Element) mit einem Einfachen gewebt wieder ein Einfaches giebt.

Was die beiden Bedingungen betrifft, so muss zunächst festgestellt werden, was e_1, e_2 sein soll, wo ein Einfaches mit einem Einfachen gewebt ist. Ist dies wieder eine Größe und zwar ein Einfaches, welches nur einen Wert hat, so kann man weiter damit knüpfen, ist es nicht ein Einfaches, sondern hat es mehrere Werte, so gilt für die Webung kein Gefetz der Größenknüpfung.

Ebenso wenn für die niedere Knüpfung Einigung gilt, so dass $a + b + e = a + (b + e)$ ist, dann gilt, wie in Satz 86 ff. bewiesen wird, das ganze Gefetz der Beziehung, gilt dagegen für die niedere Knüpfung keine Einigung, so gilt auch nicht Satz 86, noch irgend ein andrer Satz der Beziehung.

Für das Weben empfiehlt es sich, diese Erklärung zunächst an einigen Beispielen klar zu machen, z. B.

$$(7 + 1) 5 = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \text{ oder } 8 \cdot 5 = 7 \cdot 5 + 1 \cdot 5.$$

$$7 (8 + 1) = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 1 \text{ oder } 7 \cdot 9 = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 1.$$

$$(a + 1) m = am + 1m \text{ und } a (m + 1) = am + a1.$$

Es wird zweckmäßig sein, dies bis zur vollsten Anschaulichkeit der Erklärung am kleinen Einmaleins einzutüben, z. B.

$$2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 3 + 3 = 6; \quad 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 6 + 3 = 9; \\ 4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9 + 3 = 12 \text{ u. f. w.}$$

Und ebenso

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6; \quad 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8 \text{ u. f. w.}$$

Die Erklärung bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die so eben gegebene Erklärung ist die allein scharfe und streng wissenschaftliche und zugleich die einfachste (die elementarste). Aus ihr lässt sich das ganze Beziehungsgezet ableiten. Andererseits enthält diese Erklärung aber auch nicht mehr, als unumgänglich nötig ist, um das Beziehungsgezet daraus ableiten zu können.

Endlich ist diese Erklärung auch allein einfach (elementar). Der Lehrer, welcher im Rechenunterrichte die Kinder das Gezet der Beziehung beim Vervielfachen (beim Multiplizieren) lehrt, wo bekanntlich die 1 das Einfache ist, zeigt den Kindern, dass einmal zwei zwei ist, und fährt dann fort: Zweimal zwei ist einmal zwei und einmal zwei, einmal zwei ist zwei und noch einmal zwei ist wieder zwei, zwei und zwei ist vier, also ist zweimal zwei auch vier. Dreimal zwei ist zweimal zwei und einmal zwei, zweimal zwei ist vier, einmal zwei ist zwei, vier und zwei ist sechs, also ist dreimal zwei auch sechs. Viermal zwei ist dreimal zwei und einmal zwei, dreimal zwei ist sechs, einmal zwei ist zwei, sechs und zwei ist acht, also ist viermal zwei auch acht u. f. w. Die Erklärung ist also ganz einfach (elementar).

Das Weben (die multiplicatio) ist die mittlere Ordnung der Größenknüpfung. Sie setzt die Knüpfung der Einfügung, bez. der Zufügung und die in dieser Knüpfung erzeugten Größen bereits voraus, und erzeugt die Größen der mittleren Ordnung durch Beziehung nach den Formeln $(a + b) c = ac + bc$ und $a (b + c) = ab + ac$.

Das Weben oder die mittlere Ordnung der Knüpfung, für welche das Gezet der einfachen Beziehung zur Knüpfung erster Ordnung, der Fügung oder additio, gilt, wird in der Zahlenlehre das Multiplizieren oder Vervielfachen genannt. Für die Zahlenlehre behalte ich diesen Ausdruck, da er für die Zahlen sehr gut passt, bei. Dagegen passt dieser Ausdruck gar nicht für die andern Zweige der Größenknüpfung. So z. B. ist es ganz unpassend, vom Vervielfachen der Begriffe in der Logik oder vom Vervielfachen der Aufstellungen in der Kombinationslehre, oder auch nur vom Vervielfachen der Größen in der Ausdehnungslehre zu sprechen. Man würde durch solche Ausdrücke die gefährlichsten Missverständnisse herbeiführen. Der Ausdruck „vervielfachen“ eignet, wie gesagt, nur der Zahlenlehre; für die Größenlehre und für die andern Zweige der Größenknüpfung bedarf man demnach neuer Ausdrücke.

In der Größenlehre von 1872 habe ich für diese mittlere Ordnung der Knüpfung den Namen „Weben“ in die Wissenschaft eingeführt, der die Eigentümlichkeit dieser Knüpfungsart sehr passend bezeichnet; denn wie beim Weben der Fäden jeder Faden des Aufzugs mit jedem Faden des Einschlags verbunden oder geknüpft wird, so wird bei der mittlern Ordnung der Knüpfung jedes Stück des einen Faches oder Faktors mit jedem des andern geknüpft. Das folgende Beispiel giebt uns ein klares Bild der Sache.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
α	aa	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	ak	al
β	βa	βb	βc	βd	βe	βf	βg	βh	βi	βk	βl
γ	γa	γb	γc	γd	γe	γf	γg	γh	γi	γk	γl
δ	δa	δb	δc	δd	δe	δf	δg	δh	δi	δk	δl
ϵ	ϵa	ϵb	ϵc	ϵd	ϵe	ϵf	ϵg	ϵh	ϵi	ϵk	ϵl
ζ	ζa	ζb	ζc	ζd	ζe	ζf	ζg	ζh	i	ζk	ζl

Um aber auch auszudrücken, dass das Weben hier dasselbe bezeichnet, was man gewöhnlich ein Multiplizieren nennt, so füge ich den lateinischen Namen *multiplicare* hinzu. Zwar passt dieser Name eigentlich auch nur für die Zahlenlehre; aber man ist gewöhnt, die lateinischen Namen vieldeutig zu gebrauchen und bald dies, bald jenes darunter zu verstehen; es ist also auch erlaubt, den Namen *multiplicare* so zu behandeln. Der deutsche Name „weben“ ist dann der eindeutige, streng wissenschaftliche, der lateinische der erläuternde, auf die Knüpfungsart der Zahlenlehre hindeutende.

Von dem Weben giebt es nun übrigens in den verschiedenen Zweigen sehr verschiedene Gattungen: in der Zahlenlehre das Vervielfachen, für welches $1 \cdot 1 = 1$ ist, in der Ausdehnungslehre das Flachen, für welches $ee = 0$ und $e_a e_b = -e_b e_a$ ist, und das innre Weben, für welches $e_a e_b = 0$ und $ee = 1$ ist, in der Logik das Bestimmen, für welches $ee = e$ und $e_a e_b = 0$ ist, und in der Kombinationslehre das Binden der Geschiede (der Komplexionen), für welches $e_a e_b = e_b e_a$ ist, wobei entweder $aa = 0$, oder $aa \geq 0$ gesetzt wird und das Binden der Geänder (der Variationen), für welches $e_a e_b \geq e_b e_a$ ist, wobei wieder entweder $aa = 0$, oder $aa \geq 0$ gesetzt wird.

Hier ist es also unerlässlich, die verschiedenen Arten des Webens zu unterscheiden und verschiedene unterscheidende Namen für die einzelnen Gattungen einzuführen.

Erklärung. Das Zeichen des Webens ist ein Punkt oder 83. das bloße Nebeneinanderschreiben der zu webenden Größen, z. B. $a \cdot b$ oder ab gelesen a mal b oder ab.

Die zu webende Größe heist der Fach (der factor), das Gesamt- des Webens heist das Zeug (das productum). Eine Größe, vor der ein Malzeichen steht, heist eine Malgröße.

Der Name der Fach stammt vom Urverb pak. sskr. pac ; lat. pac . goth. fahan , nhd. fahan , fangen in der Bedeutung fange, binde, dann fange an, mache.

Der Fach ist also ein Gerät zum Fangen, zum Aufnehmen; dann in den Zusammensetzungen „einfach, zehnfach, hundertfach, das Vierfache“ etc. zur Bezeichnung der Faktoren allgemein üblich, mithin echt deutsch.

Der Name das Zeug stammt vom Urverb tagh, tangh, askr. taksh, gr. τεύχῃ tyn-chánō, étych-on erzeuge, wirke, téch-né Kunst, lat. texo webe, ahd. ziugan. nhd. zeugen, erzeugen, weben, davon Zeug, ahd. ziuc, schwd. tyg, das Gewebe. das Gerät.

84. **Erklärung.** Die Klammer heist eine Malklammer, wenn die Grösen in und ausser der Klammer durch Weben geknüpft sind; sie heist eine Beziehungsklammer, wenn die Grösen in der Klammer durch Fügen, diese Klammer aber mit der Gröse ausser der Klammer durch Weben geknüpft sind.

Beispiele: Malklammer $a(bc)$; Beziehungsklammer $a(b+c)$, $(a+c)b$, $(a+b)(c+d)$.

Beim Weben oder Multiplizieren ist es wichtig, auf das Gesetz zu achten, welche Klammer ohne Aenderung des Wertes fortgelassen werden kann. In jeder einfachen Knüpfungsart können die Klammern fortgelassen werden, wenn fortschreitend geknüpft wird: so ist $(a+b)+c = a+b+c$ und $(ab)c = abc$. Wenn dagegen zwei Knüpfungsarten gemengt sind, so muss, sofern keine Klammer steht, zunächst erst die höhere Knüpfung ausgeführt werden, ehe die niedere Knüpfung ausgeführt wird, so ist $a+bc = a+(bc)$, $ab+c = (ab)+c$, $ac+bd = (ac)+(bd)$.

85. **Erklärung.** Jedes Formelzeichen (Funktionszeichen), welches sich auf die folgenden Grösen bezieht, muss, sofern keine Klammer steht, auf alle folgenden Grösen desselben Gliedes bezogen werden. Soll das Formelzeichen sich nicht auf alle diese Grösen beziehen, so muss es mit den Grösen, auf welche es sich beziehen soll, in eine Klammer geschlossen werden.

Es ist diese Regel von allergröster Wichtigkeit zur Vermeidung unnützer Klammern; man kann durch Beobachten derselben etwa 90 % der sonst erforderlichen Klammern ersparen. Wir werden gleich in den folgenden Sätzen 87 bis 89 die Anwendung dieser Regel kennen lernen.

86. **Grundformel des Webens (der Multiplikation).**

$$(a+e)b = ab+eb, \quad a(b+e) = ab+ae \text{ und } e_1e_2 = e$$

Statt zu dem einen Fache (dem einen Faktor) ein Einfaches zu fügen, kann man zu dem Zeuge der beiden Fache das Zeug des Einfachen mit dem andern Fache fügen und

Das Zeug oder Produkt zweier Einfachen ist wieder ein Einfaches.

Aus dieser Grundformel folgen nun die Gesetze der einfachen Beziehung oder des Webens durch fortleitende (induktorische) Beweise.

87. **Satz.** Das Zeug oder Produkt ae und eb eines Einfachen (eines Elementes) und einer Einfachgröse ist wieder eine Einfachgröse, d. h. eine Gröse, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

Beweis nach Einfachen (elementar) in Bezug auf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält; denn $e_1 e_2$ ist ein Einfaches (nach 86).
2. Wenn der Satz für a gilt (Annahme), so gilt er auch für die GröÙe $a + e_1$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn es ist $(a + e_1)e = ae + e_1 e$ (nach 86). Nun ist ae eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind nach der Annahme, $e_1 e$ ist ein Einfaches (nach 86) und fortschreitend geknüpft, also ist auch $ae + e_1 e$ eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.
3. Also gilt der Satz nach 24 auch allgemein.

Und ebenso folgt, dass eb. eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

Satz. Das Zeug oder Produkt ab zweier EinfachgröÙen ist wieder 88. eine EinfachgröÙe, d. h. eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind und gelten für die Zeuge alle Gesetze der Einfügung.

Beweis nach Einfachen (elementar) in Bezug auf b.

1. Der Satz gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 87).
2. Wenn der Satz für eine beliebige GröÙe b gilt (Annahme), so gilt er auch für die GröÙe $b + e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn nach 86 ist

$$a(b + e) = ab + ae.$$

Hier aber ist ab eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind (nach Annahme) und ae eine ebenfolche GröÙe (nach 87); die Summe zweier GröÙen, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind, ist aber nach 78, wenn Einfügung gilt, wieder eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind, also ist auch $a(b + e)$ eine GröÙe, deren Einfache fortschreitend geknüpft sind.

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $(a + b)c = ac + bc$

89.

$$c(a + b) = ca + cb$$

oder in Worten

Das Zeug oder Produkt einer GröÙe mit einer Summe aus 2 GröÙen ist gleich der Summe aus den Zeugen jener GröÙe mit den beiden GröÙen.

Formelbeweis: Nach Einfachen (elementar) in Bezug auf b.

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 86).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige GröÙe b gilt (Annahme),

so gilt sie auch für die GröÙe $b + e$, welche ein Einfaches e mehr enthält; denn

$$\begin{aligned}
 [a + (b + e)]c &= [(a + b) + e]c && \text{(nach 77)} \\
 &= (a + b)c + ec && \text{(nach 86)} \\
 &= ac + bc + ec && \text{(nach Annahme)} \\
 &= ac + (bc + ec) && \text{(nach 77)} \\
 &= ac + (b + e)c && \text{(nach 86)}
 \end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Und ebenso folgt $c(a + b) = ca + cb$.

90. Satz.

$$(\sum_{1,n} a_i)b = \sum_{1,n} a_i b \quad \text{oder} \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \dots + a_n b$$

$$b(\sum_{1,n} a_i) = \sum_{1,n} b a_i \quad \text{oder} \quad b(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b a_1 + b a_2 + \dots + b a_n$$

Das Zeug oder Produkt einer GröÙe mit einer Summe aus beliebigen vielen GröÙen ist gleich der entsprechenden Summe aus den Zeugen jener GröÙe mit diesen einzelnen GröÙen oder —

Eine Beziehungsklammer löst man, indem man jede GröÙe in der Klammer mit der GröÙe ausser der Klammer webt und die entstandenen Zeuge einfügt.

Beweis in Formeln fortleitend (induktorisch) in Bezug auf $\sum_{1,n} a_i$.

1. Der Satz gilt, wenn die Summe $\sum_{1,n} a_i$ nur 2 GröÙen $a_1 + a_2$ enthält, nach 89.

2. Wenn der Satz für eine Summe $\sum_{1,n} a_i$ aus n GröÙen gilt (Annahme), so gilt er auch für die Summe $\sum_{1,n+1} a_i$, welche eine GröÙe a_{n+1} mehr enthält (Folgerung); denn

$$[\sum_{1,n+1} a_i]b = [(\sum_{1,n} a_i) + a_{n+1}]b \quad \text{(nach 14)}$$

$$= (\sum_{1,n} a_i)b + a_{n+1}b \quad \text{(nach 89)}$$

$$= (\sum_{1,n} a_i b) + a_{n+1}b \quad \text{(nach Annahme)}$$

$$= \sum_{1,n+1} a_i b \quad \text{(nach 14)}$$

3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

Und ebenso folgt, dass $b[\sum_{1,n} a_i] = \sum_{1,n} b a_i$ ist.

Beweis in Worten: Man stelle in der Summe nach 78, da Einfügung gilt, alle Klammern her, so ist jede Summe eine Summe aus 2 GröÙen. Das Zeug einer GröÙe b mit dieser Summe ist gleich der Summe aus den beiden Zeugen jener GröÙe b mit den beiden einzelnen GröÙen. Ist nun eine der beiden GröÙen noch eine Summe, so ver-

wandelt sich ganz auf dieselbe Weise das Zeug jener GröÙe b mit dieser Summe wieder in die Summe zweier Zeuge jener GröÙe b mit den einzelnen GröÙen und sofort, bis keine der GröÙen mehr eine Summe anderer GröÙen ist und also das Ganze in eine Summe aus den Zeugen der GröÙe b und der einzelnen GröÙen umgewandelt ist.

$$\text{Satz. } (S_{1,n} a_a)(S_{1,m} b_b) = S_{1,n,1,m} a_a b_b \text{ oder} \quad 91.$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_m) &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_m \\ &\quad + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_2 b_m \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_n b_1 + a_n b_2 + \dots + a_n b_m \end{aligned}$$

Das Zeug (das Produkt) zweier Summen erhält man, indem man jede GröÙe der einen Summe mit jeder der andern Summe webt und die erhaltenen Zeuge einfügt. Die erhaltene Summe ist wieder eine GröÙe, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft sind.

Beweis in Formeln: Wir setzen $S_{1,m} b_b = B$, dann ist

$$\begin{aligned} (S_{1,n} a_a)(S_{1,m} b_b) &= (S_{1,n} a_a) B = S_{1,n} a_a B && \text{(nach 90)} \\ &= S_{1,n} a_a (S_{1,m} b_b) && \text{(nach Setzung)} \\ &= S_{1,n,1,m} a_a b_b \end{aligned}$$

Da $a_a (S_{1,m} b_b) = S_{1,n} a_a b_b$ ist nach 90, wo 1_m sich auf b bezieht.

Beweis in Worten: Man betrachte zuerst die zweite Summe als eine GröÙe, so ist das Zeug der beiden Summen gleich der Summe aus den Zeugen, welche man erhält, wenn man jede GröÙe der ersten Summe mit der ganzen zweiten Summe webt (nach 90). Und jedes solche Zeug ist gleich der Summe der Zeuge, welche man erhält, wenn man die betreffende GröÙe der ersten Summe mit jeder GröÙe der zweiten Summe webt. Die erhaltene Summe aber ist nach 88 wieder eine GröÙe, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft sind.

$$\text{Satz. } (S_{1,n} a_a)(S_{1,m} b_b)(S_{1,p} c_c) \dots = S_{1,n,1,m,1,p} a_a b_b c_c \dots \quad 92.$$

Das Zeug (das Produkt) mehrerer Summen erhält man, indem man jede GröÙe der ersten Summe mit jeder der zweiten Summe webt, jedes erhaltene Zeug mit jeder GröÙe der dritten Summe webt u. f. w. und die erhaltenen Zeuge einfügt. Die erhaltene Summe ist wieder eine GröÙe, deren Einfache (deren Elemente) fortschreitend geknüpft sind.

Beweis: Man schliesse zuerst die ersten beiden Fache in eine Klammer

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{1,n} a_a) (\mathcal{S}_{1,m} b_b) (\mathcal{S}_{1,p} c_c) \dots &= [(\mathcal{S}_{1,n} a_a) (\mathcal{S}_{1,m} b_b)] (\mathcal{S}_{1,p} c_c) \dots \\
 &= ([\mathcal{S}_{1,n,1,m} a_a b_b] (\mathcal{S}_{1,p} c_c)) \dots \quad (\text{nach 91}) \\
 &= (\mathcal{S}_{1,n,1,m,1,p} a_a b_b c_c) \dots \quad (\text{nach 91})
 \end{aligned}$$

u. f. w.

Es empfiehlt sich, bei jedem der Sätze eine Uebung der Beziehung namentlich bei der Multiplikation vorzunehmen, um die Anschauung an Zahlenbeispielen zu gewinnen.

93. **Gefetz des Webens (der Multiplikation).** In jeder Größenknüpfung durch Weben (durch Multiplikation) kann man ohne Aenderung des Wertes jede Plusklammer beliebig setzen oder weglassen und jede Beziehungsklammer auflösen,

indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem des andern webt und die Zeuge einfügt; das Ergebniss ist wieder eine EinfachgröÙe (eine ElementargröÙe).

Beweis: Nach 92 gilt das Gefetz der Beziehung, wie es in dem Satze ausgesprochen ist, und da ausserdem Einfügung gilt, so kann man nach 78 auch die Plusklammer beliebig setzen oder weglassen.

Für das Weben empfiehlt sich zunächst und vor allem die Einübung des Beziehungsgefetzes an einer Reihe von Beispielen. Hier ist schon eine gröÙere Mannigfaltigkeit der Uebung möglich. Man entwickle nur z. B.

$$\begin{aligned}
 (a+b)(b+c) &= ab+ac+bb+bc & (a+b)(a+b) &= aa+ab+ba+bb. \\
 (a+b+c)(d+e+f) &= ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf. \\
 (a+b)(b+c)(c+d) &= abc+abd+acc+acd+bbe+bbd+bcc+bcd.
 \end{aligned}$$

94. **Satz.** $0 \cdot a = 0$ $a \cdot 0 = 0$

und wenn $ab \geq 0$, so ist sowohl $a \geq 0$, als auch $b \geq 0$.

Null ist die unveränderliche GröÙe des Webens oder
Null giebt mit jeder GröÙe gewebt Null und wenn ein Zeug oder Produkt zweier GröÙen ungleich Null ist, so ist jede der beiden GröÙen ungleich Null und umgekehrt.

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } ab &= a(b+0) & (\text{nach 72}) \\
 &= ab+a0 & (\text{nach 93})
 \end{aligned}$$

Mithin ist $a0$ eine GröÙe, welche zu ab gefügt, dies nicht ändert, d. h. es ist Null (nach 71). Wenn ferner $ab \geq 0$, so muss sowohl $a \geq 0$ als $b \geq 0$ sein, denn wäre eine GröÙe z. B. $a = 0$, so wäre $ab = 0 \cdot b = 0$, was gegen die Annahme ist.

95. **Erklärung.** Die Eins heist dasjenige Einfache (das Element), welches mit jedem Einfachen ohne Aenderung des Wertes gewebt werden kann. Das Zeichen der Eins ist 1.

Satz. $e \cdot 1 = e$ $1 \cdot e = e$ 96.

Eins ändert, mit einem beliebigen Einfachen gewebt (multipliziert), den Wert deselben nicht.

Satz. $1 \cdot 1 = 1$ 97.

Eins ist diejenige GröÙe, welche mit sich selbst gewebt (oder multipliziert) sich nicht ändert.

Satz. $a \cdot 1 = a$ $1 \cdot a = a$ 98.

Eins ist die nicht ändernde GröÙe des Webens
Eins ändert, mit einer beliebigen GröÙe gewebt (multipliziert), den Wert derselben nicht.

Beweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Der Satz gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält (nach 96)
2. Wenn der Satz für eine beliebige GröÙe a gilt (Annahme), so gilt er auch für $a + e$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}(a + e) \cdot 1 &= a \cdot 1 + e \cdot 1 && \text{(nach 93)} \\ &= a + e && \text{(nach Annahme und nach 96)}\end{aligned}$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Wenn für das Fügen trennbares Einfügen, also auch Einziehen, gilt, so kann bei der Beziehung der Fall eintreten, dass eine Beziehungsklammer Strichgrößen enthält. Wir müssen also noch das Weben von Plusgrößen und von Strichgrößen behandeln.

Satz. Es giebt drei Arten der Webung: 1. Die Anwebung, 99. für welche weder Einigung, noch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, 2. die Einwebung, für welche zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Fache gilt und 3. die Verwebung, für welche sowohl Einigung, als auch Vertauschung der Fache gilt.

Bei der Webung ist das Gesetz der Beziehung des Webens zum Fügen für alle Arten der Webung das gleiche; ein Unterschied der Arten der Webung kann also nur dadurch erzeugt werden, dass für die zu webenden Fache oder Faktoren verschiedene Gesetze der Einigung und der Vertauschung gelten. Darnach kann man beim Weben entsprechend wie beim Fügen drei Arten der Webung unterscheiden: Das Anweben, für welches weder Einigung noch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, das Einweben, für welches zwar Einigung, aber keine Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt und das Verweben, für welches sowohl Einigung, als auch Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt.

b. Das Anweben.

100. **Erklärung des Anwebens.** Das Anweben (die Multiplikation im weiten Sinne) heist die Webung, wenn nur das Gesetz der Beziehung, nicht aber Einigung, auch nicht Vertauschung der Fache (der Faktoren) gilt.

Ein Beispiel für diese Rechnungsart findet sich weder in den Zweigen der mathematischen, noch in den Zweigen der logischen Wissenschaften. Dennoch durfte diese Knüpfungsart an dieser Stelle in der Größenlehre nicht übergangen werden, da es dem Menschen möglich ist, eine solche Knüpfungsart im Denken auszuführen und die Größenlehre alle Knüpfungen behandeln soll, welche im Denken vorkommen oder doch möglicher Weise vorkommen können, sofern ihr Ergebniss nur einen und nicht mehr Werte hat.

101. **Gesetz des Anwebens.** Für das Anweben gilt nur das Gesetz des allgemeinen Webens oder das Gesetz der Beziehung, auch giebt es für diese Art des Webens keine Knüpfung dritter Ordnung.

Beweis: Unmittelbar aus 100. Eine Knüpfung dritter Ordnung kann es nur geben, wenn es eine Beziehung zum Weben giebt, dann aber muss mindestens Einigung der Fache oder Faktoren gelten. Da diese für das Anweben nicht gilt, giebt es für diese Art der Webung keine Knüpfung dritter Ordnung.

c. Das Einweben.

102. **Erklärung des Einwebens.** Das Einweben (die Multiplikation im mittlern Sinne) heist das Weben, wenn ausser der Beziehung Einigung dreier Einfachen (Elemente) als Fache (als Faktoren), nicht aber Vertauschung derselben gilt.

103. **Grundformel des Einwebens** (der Multiplikation im mittlern Sinne).

$$e_1(e_2e_3) = e_1e_2e_3$$

Im Zeuge dreier Einfachen (im Produkte dreier Elemente) kann man bei dem Einweben die Malklammer setzen oder weglassen.

104. **Satz.** $a(e_1e_2) = ae_1e_2$

Im Zeuge oder Produkte einer Gröse und zweier Einfachen kann man beim Einweben die Malklammer setzen oder weglassen, oder: Statt eine Gröse mit dem Zeuge zweier Einfachen (mit dem Produkte zweier Elemente) einzuweben, kann man sie mit den Einfachen fortschreitend einweben.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf a.

1. Die Gleichung gilt, wenn a nur ein Einfaches enthält (nach 103).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige GröÙe a gilt (Annahme), so gilt sie auch für die GröÙe $a + e_3$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}(a + e_3)(e_1 e_2) &= a(e_1 e_2) + e_3(e_1 e_2) && \text{(nach 93)} \\ &= ae_1 e_2 + e_3 e_1 e_2 && \text{(nach Annahme und nach 103)} \\ &= (a + e_3)e_1 e_2 && \text{(nach 93)}\end{aligned}$$

3. Also gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

Beweis in Worten: Die GröÙe a ist eine Summe von Einfachen, das Zeug $(e_1 e_2)$ ist ein Einfaches nach 83. Dann wird nach 93 das Zeug $a(e_1 e_2)$ eine Summe, deren Stücke sämtlich Zeuge dreier Einfachen sind. In diesen sämtlich können nach 103 die Malklammern gesetzt oder weggelassen werden; wir lassen sie daher weg. Endlich können, da in allen diesen Zeugen die beiden letzten Einfachen $e_1 e_2$ dieselben sind, die ersten Einfachen nach 90 wieder in eine Summe gefügt werden und geben dann wieder die erste GröÙe a . Es ist dann aber diese GröÙe fortschreitend mit den beiden Einfachen eingewebt.

Satz. $a(be) = abe$

105.

Im Zeuge (im Produkte) zweier GröÙen und eines Einfachen (eines Elementes) kann man beim Einweben die Malklammer setzen oder weglassen, oder:

Statt eine GröÙe mit dem Zeuge (dem Produkte) aus einer GröÙe und einem Einfachen einzuweben, kann man sie fortschreitend mit der GröÙe und mit dem Einfachen einweben.

Formelbeweis: Nach Einfachen, d. h. einfach (elementar) in Bezug auf b .

1. Die Gleichung gilt, wenn b nur ein Einfaches enthält (nach 104).
2. Wenn die Gleichung für eine beliebige GröÙe b gilt (Annahme), so gilt sie auch für die GröÙe $b + e_1$, welche ein Einfaches mehr enthält (Folgerung); denn

$$\begin{aligned}a[(b + e_1)e] &= a[be + e_1 e] && \text{(nach 93)} \\ &= a(be) + a(e_1 e) && \text{(nach 93)} \\ &= abe + ae_1 e && \text{(nach Annahme und nach 104)} \\ &= (ab + ae_1)e && \text{(nach 93)} \\ &= a(b + e_1)e && \text{(nach 93)}\end{aligned}$$

3. Also gilt die Gleichung nach 24 allgemein.

Beweis in Worten: Ganz entsprechend wie zu 104.

106. Gesetz des Einwebens (der Multiplikation im mittlern Sinne).

In jeder Größenknüpfung durch Einweben kann man die Plusklammern und die Malklammern ohne Weitres setzen oder weglassen, und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Fache (des einen Faktors) mit jedem Stücke des andern einwebt und die Zeuge fügt. Das Zeug ist wieder eine Einfachgröße.

Beweis: Nach 105 gilt die Grundformel der Einigung für Fache (für Faktoren), also gilt nach 30 bis 34 auch das Gesetz der Einigung für Fache (für Faktoren). Die übrigen Teile des Satzes gelten aber nach dem Gesetze des Webens (nach 93).

d. Das Verweben.

107. Erklärung des Verwebens. Das Verweben (die Multiplikation im engen Sinne) heist das Weben, wenn für die Fache (für die Faktoren) ausser der Grundformel der Einigung auch die Grundformel der Vertauschung gilt.

108. Grundformel des Verwebens (der Multiplikation im engen Sinne).

$$e_1 e_2 = e_2 e_1$$

Beim Verweben lassen sich zwei Einfache (zwei Elemente) vertauschen.

109. Gesetz des Verwebens (der Multiplikation im engen Sinne).

In jeder Größenknüpfung durch Verweben kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und die Malkammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Fache (der Faktoren) beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Fache (des einen Faktors) mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt. Das Zeug ist wieder eine Einfachgröße.

Beweis: Nach 108 gilt die Grundformel der Vertauschung, also nach 36 bis 38 auch das Gesetz der Vertauschung. Der übrige Teil des Satzes gilt nach dem Gesetze des Einwebens (106).

Für die Verwebung empfehlen sich zur Uebung wieder einige Beispiele, wie:

$$abc(a+b+c) = aabc + abbc + abcc$$

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + 3aab + 3abb + bbb \text{ u. s. w.}$$

Bis hieher mussten wir die Größenlehre entwickeln, ehe wir zur Zahlenlehre übergehen konnten. Alle Zahlen sind nämlich durch Zufügen der Eins gewonnen; wir mussten demnach erst den Begriff der Eins haben, ehe wir zur Zahlenlehre übergehen konnten.

Erklärung. Die Formenlehre oder **Mathematik** ist der- 110.
jenige Zweigstamm der Größenknüpfung, für den äussere Fügung gilt,
d. h. für den sämtliche durch fortschreitendes Zufügen desselben
Einfachen entstandene Größen einander ungleich sind, sofern das Ein-
fache ungleich Null ist.

Erklärung. In der Formenlehre oder **Mathematik**, zu 111.
der wir jetzt übergehen, heist das Einfache oder Element eine Einheit
(die henótēs, die monás).

Erklärung. Die Formenlehre oder **Mathematik** zerfällt in zwei 112.
Hauptzweige: die Rechenlehre oder die **Análysis** und die
Dehnlehre oder die **Sýnthesis**.

Jeder dieser beiden Hauptzweige der **Mathematik** entwickelt zwei
Zweige, einen niedern und einen höhern.

Die Formenlehre oder **Mathematik** zerfällt demnach im Ganzen
in vier Zweige: die Zahlenlehre (**Arithmetik**) oder die niedere
Analysis, die Folgelehre (**Funktionenlehre**) oder die höhere **Analysis**,
die Ausdehnungslehre oder die niedere **Synthesis** und die Erwei-
terungslehre oder die höhere **Synthesis**.

Wir behandeln im Folgenden zunächst die Zahlenlehre.

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder die elementare Zahlenlehre enthaltend die Lehre von den Rechnungen mit den ganzen Zahlen und den Brüchen.

113. **Erklärung.** Die Zahlenlehre oder die Arithmetik (die arithmētik⁶⁾) heist der Zweig der Grösenknüpfung, in welchem nur eine Einheit, die Eins, und die durch fortschreitendes Fügen der Eins entstandenen Grösen, die Zahlen, sowie die durch Knüpfung von Zahlen erzeugten Grösen behandelt werden.

Die Zahlenlehre zerfällt wie die Formenlehre in vier Abschnitte: die niedere Zahlenlehre, welche die Lehre von den vier elementaren Rechnungen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit ganzen Zahlen und mit Brüchen behandelt, die höhere Zahlenlehre, welche die Erhöhung oder Potenzirung und die Vertiefung, Radizirung, wie die Lehre von den Logarithmen behandelt, die dehnende Zahlenlehre, welche uns die komplexe Gröse und die Winkelfunktionen vorführt, und endlich die erweiternde Zahlenlehre, welche uns in den höhern Gleichungen die höchste Blüte der Zahlenlehre bietet.

Der erste Abschnitt oder die niedere Zahlenlehre ist die arithmētikē im Sinne der alten Griechen.

Die Entwicklung wird, wenn man die Grösenlehre voraussetzen darf, ungemein einfach und kurz und führt bis zu der unbegrenzten Aufstellung aller Brüche, sowie zu der Bruchgleichung oder Proportion und ihrer Anwendung in der Regeldetri und zu den Gleichungen ersten Grades.

Es ist dieser Abschnitt trotz seiner Einfachheit in fast allen Lehrbüchern der Zahlenlehre höchst unwissenschaftlich behandelt; kein Abschnitt enthält soviel Trugschlüsse, als gerade dieser elementare und grundlegende Abschnitt. Nirgends sind die Trugschlüsse aber auch verderblicher als gerade hier; sie verwirren die Köpfe der Lernenden, machen sie unklar und unsicher, dass sie nicht wissen, was gilt, und was nicht gilt, und schaden dadurch dem Fortschritte und dem strengen mathematischen Denken unfähig.

Das vorliegende Werk vermeidet diese Trugschlüsse; es schlägt den streng wissenschaftlichen Weg ein. Es ist aber überaus wichtig, dass der Lernende nicht bloß die Sätze richtig mathematisch in Formeln oder logisch in Sätzen ableiten lerne, sondern er muss dieselben auch sofort praktisch anwenden und gebrauchen lernen. Um dies zu erzielen, habe ich bei jedem Satze Beispiele in Zahlen gegeben, welche den Satz anschaulich machen und dem Verständnisse näher führen. Aber diese Beispiele genügen allein auch nicht. Die Sätze müssen durch zahlreiche Uebungen in Fleisch und Blut übergeführt werden. Der Mathematiker muss die Sätze beherrschen und sie mit Leichtigkeit und voller Sicherheit anwenden können, dazu bedarf er aber bedeutender Uebungen.

Der Verfasser hat daher eigene „Mathematische Uebungshefte“ herausgegeben, welche die praktische Anwendung und Einübung der mathematischen Gesetze lehren. Das erste Heft entspricht ganz dem ersten Abschnitte der Zahlenlehre. Von den andern mathematischen Uebungsbüchern unterscheidet es sich dadurch, dass es zunächst die Regeln kurz aufstellt und dann die Reihenfolge der Aufgaben so ordnet, dass jeder Schüler die Aufgaben der Reihe nach selbständig und ohne fremde Hülfe lösen kann.

In dem vorliegenden ersten Abschnitte, d. h. in der niedern oder elementaren Zahlenlehre behandeln wir zunächst das Zählen oder die Bildung der Zahlen, d. h. den einfachsten oder elementarsten Teil der niedern Zahlenlehre; dann behandeln wir die erste Ordnung der Zahlenknüpfung oder das Addiren und Subtrahiren, sowie die Strichzahlen und die benannten Zahlen; demnächst gehen wir zur zweiten Ordnung der Zahlenknüpfung über oder zum Multiplizieren und Dividiren mit den benannten Zahlen und mit den Brüchen und kommen schliesslich zu den Bruchgleichungen und den Gleichungen ersten Grades, mit denen die niedere oder elementare Zahlenlehre schließt.

5. Das Zählen oder die Bildung der Zahlen.

Erklärung. Die Zahlen (die arithmoi, die numeri), welche 114. durch fortschreitendes Fügen der Eins entstehen, werden sämtlich einander ungleich gesetzt.

Die Bedingung, dass alle durch fortschreitendes Fügen derselben Einheit entstandenen Zahlen einander ungleich sein müssen, haben zuerst die Gebrüder Grassmann 1847 in ihrer gemeinsamen Arbeit über Arithmetik, demnächst zuerst der eine derselben, H. Grassmann, in seiner „Arithmetik“, Stettin 1860, Berlin 1861, Seite 3, und der andre R. Grassmann in seiner „Zahlenlehre“, Stettin 1872 Seite 9 gestellt. Ganz unabhängig von ihnen hat der ausgezeichnete Mathematiker Schroeder „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Erster Band.“ Leipzig 1872, Seite 63, dieselbe Bedingung aufgestellt. In der That, wenn man diese Bedingung analysirt, so gilt kein Satz des Abziehens, des Teilens und des Tiefens und Logens, wie wir dies an den betreffenden Stellen sehen werden.

In den Lehrbüchern der Zahlenlehre werden die Zahlen fast immer so erklärt, dass sie durch fortschreitendes Zufügen derselben Einheit e entstanden seien, wo e eine beliebige GröÙe sein kann. Dann aber muss eine zweite Be-

dingung hinzugefügt werden, dass nämlich die Einheit e ungleich Null und auch ungleich unendlich gesetzt werden muss. Diese Bedingung aber ist bis jetzt in allen Lehrbüchern der Zahlenlehre übersehen worden; dennoch muss sie, wenn man die Einheit e einführt, aufgestellt werden, sofern man streng wissenschaftlich sein will. Selbst in H. Grassmann, Arithmetik, Stettin 1860 und in R. Grassmann, Zahlenlehre, Stettin 1872 ist es übersehen worden, diese Bedingung einzuführen. Dieselbe erscheint zuerst in der Größenlehre des Verfassers von 1889 und in diesem Werke. Wie notwendig dieselbe ist, ergibt sich aber sofort, wenn man statt der Einheit e die GröÙe 0 oder die GröÙe ∞ einführt. Denn es ist $0 + 0 = 0$ nach 73, wenn also 0 als Einheit gesetzt wird, so ist nicht mehr $e + e \geq e$. Ebenso ist $a + \infty = \infty$, wenn also ∞ als Einheit e gesetzt wird, so ist nicht mehr $a + e \geq a$. Es darf also in der Zahlenlehre nie 0 oder ∞ als Einheit gesetzt werden. Wir setzen deshalb in der Zahlenlehre entweder jede Einheit stets endlich und ungleich Null und können dann künftig diese Bedingung weglassen, oder wir setzen noch viel einfacher nur die Eins als die Einheit, welche wir zufügen und leiten daraus die andern Zahlen ab, wie es hier geschehen ist und wie es das einfachste und zugleich das wissenschaftlichste ist.

Alle durch fortschreitendes Fügen der Eins oder auch der Einheit e erzeugten Zahlen a sind übrigens, sofern e endlich und ungleich Null ist, gleich falls endlich und ungleich Null. Denn wie weit auch der Mensch das Zählen fortsetzen möge, so bleibt er doch immer bei einer endlichen Zahl stehen; die durch fortschreitendes Zählen erzeugte Zahl a kann also nie unendlich werden. Die durch fortschreitendes Zählen der Eins oder des e erzeugte Zahl a kann aber auch nie Null werden; denn wäre die Zahl a gleich Null, so wäre $a + e = 0 + e = e$ nach 73, was gegen die Erklärung 110, wie 114 wäre.

115. Grundformel für das Zählen.

Es ist $\underset{1, m+n}{S} 1 \geq \underset{1, m}{S} 1$ oder $\overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{m+n} \geq \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^m$
 Sämtliche durch fortschreitendes Fügen der Einheit, d. h. durch Zahlen entstandene Zahlen sind einander ungleich.

Da alle Zahlen, welche durch fortschreitendes Fügen der Eins entstehen, einander ungleich sind, so würde es unwissenschaftlich sein, wollte man auch nur zwei dieser Zahlen mit einander verwechseln. Jede Zahl muss demnach ihr eigenes Zeichen und ihren eigenen Namen haben, der eine Verwechslung mit andern Zahlen unmöglich macht. Die Aufgabe, alle Zahlen zu bezeichnen und zu benennen, ist also die erste, die an uns herantritt.

Wenn man, wie in fast allen Lehrbüchern der Zahlenlehre, die Zahlen durch fortschreitendes Zufügen einer beliebigen Einheit entstehen lässt, so kann man jede beliebige endliche GröÙe, welche ungleich Null ist, als Einheit setzen und muss dann, da auch die Zahlen verschiedener Einheit verschieden sind, z. B. die Zahl: Mensch + Mensch verschieden ist von Apfel + Apfel, die Zahlen verschiedener Einheiten unterscheiden. Wir müssen dann also auch für jede Zahl jeder andern Einheit e ein andres Zeichen und einen andern Namen haben. Die Einführung der Einheit e an dieser Stelle macht also die Sache unnütz verwickelt, ja die Namengebung geradezu unmöglich.

Der einzig einfache und brauchbare Weg ist also der, dass man alle Zahlen nur durch fortgesetztes Zufügen der Eins entstehen lässt, wie das hier geschehen ist.

Da beim Zählen alle durch fortschreitendes Zufügen der Eins entstandenen Zahlen einander ungleich sind, so bedarf man auch selbst hier für jede Zahl einen eigenen Namen und ein eigenes Zeichen; da man aber durch fortgesetztes Zufügen der Eins unzählig viele Zahlen bilden kann, so gebraucht man auch unzählig viele Namen und Zeichen.

Da andererseits alle Mathematiker sich bei denselben Zeichen und demselben Namen auch stets dieselbe Zahl denken müssen, so müssen die Namen und die Zeichen leicht kenntlich und leicht zu behalten sein und müssen bereits wenige Namen genügen, um sämtliche Zahlen zu bezeichnen.

Die Lösung dieser Aufgabe hat den alten Völkern grose Schwierigkeit gemacht. Die alten Völker, wie die Ägypter, die Phönizier und die Griechen wandten für die Bezeichnung der Zahlen teils die Buchstaben an nach der Reihe des Alphabets, teils Zeichen, welche die Anzahl der Striche zählten, wie I, II, III, und konnten damit nur wenige Zahlen bezeichnen. Vollkommener war bereits ihre Bildung der Namen für die Zahlen; aber auch diese war noch zum Teil fehlerhaft und sind dadurch auch Fehler in unsere jetzigen Zahlnamen gekommen.

Die Zeichen sind zuerst vollkommener geworden, seitdem die Inder im Mittelalter das Zeichen der Null eingeführt haben und die sogenannten arabischen Ziffern aus Ägypten durch die Araber nach Europa verpflanzt sind. Die Namen und Zeichen der Zahlen sind darnach die in den folgenden Nummern aufgeführten.

Die bisherigen Lehrbücher der Zahlenlehre haben es veräumt, die Zeichen und Namen der Zahlen hier aufzuführen; dennoch ist diese Aufführung schlechthin geboten und wird zur Entfernung grober Missbräuche in der Benennung der Zahlen Anlass geben.

Erklärung. Die Namen und Zeichen der ersten zehn 116. Zahlen oder der Einer. Die Zeichen der Zahlen heissen Ziffern.

a. Die Null (Zeichen 0) ist die Gröse, welche zu jeder Gröse ohne Aenderung des Wertes gefügt werden kann.

b. Die Eins (Zeichen 1) ist die Einheit der reinen Zahlen, für welche $1 \cdot e = e$ ist.

c. Die Zwei (Zeichen 2) ist eins plus eins.

d. Die Drei (Zeichen 3) ist zwei plus eins.

e. Die Vier (Zeichen 4) ist drei plus eins.

f. Die Fünf (Zeichen 5) ist vier plus eins.

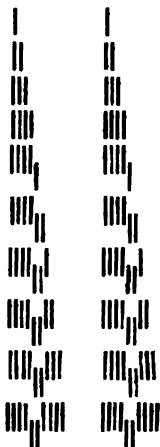
g. Die Sechs (Zeichen 6) ist fünf plus eins.

h. Die Sieben (Zeichen 7) ist sechs plus eins

i. Die Acht (Zeichen 8) ist sieben plus eins.

k. Die Neun (Zeichen 9) ist acht plus eins.

l. Die Zehn (Zeichen 10) ist neun plus eins.



117. **Erklärung.** Die Namen und Zeichen der höhern Zahlen. Um auch die höhern Zahlen bezeichnen zu können, gibt man den Ziffern verschiedene Stellen.

Der Wert der Ziffer richtet sich nach der Stelle, auf welcher sie steht. Die Stelle links vom Komma oder, wenn kein Komma steht, die letzte Stelle rechts heist die nullte Stelle; die Stelle links neben der nullten Stelle heist die erste Stelle; die a te Stelle links neben der nullten Stelle heist die a te Stelle.

Jede Ziffer hat auf der nullten Stelle den einfachen Wert; sie hat auf der $a + 1$ ten Stelle den zehnfachen Wert als auf der a ten Stelle.

Die Eins heist auf der ersten Stelle zehn (Zeichen 10), auf der zweiten Stelle hundert (Zeichen 100), auf der dritten Stelle tausend (Zeichen 1000), auf der vierten Stelle zehntausend (Zeichen 10000), auf der fünften Stelle hunderttausend (Zeichen 100000) und auf der sechsten Stelle Million (Zeichen 1000000).

Beim Lesen der Ziffern beginnt man mit der Ziffer der höchsten Stelle und schliest mit der der niedrigsten Stelle.

Beispiele: 3221 gelesen dreitausend zweihundert zwanzig und eins. 5006 gelesen fünftausend und sechs.

Beim Lesen der Ziffern und bei der Benennung der Zahlen ist aber bereits in den ältesten Zeiten eine Verwirrung eingetreten, welche auch jetzt noch fort-dauert und welche beseitigt werden muss. Es ist klar, dass die kleine Zahl vor dem Namen der Stellenzahl (tausend, hundert pp.) die Anzahl bestimmt, wie viel mal diese Stellenzahl genommen werden soll, so ist drei Tausend $= 1000 + 1000 + 1000 = 3 \cdot 1000 = 3000$, so dreihundert $= 100 + 100 + 100 = 3 \cdot 100 = 300$, so ist hundert und zwei Tausend $= 102 \cdot 1000 = 102000$. Es ist dies nicht nur eine allgemeine Regel bei der Namengebung der Zahlen, sondern bei jeder Benennung, so ist 3 Mas $= 3 \cdot 1$ Mas, so 3 Pfund $= 3 \cdot 1$ Pfund, so 3 Mark $= 3 \cdot 1$ Mark. Dagegen muss die Zahl niederer Stelle bei der Benennung stets auf die Zahl höherer Stelle folgen. Hienach bezeichnet der deutsche Name dreizehn unzweifelhaft $3 \cdot 10 = 30$. Dagegen muss die Zahl 13 im Deutschen nicht dreizehn, sondern zehn drei genannt werden, ebenso muss die 21 im Deutschen nicht ein und zwanzig, sondern zwanzig eins genannt werden u. s. w., wie dies bei den Franzosen richtig geschieht. Es ist diese sprachliche Verwirrung bei den Zahlnamen aber schon eine sehr alte; schon 2000 vor Chr. herrscht dieselbe im Sanskrit. So heist in den Veden trisata 300 und trisapta 3. 7, aber daneben trīgōḍasan 13 u. s. w. Im Griechischen und Lateinischen gehen die Formen drei und zehn und zehndrei, ein und zwanzig und zwanzig eins durch einander, in neuerer Zeit haben die Deutschen die unrichtige erste Form, die Franzosen die richtige zweite Form angenommen. Die Deutschen müssen hier die jetzt übliche Form der Zahlnamen ändern und die richtige Form annehmen. Es ist dies eine sehr leichte Sache, welche auch bereits

vielfach im kaufmännischen Verkehre angewandt wird. Das „und“ wird zweckmässig nur bei der Ziffer der letzten Stelle angewandt.

Auch für die höhern Stellen empfiehlt sich eine andre Benennung der Stellen; diese kann aber nur durchgeführt werden, wenn alle Gelehrten darin übereinkommen. Bis dahin muss es bei der jetzigen Sitte bleiben. Es wird aber wenigstens erlaubt sein, einen Vorschlag zu machen, wie die Sache geordnet werden kann. Alle gebildeten Völker haben jetzt ein zehnteiliges Zahlensystem; dazu gehört aber auch, dass die Stellen zehnteilig geordnet werden. Die Billion sollte darnach 10 Stellen, nicht aber 12 Stellen haben, die Million sollte 5, nicht aber 6 Stellen links von der nullten Stelle erhalten; ich erlaube mir daher den Vorschlag zu machen, dass man 10^{10} eine Bill, 10^5 eine Mill nenne. Man könnte dann 10^4 eine Myr nennen, auch könnte man etwa statt Tausend und statt Hundert die abgekürzten Formen „Daus“ und „Hun“ einführen, welche, wie die Sprachgeschichte beweist, ebenso gut sind, wie jene gewöhnlichen längeren Wortformen. So lange aber ein solcher Vorschlag nicht allgemein angenommen ist, muss es bei der jetzigen Sitte bleiben.

Der Satz 117 von den verschiedenen Stellen der Zahlen wird in den Lehrbüchern der Zahlenlehre oder Arithmetik fast immer erst nach der Lehre von den Potenzen bei den Reihenzahlen vorgetragen; aber ganz mit Unrecht. Die Zahlen höherer Stellen sind von den Indern und Arabern um 500 bis 800 n. Chr. eingeführt, lange bevor man Potenzen kannte, welche erst 1585 n. Chr. in Europa eingeführt sind. Ebenso werden die Zahlen höherer Stellen von den Kindern bereits in der untersten Klasse der Elementarschule gebildet und benutzt, lange bevor sie von den Potenzen eine Ahnung haben. Die Lehre von den höhern Stellen muss also hier bei der Bildung der Zahlen vorgetragen werden und wird in den folgenden Nummern ihre Entwicklung finden. Mit der Potenzlehre hat sie gar nichts zu tun.

$$\text{Satz.} \quad a + (b + 1) = a + b + 1$$

118.

Für die Zahlen gilt die Grundformel der Einfügung: Statt zu dem zweiten Stücke eine Eins zu fügen, kann man sie zu der Summe fügen und statt zu der Summe eine Eins zu fügen, kann man sie zum zweiten Stücke fügen.

Wir haben schon oben bemerkt, dass man in allen Zweigen der Grössenknüpfung die Grundformel der Einfügung und daraus hervorgehend das Gesetz der Einfügung gelten lässt, da nur in dem Falle, wenn dies gilt, eine höhere Ordnung der Grössenknüpfung möglich ist. Haben wir aber diese Grundformel, so geht daraus die ganze Zahlbildung für höhere Stellen hervor, sofern man noch das Gesetz aus 116 für den Uebergang der 9 in die 10 beachtet, dass nämlich $10 = 9 + 1$.

Satz. Wenn auf einer Stelle die Ziffer neun steht und es wird 119. noch eine Eins auf der Stelle zugefügt, so wird dafür auf dieser Stelle eine Null und auf der nächst höhern Stelle eine Eins gesetzt.

Es wird zweckmässig sein, die Bildung der höheren Zahlen nach diesen Sätzen an einigen Beispielen zu zeigen.

Es ist $11 = 10 + 1$.

$$12 = 10 + 2 = 10 + (1 + 1) = (10 + 1) + 1 = 11 + 1 \quad (\text{nach 116c und 118})$$

$$13 = 10 + 3 = 10 + (2 + 1) = (10 + 2) + 1 = 12 + 1 \quad (\text{nach 116d und 118})$$

$$14 = 10 + 4 = 10 + (3 + 1) = (10 + 3) + 1 = 13 + 1 \quad (\text{nach 116e und 118})$$

$$15 = 10 + 5 = 10 + (4 + 1) = (10 + 4) + 1 = 14 + 1 \quad (\text{nach 116f und 118})$$

$$16 = 10 + 6 = 10 + (5 + 1) = (10 + 5) + 1 = 15 + 1 \quad (\text{nach 116g und 118})$$

$$17 = 10 + 7 = 10 + (6 + 1) = (10 + 6) + 1 = 16 + 1 \quad (\text{nach 116h und 118})$$

$$18 = 10 + 8 = 10 + (7 + 1) = (10 + 7) + 1 = 17 + 1 \quad (\text{nach 116i und 118})$$

$$19 = 10 + 9 = 10 + (8 + 1) = (10 + 8) + 1 = 18 + 1 \quad (\text{nach 116k und 118})$$

$$20 = 10 + 10 = 10 + (9 + 1) = (10 + 9) + 1 = 19 + 1 \quad (\text{nach 116.l und 118})$$

u. f. w. ganz in gleicher Weise bis 99 bez. bis 999.

$$99 + 1 = (90 + 9) + 1 = 90 + (9 + 1) = 90 + 10 = 100,$$

$$999 + 1 = (900 + 99) + 1 = 900 + (99 + 1) = 900 + 100 = 1000$$

n. f. w.

Man kann also auch bei der obigen Namengebung und Bezeichnung doch sehr wohl die Bildung der Zahlen durch die fortschreitende Fügung von Eins festhalten, dass also 20 nicht durch $10 + 10$, sondern durch $19 + 1$, dass 100 nicht durch $10 \cdot 10$, sondern durch $99 + 1$ erklärt und gewonnen wird. Es ist dies der einzige einfache oder elementare Weg der Zahlbildung, auf dem die Kinder die Zahlen beim Zählen bilden lernen und ist auch der einzig wissenschaftliche Weg.

6. Das Zufügen und das Abziehen, die Strichzahl und die benannte Zahl.

A. Das Zufügen der Zahlen.

Wir haben schon oben in 118 gesehen, dass in der Zahlenlehre, wie in allen Zweigen der Größenknüpfung die Grundformel der Einfügung oder der Einigung für die Fügung gesetzt wird, da es nur in dem Falle, wenn Einigung gilt, eine höhere Ordnung der Zahlenknüpfung geben kann. Die Grundformel der Vertauschung gilt selbstverständlich, da nur gleiche Einheiten, d. h. gleiche Einsen $1 + 1$ gefügt werden.

120. Grundformeln der Zahlenfügung.

$$a + (b + 1) = a + b + 1 \quad 1 + 1' = 1' + 1$$

Für die Zahlenfügung gelten die Grundformeln der Einfügung und Zufügung oder der Einigung und Vertauschung.

Satz. Das Zufügen einziffriger Zahlen oder das Eins 121. und Eins. Um das Eins und Eins für die einziffrige Zahl zu bilden, fügt man zu der Zahl a erst 1, dann 2, und so fortschreitend, nachdem man $a + b$ gefunden hat, die Summe $a + (b + 1) = a + b + 1$, bis man zu $a + 10$ gelangt.

Beweis: Unmittelbar aus 120.

Ein Beispiel wird die Sache klar machen. Sei das Eins und Eins für acht zu bilden, also $8 + 1$, $8 + 2$, $8 + 3$ u. f. w. So füge man

$$8 + 1 = 9$$

$$8 + 2 = 8 + (1 + 1) = (8 + 1) + 1 = 9 + 1 = 10 \quad (\text{nach 118})$$

$$8 + 3 = 8 + (2 + 1) = (8 + 2) + 1 = 10 + 1 = 11 \quad (\text{nach 118})$$

$$8 + 4 = 8 + (3 + 1) = (8 + 3) + 1 = 11 + 1 = 12 \quad (\text{nach 118})$$

$$8 + 5 = 8 + (4 + 1) = (8 + 4) + 1 = 12 + 1 = 13 \text{ u. f. w.}$$

Die Sache macht hienach gar keine Schwierigkeiten. Das Eins und Eins ist demnächst bis zu schlechthiniger Sicherheit, welche jeden Irrtum unmöglich macht, zu lernen.

Ganz ebenso verfährt man beim Zufügen der Ziffern höherer Stellen. z. B. $9000 + 1000 = 9000$;
 $9000 + 2000 = 9000 + (1000 + 1000) = (9000 + 1000) + 1000 = 9000 + 1000 = 10000$
 und übt auch diese Zufügung bis zu vollster Sicherheit ein. Dann geht man zu dem Gesetze der Zahlenfügung über.

Gesetz der Zahlenfügung. In jeder Knüpfung der Zahlen 122. durch Fügen gilt das Gesetz der Zufügung, d. h. man kann ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern beliebig setzen oder weglassen und die Ordnung der Stücke beliebig ändern, die Summe ist wieder eine Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus 78 und 81, da 77 und 80 gilt.

Satz. Das Zufügen mehrziffriger Zahlen. Beim Zufügen 123. mehrziffriger Zahlen zerlegt man jede Zahl in soviel Stücke, als sie geltende Ziffern (d. h. Ziffern ungleich Null) hat, so dass jedes Stück nur eine geltende Ziffer hat, ordnet alle Ziffern gleicher Stellen zusammen und fügt nun von der untersten Stelle anfangend die Ziffern jeder Stelle für sich zu. Wenn die Summe Ziffern höherer Stellen ergibt, so fügt man diese bei den betreffenden Stellen mit zu.

Beweis: Unmittelbar aus 122.

Beispiel. Sei $325 + 287$ zu nehmen, so setze man

$$\begin{aligned} 325 + 287 &= (300 + 20 + 5) + (200 + 80 + 7) \\ &= (300 + 200) + (20 + 80) + (5 + 7) \\ &= (300 + 200) + (20 + 80) + 12 \\ &= (300 + 200) + (20 + 80 + 10) + 2 \\ &= (300 + 200) + 110 + 2 \\ &= (300 + 200 + 100) + 10 + 2 \\ &= 600 + 10 + 2 = 612. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar folgende praktische Rechenregel.

124. **Satz. Rechenregel fürs Zufügen.** Beim Zufügen mehrziffriger Zahlen schreibt man die Zahlen senkrecht unter einander, so dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, kurz die Ziffern der gleichen Stelle senkrecht unter einander kommen, und fügt dann, von der untersten Stelle anfangend, die Ziffern jeder Stelle für sich zu. Wenn die Summe Ziffern höherer Stellen ergibt, so fügt man diese bei den betreffenden Stellen mit zu.

$$\begin{array}{r} \text{Beispiel: } 5832 + 7469 \\ 5832 \\ 7469 \\ \hline 13301 \end{array}$$

Das Zufügen unbenannter Zahlen ist nun bis zur größten Sicherheit und Fertigkeit einzüben. Der Rechnende hat zuletzt kurz zu rechnen, d. h. jedesmal nur die Summe zu fügen, ohne die Stücke zu nennen. Ist die Rechnung vollendet, so macht man nochmals die Probe, d. h. wenn zuerst von unten nach oben zugefügt war, so fügt man nun von oben nach unten zu und prüft, ob dieselbe Summe herauskommt. Geschieht dies, so kann man sicher sein, dass man richtig gerechnet hat.

Zahlreiche Uebungsbeispiele bietet das Rechenheft I des Verfassers. Die Anleitung zum Unterrichte und zu der notwendigen Stufenfolge der Uebungen ist in den Auflösungen und der Anleitung zum Unterrichte für das Rechenheft I vom Verfasser gegeben.

125. **Satz.** Für das Zufügen der Zahlen gilt trennbare Knüpfung oder: Wenn $a + b = a + c$ (Annahme), so ist $b = c$ (Folgerung) oder: Je zwei Zahlen b und c , welche zu derselben Zahl a gefügt gleiche Summen liefern, sind einander gleich.

Beweis: Soll es zwei Zahlen b und c geben, welche beide zu a gefügt die Summe $a + b = a + c$ geben, so muss entweder $b = c$ sein und dann gilt der Satz, oder es muss $b > c$ sein, d. h. es muss in der fortschreitenden Zahlenreihe die eine eine andre Zahl als die andre, die eine etwa c , also später sein als die andre b . Sei demnach $c = b + 1 + 1 + 1 + \dots = b + (1 + 1 + 1 + \dots) = b + d$ nach 122, so muss also auch $a + b = a + c = a + b + d$ sein, wo $d > 0$ ist. Dies aber ist unmöglich, da $a + b + d$ in der Zahlenreihe später ist als $a + b$ und also auch ungleich $a + b$ sein muss nach 114. Es kann also nicht $b > c$ sein, sondern es muss $b = c$ sein oder es gibt nur eine Zahl b , welche zu der Zahl a gefügt die Summe $a + b$ giebt, d. h. es gilt nach 45 trennbare Fügung.

Da es bei der Fügung, sofern nur endliche Größen gefügt werden, keine unveränderliche GröÙe giebt, so kann hier die Bedingung aus 45 und 46, dass a der unveränderlichen GröÙe ungleich sein müsse, weggelassen werden.

B. Das Abziehen der Zahlen.

Erklärung. Das Abziehen der Zahlen oder das Subtra- 126.
hieren (griech. *hyphairéin*, lat. *subtraheri*) heist die dem Zufügen der
Zahlen entsprechende Trennung, wo die Summe $a = b + c$ oder
 $a = c - b$ und das eine Stück b gegeben ist und das andre Stück c
gefuht wird.

Die Summe a , von der abzuziehen ist, heist der Vorrat (der
minuendus), das gegebene Stück b , das abgezogen wird, heist der
Abzug (der subtractor), das Ergebniss des Abziehens heist der Rest
(quod restat) oder der Unterschied (die differentia).

Das Abziehen der Zahlen ist die Trennung, welche dem Zufügen der
Zahlen entspricht. da nun bei dem Zufügen der Zahlen Vertauschung der Zahlen
gilt, so gelten auch für das Abziehen die Gesetze der Abtrennung und nennt
man daher die dem Zufügen entsprechende Trennung passend ein Abziehen.

Den Abzug nennt man gewöhnlich den subtrahendus, dies aber ist fehler-
haft und verwirrend. Beim Teilen nennt man die Gröse, welche geteilt werden
soll den dividendus, die Gröse, welche teilt, den divisor. Entsprechend müsste
beim Abziehen die Gröse, von welcher abgezogen werden soll, der subtrahendus,
die Gröse, welche abzieht, der subtractor heissen. Mag man nun auch die erste
Gröse, den Vorrat, immerhin den minuendus nennen, so darf man doch jedenfalls
nicht den Abzug einen subtrahendus nennen, sondern muss ihn subtractor nennen.

Erklärung. Das Zeichen des Abziehens ist ein wagerechter 127.
Strich —, gelesen „strich“, „ab“ oder „minus“. Z. B. $a - b$ gelesen
a strich b, oder a ab b oder a minus b. Die Zeichen „plus +“ und
„strich —“ heissen entgegengesetzte Zeichen. Eine Gröse mit einem
Strich als Vorzeichen heist eine Strichgröse oder eine negative
Gröse; eine Klammer, vor welcher der Strich steht, heist eine Strich-
klammer. Z. B. $-a$ ist eine Strichgröse, $-(a + b)$ ist eine Strich-
klammer.

Erklärung. Ein Gliederausdruck (der polynómos) heist ein 128.
Ausdruck, in welchem die Grösen fortschreitend durch Plus oder Strich
(minus) geknüpft sind; jede Gröse mit ihrem Vorzeichen und ebenso
jede Klammer heist ein Glied (der nómos) des Ausdrucks. So z. B.
hat der Gliederausdruck $a + (b - c) - d$ die drei Glieder a , $+(b - c)$
und $-d$.

Satz. $a = a + b - b = a - b + b$ 129.

Zu einer Zahl eine zweite Zahl fortschreitend zufügen und abziehen
oder fortschreitend abziehen und zufügen ändert die Zahl nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 49.

130. **Satz.** Das Abziehen einziffriger Zahlen oder das Eins von Eins. Aus dem Eins und Eins erhält man unmittelbar das Eins von Eins, indem man statt $a + b = c$ nun $c - a = b$ setzt.

Beispiel. Aus $8 + 2 = 10$ erhält man $10 - 8 = 2$, aus $8 + 3 = 11$ erhält man $11 - 8 = 3$ u. f. w. Das Eins von Eins ist demnächst wieder bis zu schlechthiniger Sicherheit, welche jeden Irrtum unmöglich macht, zu lernen.

Ganz ebenso verfährt man beim Abziehen der Ziffern höherer Stellen, z. B. $8000 + 3000 = 11000$; $11000 - 8000 = 3000$ und übt auch diese bis zu vollster Sicherheit ein.

131. **Gesetz der ersten Ordnung der Zahlenlehre.** In jeder Verknüpfung von Zahlen durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern ohne Weitres, die Strichklammer nach Entgegensetzung der Zeichen aller Klammerglieder beliebig weglassen oder setzen und die Ordnung der Glieder beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahl.

Beweis: Da für das Fügen Vertauschung gilt und die Fügung nach 125 eine trennbare Fügung ist, so gilt nach 62 auch das Gesetz der Vertauschung und Abtrennung.

132. **Satz.** Man kann jede durch Zufügen oder Abziehen (Addiren oder Subtrahiren) von Zahlen erzeugte GröÙe, welche ungleich Null ist, als Einheit setzen, und gelten dann für alle aus dieser und der entgegengesetzten Zahl erzeugten Zahlen alle Gesetze der ersten Ordnung der Zahlenlehre.

Beweis: Unmittelbar aus 63.

133. **Satz.** $+(-a) = -(+a) = -a$ $+(+a) = -(-a) = +a$
Eine Strichzahl fügt man zu, indem man die entsprechende Pluszahl abzieht und eine Strichzahl zieht man ab, indem man die entsprechende Pluszahl zufügt
oder:
Statt „strich strich“ kann man „plus“ und statt „plus strich“ oder statt „strich plus“, kann man „strich“ setzen.

Beweis: Unmittelbar aus 131, indem man die Klammer auflöst.

134. **Satz.** $a + 0 = a - 0 = a$
Null zufügen oder abziehen ändert die Zahl nicht.

Beweis: Es ist $a + 0 = a$ nach 116. a. Ebenso ist aber auch
 $a - 0 = a + 0 - 0$ (nach 116. a)
 $= a$ (nach 129)

135. **Satz.** $0 = a - a = -a + a$
Der Unterschied zweier gleichen Zahlen ist Null und wenn der Unterschied zweier Zahlen Null ist, so sind die Zahlen gleich.

Beweis: Nach 134 ist $b = b + 0$. Ebenso ist nach 129

$$b = b + a - a = b - a + a, \quad \text{mithin nach 131}$$

$$= b + (a - a) = b + (-a + a). \quad \text{Also ist auch nach 18}$$

$$b + 0 = b + (a - a) = b + (-a + a).$$

Mithin ist nach 125, da in den gleichen Summen das erste Stück b gleich ist, auch das zweite Stück gleich, d. h. es ist $0 = a - a = -a + a$.

Satz. Das Abziehen mehrziffriger Zahlen. Beim Ab- 136.
ziehen mehrziffriger Zahlen zerlegt man jede Zahl in soviel Stücke
als sie geltende Ziffern (d. h. Ziffern ungleich Null) hat, ordnet die
beiden Ziffern gleicher Stellen zusammen und zieht nun von der
untersten Stelle anfangend die Ziffern jeder Stelle für sich ab. Wenn
auf einer Stelle der Abzug grösser ist als der Vorrat, so zieht man
auf einer höhern Stelle des Vorrats eine Eins ab, fügt den Wert der-
selben zur Ziffer der Stelle im Vorrat und zieht nun die Ziffer des
Abzugs ab.

Beweis: Unmittelbar aus 131.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 325 - 283 &= (300 + 20 + 5) - (200 + 80 + 3) \\ &= (300 - 200) + (20 - 80) + (5 - 3) \\ &= (300 - 200) + (20 - 80) + 2 \\ &= (200 - 200) + (100 + 20 - 80) + 2 \\ &= (200 - 200) + 40 + 2 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar folgende praktische Rechenregel.

Satz. Rechenregel fürs Abziehen. Beim Abziehen mehr- 137.
ziffriger Zahlen schreibt man die Ziffern der gleichen Stelle senkrecht
unter einander und zieht, bei der untersten Stelle beginnend, die
Ziffern jeder Stelle für sich ab.

Borgeregeln. Wenn auf einer Stelle der Abzug grösser ist als
der Vorrat, so borgt man eine Einheit auf der nächst höhern Stelle,
gleich zehn Einheiten auf der folgenden Stelle, und zieht nun ab.

Höhere Borgeregeln. Wenn die nächst höhere Stelle Null hat,
so borgt man eine Einheit bei der nächsten höhern Stelle, welche
nicht Null hat, setzt für jede folgende Null eine Neun und behält für
die letzte Stelle eine Zehn beim Borgen übrig, oder kurz:

Eine Null, über welche weggeborgt wird, verwandelt sich in Neun.

Beispiele: Die Aufgabe sei $53 - 28$; $3 - 8$ kann ich nicht, ich borge
mir einen Zehner und mache den Borgepunkt bei der 5, $13 - 8$ ist 5, $40 - 20$
ist 20, $5 + 20$ ist 25, also ist $53 - 28 = 25$.

$203 - 57$; $3 - 7$ kann ich nicht, ich borge einen Zehner. Bei den Zehnern kann
ich nicht borgen. Ich borge 1 Hundert und mache den Borgepunkt. Ein Hundert
hat 10 Zehner; davon lasse ich 9 auf der Zehnerstelle und borge 1 Zehner für

die Einer, $13 - 7 = 6$; $9 Z - 5 Z = 4 Z$. $1 H - 0 = 1 H$, $1 H + 4 Z + 6 E = 146$, also u. f. w.

Das Abziehen unbenannter Zahlen ist nun bis zur grössten Sicherheit und Fertigkeit einzuüben. Der Rechnende muss namentlich das Abziehen, wo geborgt werden muss, bis zur grössten Sicherheit einüben. Die Probe wird hier so gemacht, dass die beiden Stücke (der Rest und der Abzug) gefügt werden; sie müssen dann beide zugefügt den Vorrat geben.

Uebungsbeispiele und genauere Anleitung bietet das Rechenbuch vom Verfasser Heft I.

C. Die Vergleichung der Zahlen.

138. **Erklärung.** Gleichartig heissen zwei Zahlen, wenn beide Pluszahlen (positive Zahlen) oder beide Strichzahlen (negative Zahlen) sind, hingegen einander ungleichartig, wenn die eine eine Pluszahl, die andre eine Strichzahl ist.

Gleichwertig heissen zwei Zahlen, wenn jeder Einheit der einen eine Einheit der andern entspricht. Unter dem Pluswerte einer Zahl wird die gleichwertige Pluszahl verstanden.

Entgegengesetzt heissen zwei Zahlen, wenn sie gleichwertig sind und entgegengesetzte Zeichen haben,

139. **Satz.** Die Pluszahl $+a$ und die Strichzahl $-a$ sind entgegengesetzte Zahlen.

Beweis: Sollen sie entgegengesetzte Zahlen sein, so muss jeder Einheit der einen eine Einheit der andern entsprechen. Habe nun $+a$ n Einheiten, also $+a = 1_1 + 1_2 + \dots + 1_n$, so ist
 $-a = -(+a) = -(1_1 + 1_2 + \dots + 1_n)$ (nach 138 und Annahme)
 $= -1_1 - 1_2 - \dots - 1_n$ (nach 131)
 also entspricht jeder Einheit $+1$ der Pluszahl $+a$ auch eine Einheit -1 der Strichzahl $-a$.

140. **Satz.** Jede Zahl ist entweder eine Pluszahl (positive Zahl) oder eine Strichzahl (negative Zahl) oder Null.

Beweis: Jede Zahl ist eine Grösse, welche durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstanden ist. Enthält dieselbe nur eine Art von Einheiten, so ist sie entweder eine Plus- oder eine Strichzahl. Enthält sie beide Arten der Einheiten, Pluseinheiten und Stricheinheiten, so kann man je eine Pluseinheit und eine Stricheinheit in eine Klammer schliessen (nach 131) und solange hiermit fortfahren, bis ausser den Klammern nur noch eine Art der Einheiten bleibt. Jede Klammer hat dann die Form $(e + (-e))$ und ist (nach 133 und 135) Null. Null aber kann (nach 131) bei der Zufügung weggelassen werden.

Die Klammern können also sämtlich weggelassen werden. **Bleibt** nun ausser den Klammern keine Einheit, so ist die Zahl Null, bleiben ausser den Klammern nur Pluseinheiten, so ist die Zahl eine Pluszahl, bleiben nur Stricheinheiten, so ist sie eine Strichzahl.

Satz. Die Summe mehrer Pluszahlen ist wieder eine Pluszahl, 141.
die mehrer Strichzahlen ist wieder eine Strichzahl.

Beweis: Nach 114 ist jede Pluszahl durch fortgesetztes Zufügen von Pluseinheiten entstanden; stellt man also jede Zahl als Summe ihrer Einheiten dar, und löst man die Plusklammer, so ist die Gesamtsumme mehrer Pluszahl eine Zahl, welche nur fortschreitend verknüpfte Pluseinheiten enthält, d. h. nach 114 eine Pluszahl.

Die Summe von Strichzahlen $(-a) + (-b) + (-c) + \dots$ ist aber nach 131 $(-a) + (-b) + (-c) + \dots = -(a + b + c + \dots)$ und ist also nach 139 die entgegengesetzte Zahl zu $a + b + c + \dots$, also eine Strichzahl.

Erklärung. Eine Zahl a heist grösser, als eine andre b , und 142.
die zweite b heist kleiner als die erste, wenn $a - b$ eine Pluszahl ist. Das Zeichen ist $a > b$ (gelesen a grösser als b) oder $b < a$ (gelesen b kleiner als a).

Die drei Ausdrücke $a > b$, $a = b$ und $a < b$ bilden die drei Arten der Vergleichung. Eine Zahl c , welche grösser als b und zugleich kleiner als a ist, heist ein ausschliessendes Mittel zwischen b und a . Das Zeichen des ausschliessenden Mittels ist $c = \text{Mitt } (b [,] a)$.

Wenn die Zahl c grösser oder gleich b und zugleich kleiner oder gleich a ist, so heist das Mittel ein einschliessendes Mittel. Das Zeichen des einschliessenden Mittels ist $c = \text{Mitt } [a, b]$.

Satz. Jede Zahl a ist jeder andern b aus derselben Einheit, 143.
entweder gleich oder grösser oder kleiner.

Beweis: Es ist $a - b$ eine Zahl, mithin nach 140 entweder Null oder eine Pluszahl oder eine Strichzahl.

1. Es sei $a - b = 0$; dann ist

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \text{(nach 134)} \\ &= b + (a - b) && \text{(nach Annahme)} \\ &= a + (b - b) && \text{(nach 131)} \\ &= a + 0 && \text{(nach 135)} \\ &= a && \text{(nach 134)} \end{aligned}$$

d. h. $a = b$.

2. Es sei $a - b$ eine Pluszahl, so ist $a > b$ (nach 142)

3. Es sei $a - b$ eine Strichzahl, so ist die entgegengesetzte

— $(a - b)$ eine Pluszahl, und diese ist (nach 131) $-(a - b) = -a + b = b - a$, d. h. $b > a$ oder $a < b$ nach 142.

144. **Satz.** Wenn in einer Reihe von Zahlen jede vorhergehende grösser ist als die nächstfolgende, so ist auch die erste grösser als die letzte.

Beweis: Es sei $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3, \dots, a_{n-1} > a_n$, oder allgemein, es sei $a_n > a_{n+1}$, so ist nach 142 $a_n - a_{n+1}$ eine Pluszahl, also auch die Summe

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-1}) - a_n = a_1 - a_n$$

eine Pluszahl, d. h. $a_1 > a_n$.

Beispiel: In der Zahlenreihe 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3 ist jede vorhergehende grösser als die nächstfolgende, also ist auch 21 grösser als 3.

145. **Satz.** Jede Pluszahl ist grösser als Null, jede Strichzahl ist kleiner als Null.

Beweis: 1. Es sei a eine Pluszahl, so ist auch $a - 0 = a$ (nach 134) eine Pluszahl, d. h. nach 142 $a > 0$.

2. Es sei a eine Strichzahl, $b = -a$ die entgegengesetzte Pluszahl, so ist $0 - a = 0 + (-a) = 0 + b = b$ (nach 133 und 134), d. h. eine Pluszahl, also $a < 0$ nach 142 c.

Beispiel: $+1$ ist grösser als Null, -1 ist kleiner als Null.

146. **Satz.** Die Summe zweier ungleichartiger Zahlen a und b ist demjenigen Stücke gleichartig, das den grössern Pluswert hat, und zwar findet man den Pluswert dieser Summe, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern von dem grössern abzieht.

Beweis: Es sei a die Zahl, deren Pluswert grösser ist als der von b . Da die beiden Zahlen ungleichartig sind, so ist entweder a eine Plus- und b eine Strichzahl, oder es ist a eine Strich- und b eine Pluszahl.

1. Es sei a eine Plus- und b eine Strichzahl, so setze $b = -b_1$, dann ist a der Pluswert von a , b_1 der von b . Da nun der Pluswert von a grösser ist als der von b , so ist $a > b_1$, oder $a - b_1$ eine Pluszahl (nach 142), mithin ist die Summe $a + b = a + (-b_1) = a - b_1$ dem a gleichartig und wird ihr Pluswert erhalten, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern vom grössern abzieht.

2. Es sei a eine Strich- und b eine Pluszahl, so setze $a = -a_1$, dann sind a_1 und b die beiden Pluswerte und, da der von a grösser als der von b , so ist $a_1 - b$ eine Pluszahl (nach 142); mithin ist $a + b = -a_1 + b = -(a_1 - b)$ eine Strichzahl oder dem a gleich-

artig, und der Pluswert $a_1 - b$ wird erhalten, wenn man unter den Pluswerten der Stücke den kleinern von dem größern abzieht.

Beispiel: $16 + (-13) = +3$; $13 + (-16) = -3$.

Satz. Die Vergleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden 147. Seiten Gleiches zufügt oder abzieht.

Beweis: Es sei $a > b$, d. h. nach 142 $a - b$ eine Pluszahl, dann ist auch

$$\begin{aligned} a \pm c - (b \pm c) &= a - b \pm c \mp c && \text{(nach 131)} \\ &= a - b && \text{(nach 129).} \end{aligned}$$

eine Pluszahl, d. h. $a \pm c > b \pm c$, was zu beweisen war.

Beispiel: Wenn $5 > 3$, so ist auch $5 + 4 > 3 + 4$.

Satz. Wächst in einer Summe zweier Zahlen das eine Stück, 148. während das andre gleich bleibt, so wächst auch die Summe.

Beispiel: Wachse in $5 + 3 = 8$ die 3 zu 7, so wächst auch die Summe, 8 zu 12.

Satz. Wachsen in einer Summe mehrer Zahlen ein oder mehrere 149. Stücke, während kein Stück kleiner wird, so wächst auch die Summe.

Beweis: Lässt man zunächst nur ein Stück wachsen, während die andern gleich bleiben, so wächst die Summe nach 148. Lässt man jedesmal in der so erhaltenen Summe ein Stück wachsen, während die andern gleich bleiben, bis alle Stücke, welche wachsen sollen, größer geworden sind, so wächst auch jedesmal die Summe, man erhält eine Reihe von Summen, in welcher jede nächstfolgende größer als die vorhergehende ist, also ist nach 144 auch die letzte größer als die erste.

Satz. Wächst in einem Unterschiede der Abzug (Subtractor), 150. während der Vorrat (Minuend) gleich bleibt, so nimmt der Unterschied ab.

Beweis: Es sei $c > b$, d. h. $c - b$ eine Pluszahl, so soll bewiesen werden, dass $a - b > a - c$, d. h. dass $(a - b) - (a - c)$ eine Pluszahl sei. Es ist aber

$$\begin{aligned} (a - b) - (a - c) &= c - b + a - a && \text{(nach 131)} \\ &= c - b && \text{(nach 129)} \end{aligned}$$

d. h. nach der Voraussetzung eine Pluszahl.

Beispiel: Wachse in $18 - 7 = 11$ die 7 um 5, so nimmt der Unterschied um 5 ab, d. h. aus 11 wird 6; oder $18 - (7 + 5) = 6$.

D. Die Rechnung erster Ordnung mit benannten Zahlen.

Erklärung. Die benannte Zahl heist das Zeug oder Produkt 151. einer reinen Zahl mit einer Einheit e. Die reine Zahl heist die Anzahl, die Einheit e heist der Name oder die Benennung. Gleich..

benannte Zahlen heißen zwei Zahlen, welche den gleichen Namen haben.

Beispiel: In der benannten Zahl 7 Meter ist 7 die Anzahl, Meter der Name. In der benannten Zahl 12 Äpfel ist 12 die Anzahl, Äpfel der Name. 5 Mark und 7 Mark sind gleichbenannte Zahlen. Jede Einheit ist stets ungleich Null gesetzt, also auch der Name der benannten Zahl.

152. Satz. In der Zahlenlehre werden nur gleichbenannte Zahlen zugefügt und abgezogen.

153. Satz. Gleichbenannte Zahlen fügt man zu oder zieht man ab, indem man die Anzahlen zufügt oder abzieht und der Summe, bezüglich dem Reste den gleichen Namen giebt.

Beweis: 1. $ae + be + ce + de = (a + b + c + d)e$ (nach 90)

2. $ae - be = ae + (-be) = ae + (-b)e$
(nach 133) (nach 151)

$= (a + (-b))e = (a - b)e$
(nach 153₁) (nach 133)

154. Satz. Alle Sätze der ersten Ordnung der Zahlenlehre gelten auch für die benannten Zahlen.

Beweis: Alle Sätze der ersten Ordnung sind aus den beiden Grundformeln $a + (b + 1) = a + b + 1$ und $1 + 1' = 1' + 1$ abgeleitet, wo $1' = 1$ gesetzt war und sind für die Eins bewiesen. Nun ist aber

$$\begin{aligned} ae + (be + e) &= ae + (be + 1e) = [a + (b + 1)]e = (a + b + 1)e \\ &= ae + be + 1e \\ &= ae + be + e \end{aligned}$$

und ebenso auch, wenn wir die gleichen e mit e und e' bezeichnen,

$$\begin{aligned} e + e' &= 1e + 1'e = (1 + 1')e \\ &= (1' + 1)e \\ &= 1'e + 1e \\ &= e' + e \end{aligned}$$

also gelten die Grundformeln, also auch alle Sätze der ersten Ordnung für die benannten Zahlen.

Es sind hier zahlreiche Uebungen im Zufügen und Abziehen einfach benannter Zahlen vorzunehmen. Anleitung und zahlreiche Uebungsbeispiele bietet das Rechenbuch des Verfassers Heft I.

7. Das Vervielfachen und das Teilen, der Bruch und die Eigenschaften der Zahlen und Brüche.

A. Das Vervielfachen der Zahlen.

155. Erklärung. Das Vervielfachen, das Multiplizieren (gr. pollaplasiazēin, lat. multiplicare) heißt das Weben zweier reinen Zahlen;

die beiden Zahlen heißen die Fache oder Faktoren, das Zeug oder Produkt heist ein Vielfaches.

Will man in der Zahlenlehre alle Ordnungen der Größenknüpfung haben, also auch das Höheren oder Potenzieren, so muss für das Vervielfachen der Zahlen nach §2 Einigung der Fache oder Faktoren gelten. Man muss demnach, wenn man die Zahlenlehre voll entwickeln will, die Grundformel für Einigung der Fache oder Faktoren gelten lassen. Die Grundformel der Vertauschung $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ gilt selbstverständlich, da $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$, wenn $1' = 1$ ist. Die Formel $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ folgt unmittelbar aus §8.

Grundformeln der Vervielfachung.

156.

$$\begin{aligned} (a + 1) \cdot b &= ab + 1 \cdot b & a(b + 1) &= ab + a \cdot 1 \\ 1 \cdot 1' &= 1' \cdot 1 & a \cdot 1 &= 1 \cdot a = a \end{aligned}$$

Für die Vervielfachung der Zahlen gelten die Grundformeln des Einwebens und Verwebens oder der Einigung und Vertauschung der Fache oder Faktoren.

Aus der Grundformel des Vervielfachens folgt unmittelbar das Einmaleins $1 \cdot 2 = 2$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= (1 + 1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4 \\ 3 \cdot 2 &= (2 + 1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4 + 2 = 6 \\ 4 \cdot 2 &= (3 + 1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6 + 2 = 8 \\ 5 \cdot 2 &= (4 + 1) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8 + 2 = 10 \\ 6 \cdot 2 &= (5 + 1) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 10 + 2 = 12 \\ 7 \cdot 2 &= (6 + 1) \cdot 2 = 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = 14 \\ 8 \cdot 2 &= (7 + 1) \cdot 2 = 7 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 14 + 2 = 16 \\ 9 \cdot 2 &= (8 + 1) \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 16 + 2 = 18 \\ 10 \cdot 2 &= (9 + 1) \cdot 2 = 9 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 18 + 2 = 20 \end{aligned}$$

Und in gleicher Weise das ganze Einmaleins.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier Zahlen erhält ein Plus-157. zeichen, wenn beide Zahlen gleiche Zeichen, ein Strichzeichen, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben oder

$$\begin{aligned} (+ a)(+ b) &= + ab = (- a)(- b) \\ (- a)(- b) &= + ab = (+ a)(+ b) \\ (+ a)(- b) &= - ab = (- a)(+ b) \\ (- a)(+ b) &= - ab = (+ a)(- b) \end{aligned}$$

Beweis: Die Zeichen der beiden Zahlen können sein

$$1, ++ \quad 4, -- \quad 2, +- \quad 3, -+$$

dies gibt vier Fälle für den Beweis.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall: } (+ a)(+ b) &= ab && (\text{nach } 70) \\ &= + ab && (\text{nach } 70) \\ 2. \text{ Fall: } (+ a)(- b) &= a(- b) + ab - ab && (\text{nach } 70 \text{ und } 129) \\ &= a(- b + b) - ab && (\text{nach } 89) \\ &= a \cdot 0 - ab && (\text{nach } 135) \\ &= - ab && (\text{nach } 94) \end{aligned}$$

3. Fall: $(-a)(+b) = -ab$ folgt ebenso wie 2. Fall.

4. Fall: $(-a)(-b) = ab - ab + (-a)(-b)$ (nach 129)
 $= ab + (+a)(-b) + (-a)(-b)$
 (nach 157, 2)
 $= ab + (+a + (-a))(-b)$ (nach 89)
 $= ab + 0$ (nach 133 und 135)
 $= ab$ (nach 134)

158. **Satz.** $(-1)a = -a$

Jede Zahl erhält mit der Stricheins vervielfacht entgegengesetztes Zeichen.

159. **Satz.** Das Zeug oder Produkt mehrer Zahlen erhält ein Pluszeichen wenn $2a$ Fache oder Faktoren ein Strichzeichen enthalten, dagegen ein Strichzeichen, wenn $2a + 1$ Fache ein Strichzeichen enthalten,

Beweis: Fortleitend

1. Der Satz gilt nach 157, wenn das Zeug nur 2 Fache enthält.

2. Wenn der Satz für ein Zeug von n Fachen A_n gilt, so gilt er auch für das Zeug $A_n a_{n+1}$, welches ein Fach mehr enthält. Denn sei $a_{n+1} = +b$, d. h. enthalte es ein Pluszeichen, so gilt der Satz nach der Annahme. Enthalte dagegen $a_{n+1} = -b$ ein Strichzeichen und habe A_n $2a$ Fache mit Strichzeichen, so hat nach der Annahme A_n ein Pluszeichen, sei also in diesem Falle $A_n = +c$. so ist $A_n a_{n+1} = (+c)(-b) = -cb$, nach 157; dann hat also das Zeug $A_n a_{n+1}$ $2a + 1$ Fache mit Strichzeichen und erhält ein Strichzeichen. Habe dagegen A_n $2a + 1$ Fache mit Strichzeichen, so hat nach der Annahme A_n ein Strichzeichen, sei also in diesem Falle $A_n = -c$, so ist $A_n \cdot a_{n+1} = (-c)(-b) = +cb$ nach 157; dann hat also das Zeug $A_n a_{n+1}$ $2a + 2$ Fache mit Strichzeichen und erhält ein Pluszeichen.

3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

160. **Gesetz der Vervielfachung.** In jeder Zahlenknüpfung durch Vervielfachen kann man ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und die Malklammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Fache (der Faktoren) beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Fachs (des einen Faktors) mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt. Das Zeug ist wieder eine Zahl. Jedes Zeug oder Produkt von mehrern Fachen oder Faktoren erhält ein Pluszeichen, wenn $2a$ Fache ein

Strichzeichen enthalten, dagegen ein **Strichzeichen**, wenn $2a + 1$ Fache ein **Strichzeichen** enthalten.

Beweis: Da die Grundformeln des Einwebens und des Verwebens für das Vervielfachen nach 156 gelten, so folgt daraus unmittelbar das Gesetz des Verwebens nach 107. Da ferner für das Zufügen der Zahlen nach 125 und 122 die trennbare Einfügung gilt, so gilt nach 159 auch der zweite Teil des Satzes.

Satz. Eine Ziffer n ter Stelle vervielfacht man mit einer Ziffer 161. m ter Stelle, indem man die beiden Ziffern nach dem Einmaleins vervielfacht und dem Ergebnisse die $n + m$ te Stelle giebt.

$$\text{Beweis: } (a \cdot \overbrace{100\dots}^n) (b \cdot \overbrace{10\dots}^m) = (a \cdot b) (\overbrace{100\dots}^n \cdot \overbrace{10\dots}^m)$$

nach 160.

Es ist aber $\overbrace{100\dots}^n$ gleich 1 auf der n ten Stelle nach 117,

ebenso ist $\overbrace{100\dots}^n \cdot \overbrace{10\dots}^m$ gleich 1 auf der $n + m$ ten Stelle nach 117;

also ist $(a \cdot \overbrace{100\dots}^n) (b \cdot \overbrace{10\dots}^m) = ab$ auf der $n + m$ ten Stelle.

Satz. Das Vervielfachen einer einziffrigen mit einer mehr- 162. ziffrigen Zahl. Eine mehrziffrige Zahl vervielfacht man mit einer einziffrigen Zahl, indem man, mit der niedrigsten Stelle beginnend, die Ziffer jeder Stelle mit der Zahl vervielfacht, den Zeugen oder Produkten die entsprechende Stelle giebt und sie zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

$$\begin{array}{rcl} \text{Beispiel: } 327 \times 8 & = & 7 \times 8 = 56 \\ & & 20 \times 8 = 16 \\ & & 300 \times 8 = 24 \\ & & \hline & & 2616 \end{array}$$

Satz. Das Vervielfachen mehrziffriger Zahlen. Eine Zahl ver- 163. vielfacht man mit einer mehrziffrigen Zahl, indem man sie mit der Ziffer jeder Stelle einzeln vervielfacht, die Zeuge um soviel Stellen erhöht, als die betreffende Ziffer rechts Stellen neben sich hat und die Zeuge zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

$$\begin{array}{rcl} \text{Beispiel: } 3273 \times 725 & = & 8273 \\ & & 725 \\ & & \hline & & 16865 \\ & & 6546 \\ & & \hline & & 22911 \\ & & \hline & & 2372925 \end{array}$$

Wenn die eine der Zahlen in zwei einziffrige Fache oder Faktoren zerlegt werden kann, so kann man die andre Zahl erst mit dem einen, und das Ergebnis dann mit dem andern Fache vervielfachen; denn $a(bc) = (ab)c$. z. B. $54215 \times 72 = (54215 \times 8) \times 9$. Es ist dieser Weg bisweilen bequemer.

164. **Satz.** Für das Vervielfachen der Zahlen gilt trennbare Knüpfung oder: Wenn $ac = bc$ (Annahme), so ist $a = b$ (Folgerung) oder: je zwei Zahlen a und b , welche mit derselben Zahl c vervielfacht, gleiche Zeuge oder Produkte geben, sind einander gleich, sofern die Gröse c ungleich Null ist.

Beweis: 1. Das Zeug $ac = bc$ sei Null; dann ist, da c ungleich Null ist, nach 94 $a = 0$ und $b = 0$, d. h. $a = b$.

2. Das Zeug $ac = bc$ sei ungleich Null; dann nehme an $a = b + d$, so ist

$$\begin{aligned} bc &= ac = (b + d)c && \text{(nach Annahme)} \\ &= bc + dc && \text{(nach 89),} \end{aligned}$$

d. h. dc eine Gröse, welche zugefügt den Werth von bc nicht ändert, d. h. nach 72 ist $dc = 0$, und, da c ungleich Null ist, nach 94 $d = 0$, d. h. $a = b$.

Beispiel: Sei $7a = 7b$, so ist $a = b$, sei $8(2 + 3) = 8 \cdot 5$ so ist $2 + 3 = 5$.

B. Das Theilen der Zahlen.

a. Das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen.

165. **Erklärung.** Das Theilen, das Dividiren, (gr. die *parabolé*, lat. die *divisio*) der Zahlen heist die dem Vervielfachen der Zahlen entsprechende Trennung, wo das Zeug (Produkt) $a = bc$ oder $a = ob$ und der eine Fach (der eine Faktor) b gegeben ist, und der andre Fach c gesucht wird. Der gegebene Fach oder Faktor muss stets ungleich Null sein.

Das Zeug oder Produkt a , welches geteilt werden soll, heist die zu teilende Gröse, (der *dividendus*), die teilende Gröse b heist der Teiler (der *divisor*), das Ergebniss des Teilens heist der Quote (der *quotiens*); den Quoten nennt man auch einen Bruch, die zu teilende Gröse den Zähler, den Teiler den Nenner des Bruches.

Der Fach (der Faktor) und der Teiler (der Divisor) heissen mit gemeinsamem Namen die Vorzahlen (die Koeffizienten) eines Gliedes.

166. **Erklärung.** Das Zeichen des Teilens ist ein Doppelpunkt gelesen „durch“ oder auch ein wagerechter Teilstrich, über welchem die

zu teilende GröÙe und unter welchem der Teiler steht, z. B. $a : b$ gelesen „a geteilt durch b“, kurz „a durch b“, oder auch $\frac{a}{b}$ gelesen „a durch b“.

Die Zeichen „mal“ und „geteilt durch:“ heißen umgekehrte Zeichen. Eine GröÙe, welche ein Teilzeichen vor sich hat, heist eine TeilgröÙe; eine Klammer, vor welcher ein Teilzeichen steht, heist eine Teilklammer; der wagerechte Teilstrich gilt als Teilklammer für alle unter demselben stehenden GröÙen. z. B. $1 : a$ oder $\frac{1}{a}$ ist eine TeilgröÙe; $a : (bc)$ und $a : (b + c)$ oder auch $\frac{a}{bc}$ und $\frac{a}{b + c}$ sind Teilkammern.

Bei dem Teilstriche muss man auf folgenden eigentümlichen Gebrauch achten. Es wird $\frac{ab}{c} = ab : c$, dagegen $a \frac{b}{c} = a (b : c)$ gesetzt.

Grundformel des Teilens:

167.

$$a = a : b : b = \frac{ab}{b} \quad a = a : b \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b.$$

Mit derselben GröÙe ungleich Null weben und teilen, bez. teilen und weben ändert die GröÙe nicht.

Beweis: Unmittelbar aus 49.

Satz. $a : (:b) = a : (\cdot b) = a : b$ und $a : (:b) = a \cdot (\cdot b) = a \cdot b$. 168.

Mit einer TeilgröÙe webt man, indem man durch die entsprechende MalgröÙe teilt und durch eine TeilgröÙe teilt man, indem man mit der entsprechenden MalgröÙe webt und statt mit einer MalgröÙe zu weben bez. zu teilen, kann man mit der GröÙe ohne Vorzeichen weben bez. teilen.

Beweis: Unmittelbar aus 51.

Satz. $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + a_3 : b + \dots + a_n : b$. 169.

Einen Gliederausdruck (ein polynómos) teilt man durch eine GröÙe, indem man jedes Glied durch die GröÙe teilt und die entstandenen Quoten (Quotienten) einfügt.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) : b &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (:b) \quad (\text{nach 168}) \\ &= a_1 \cdot (:b) + a_2 \cdot (:b) + \dots + a_n \cdot (:b) \\ &\quad (\text{nach 90}) \\ &= a_1 : b + a_2 : b + \dots + a_n : b \quad (\text{nach 168}) \end{aligned}$$

Zu bemerken ist hier, dass man nie den Teiler in seine Glieder zerlegen

darf, sondern stets durch den ganzen Teiler teilen muss. Man muss auf diese Regel genau achten, wenn man nicht in die größten Fehler verfallen will.

170. Satz. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

Brüche mit gleichem Nenner fügt man zu oder zieht man ab, indem man die Zähler entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebnis durch den Nenner teilt.

Beweis: Unmittelbar aus 169.

171. Satz: $:(a) = :(\cdot a) = :a$ $:(a) = \cdot(\cdot a) = \cdot a$ wo $a \geq 0$.
Mit einer Teilgröße vervielfacht man, indem man durch die entsprechende Maßgröße teilt und durch eine Teilgröße teilt man, indem man mit der entsprechenden Maßgröße vervielfacht oder
Statt „geteilt durch geteilt durch“ kann man „mal“ und statt „mal geteilt durch“ oder statt „geteilt durch mal“ kann man „geteilt durch“ setzen.

Beweis: Nach 168 ist

$$b \cdot (a) = b : (\cdot a) = b : a \quad b : (a) = b \cdot \bar{a}$$

Da nun nach 168 auch

$$b \cdot c = b \cdot (\cdot c) \quad b : c = b \cdot (\cdot c) \quad \text{ist, so kann}$$

man die obige Formel auch schreiben

$$b \cdot (:(a)) = b : (\cdot(a)) = b : (a) \quad b : (:(a)) = b \cdot (\cdot a)$$

mithin ist nach 164, da in den gleichen Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist $:(a) = :(\cdot a) = :a$ und $:(a) = \cdot a$.

172. Satz. $a \cdot 1 = a : 1 = \frac{a}{1} = a$

Mit Eins vervielfachen oder durch Eins teilen, ändert die Zahl nicht.

Beweis: Es ist $a \cdot 1 = a$ nach 98. Ebenso ist aber auch

$$a : 1 = a \cdot 1 : 1 \quad (\text{nach 98})$$

$$= a \quad (\text{nach 167})$$

Satz. $1 = a : a = :a \cdot a$ wo $a \geq 0$.

173. Der Bruch zweier gleichen Zahlen ist Eins, und wenn der Bruch zweier Zahlen Eins ist, so sind die Zahlen gleich.

Beweis: Nach 98 ist $b \cdot 1 = b$, nach 167 ist $b \cdot a : a = b$ und auch $b : a \cdot a = b$. Da nun nach 155 beim Vervielfachen Einigung gilt, so ist auch

$b \cdot a : a = b \cdot (a : a) = b$ und ist $b : a \cdot a = b \cdot (:(a \cdot a)) = b$, also ist $b \cdot 1 = b \cdot (a : a) = b \cdot (:(a \cdot a))$ mithin ist nach 164, da in den gleichen

Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist $1 = a : a = : a \cdot a$.

Satz. $0 : a = 0$ 174.

Ein Bruch, in welchem die zu teilende GröÙe Null ist, ist Null.

Beweis: $0 : a = 0 \cdot (1 : a) = 0 \cdot (: a)$ (nach 171)
 $= 0$ (nach 94)

Satz. Wenn $a : b = 0$ ist oder wenn $a \cdot b = 0$ und $b > 0$ ist 175.
 (Annahme), so ist $a = 0$ (Folgerung). In jedem Bruche, der Null ist, ist der Zähler Null und in jedem Zeuge oder Produkte zweier GröÙen ist der eine Fach Null.

Beweis: 1. Wenn $ab = 0$ ist und $b > 0$ ist, so ist $a = 0$
 (nach 94)

2. Wenn $a : b = 0$, so ist $a = a : b \cdot b$ (nach 167)
 $= 0 \cdot b$ (nach Annahme)
 $= 0$ (nach 94)

Erklärung. Die Bruchseinheit heist Eins geteilt durch eine 176.
 GröÙe a , welche ungleich Null ist. Das Zeichen der Bruchseinheit ist

$$\frac{1}{a} \text{ oder } 1 : a.$$

Diese Form der TeilgröÙe ist die übliche und durfte daher nicht übergangen werden, die Beweise werden allerdings viel leichter und mit den Sätzen der andern Rechnungsarten übereinstimmender, wenn man die von mir gewählte Form vorzieht.

Satz. $\frac{1}{a} = 1 : a = : a$ $\frac{m}{a} = m \cdot \frac{1}{a}$ 177.

Die Bruchseinheit „Eins durch a “ ist gleich der TeilgröÙe „geteilt durch a “. Alle Sätze, welche für die TeilgröÙe gelten, gelten also auch für die Bruchseinheit.

Beweis: Es ist $b \cdot (: a) = b : a$ (nach 168)
 $= b \cdot 1 : a = b \cdot 1 \cdot (: a)$ (nach 98 und 171)
 $= b \cdot (1 \cdot (: a)) = b \cdot (1 : a)$ (nach 171 und 160)

mithin ist nach 164, da in den gleichen Zeugen der erste Fach (Faktor) b gleich ist, auch der zweite Fach gleich, d. h. es ist
 $: a = 1 : a = \frac{1}{a}$.

Satz. $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$ oder $1 : (-a) = -(1 : a)$. 178.

In einer Bruchseinheit kann das Strichzeichen des Nenners vor die Bruchseinheit selbst gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: Es } 1 : (-a) &= [(1 : a) \cdot a] : (-a) && (\text{nach 165}) \\
 &= [- (1 : a) \cdot (-a)] : (-a) && (\text{nach 157}) \\
 &= - (1 : a) && (\text{nach 167})
 \end{aligned}$$

179. Satz.
$$\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

In jedem Bruche kann das Strichzeichen des Nenners vor den Bruch gesetzt werden oder

Jeder Bruch lässt sich auf eine Form bringen, dass der Nenner eine Pluszahl ist.

Beweis: Unmittelbar nach 178.

180. Gesetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre. In jeder Knüpfung von Zahlen durch Vervielfachung und Teilung (Multiplikation und Division) kann man ohne Aenderung des Wertes die Mal- und Teilzeichen in der Teilklammer beliebig weg lassen oder setzen und die Ordnung der Fache und Nenner beliebig ändern. Das Ergebniss der Verknüpfung ist wieder eine Zahl, und zwar hat dieselbe ein Pluszeichen, wenn 2a Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten, dagegen ein Strichzeichen, wenn 2a + 1 Fache oder Nenner ein Strichzeichen enthielten.

Beweis: Der erste Teil folgt unmittelbar aus 62. Der zweite Teil, dass das Ergebniss der Knüpfung eine Einfachgröse ist, folgt aus 109, wenn man nach 171 statt jedes Nenners mit der umgekehrten Gröse vervielfacht. Der letzte Teil des Satzes folgt ebenso aus 160 und 171.

$$\text{Beispiele: } 5 \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{7} \right) = \frac{5 \cdot 3}{8} + \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{15}{8} + \frac{10}{7}.$$

$$7 \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) = \frac{7 \cdot 2}{3} - \frac{7 \cdot 5}{9} = \frac{14}{3} - \frac{35}{9}.$$

$$3 : \frac{2}{5+3} = 3 \cdot \frac{5+3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2};$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{5+3} \right) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

$$7 : \frac{3}{7-3} = 7 \cdot \frac{7-3}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3} - \frac{7 \cdot 3}{3};$$

$$7 \cdot \frac{3}{7-3} = \frac{7 \cdot 3}{7-3} = \frac{7 \cdot 3}{4}$$

181. Satz.
$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$$

Durch einen Bruch teilt man, indem man den Bruch umkehrt und vervielfacht.

Beweis: Unmittelbar aus 180.

Beispiele: $5 : \frac{1}{3} \cdot 8 : \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = (5 \cdot \frac{1}{5}) (\frac{1}{6} \cdot 8) : \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot 8 = 4.$

$$5 \cdot \frac{1}{4} : (\frac{7}{8}) = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{7}$$

$$7 \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 \cdot 12 : (4 \cdot 21 \cdot \frac{2}{5}) = 5 \cdot 7 \cdot 12 : \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 12}{21 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{8} \\ = \frac{25}{16}$$

Satz.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

182.

Man kann einen Bruch ohne Aenderung seines Wertes erweitern und heben, d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl ungleich Null vervielfachen und teilen.

Beweis: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1$ (nach 172)

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$$
 (nach 173)

$$= \frac{ac}{bc}$$
 (nach 180)

Beziehungsgesetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre. 183.
In jedem Zeuge von Fachen und Nennern (oder in jedem Produkte von Faktoren und Divisoren) kann man ohne Aenderung des Wertes jedes Stück des einen Fachs mit jedem des andern vervielfachen und durch jeden ganzen Nenner teilen und die erhaltenen Zeuge zufügen.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 180.

Anm. Dagegen darf man nicht durch die Stücke des Nenners teilen.

Rechenregel fürs Teilen. Beim Teilen der Zahlen nimmt man 184. den Nenner sovielmals, als er in den höchsten Stellen des Zählers enthalten ist, der Quote (Quotient) erhält die niedrigste von diesen Stellen.

Das Zeug zieht man von den genannten Stellen des Zählers ab, fügt zu dem Reste die nächst niedere Stelle des Zählers, teilt wieder durch den ganzen Nenner und fährt so fort bis zur niedrigsten Stelle des Zählers. Was dann übrig bleibt, schreibt man als Bruch.

Beweis: Unmittelbar nach 183 und 169.

Beispiel: $\frac{3527}{15} : 15 = 235 \frac{2}{15}$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{52} \\ 45 \\ \underline{77} \\ 75 \\ \underline{2} \end{array}$$

An diesem Punkte ist wieder eine reiche Uebung im Rechnen dringend geboten, wenn man die Zahlenlehre wirklich praktisch verwerten und für das Leben fruchtbar machen will. Das Uebungsheft zur Zahlenlehre bietet dazu reiche Gelegenheit; weitere Uebungen bietet das Rechenbuch des Verfassers.

185. **Gemeinnenner.** Jede gegebene Reihe von Brüchen kann man auf einen Gemeinnenner bringen, welcher das Zeug oder Produkt der bisherigen Nenner ist, indem man jeden Bruch im Zähler wie im Nenner mit dem Zeuge der Nenner aller andern Brüche vervielfacht und teilt.

Beweis: Fortleitend oder induktorisch:

1. Der Satz gilt für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, denn es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad (\text{nach 182})$$

und ebenso $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

2. Wenn der Satz für n Brüche gilt, so dass

$$\frac{A}{B} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1} a_n b_{n+1}}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n b_{n+1}} \text{ ist, so gilt er auch für } n+1$$

Brüche;

denn es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B} \cdot 1 = \frac{A}{B} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} a_n b_{n+1} \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} \cdot b_n b_{n+1} \cdot b_{n+1}} \quad (\text{nach 182})$$

und ebenso ist

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 1 \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{B}{B} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1}}{b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1}} \quad (\text{nach 182})$$

3. Also gilt der Satz nach 23 ganz allgemein.

$$\begin{array}{l} \text{Beispiel: } \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \quad ; \quad \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \\ \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \quad ; \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \end{array}$$

186. **Zufügen und Abziehen der Brüche.** Mehrere Brüche kann man zufügen oder abziehen (addiren oder subtrahiren), indem man

sie auf gleichen Nenner bringt, dann die Zähler zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch den Nenner teilt, oder

Mehre Brüche von ungleichem Nenner kann man zufügen oder abziehen, indem man jeden Zähler mit dem Zeuge (Produkte) aus den Nennern aller andern Brüche vervielfacht, die erhaltenen Zeuge entsprechend zufügt oder abzieht und das Ergebniss durch das Zeug sämtlicher Nenner teilt, oder

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_1 \pm P_2 \pm \dots \pm P_n}{P}, \text{ wo}$$

$$P_a = b_1 b_2 \dots b_{a-1} a_a b_{a+1} \dots b_n \quad P = b_1 b_2 \dots b_n \text{ gesetzt ist.}$$

Beweis: Unmittelbar nach 185.

Beispiel:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{168 + 160 - 105}{280} = \frac{223}{280}$$

Satz. Man kann jede durch Zufügen und Abziehen, Vervielfachen und Teilen von Zahlen erzeugte GröÙe, welche ungleich Null ist, als Einheit setzen, und gelten dann für alle aus dieser erzeugten Zahlen alle Gesetze der ersten und zweiten Ordnung der Zahlenlehre

Beweis: Unmittelbar nach 180 und 63.

b. Das Rechnen mit Zehntbrüchen (Dezimalbrüchen.)

Erklärung. Die Namen und Zeichen der Zehntbrüche 188. (der Dezimalbrüche). Um auch die Brüche durch die Ziffern einfach bezeichnen zu können, setzt man rechts neben der nullten Stelle, wo die Einer stehen, ein Komma. Die Stelle rechts neben dem Komma heist die erste Bruchstelle, die ate Stelle rechts neben dem Komma heist die ate Bruchstelle. Jede Ziffer hat auf der $a + 1$ ten Bruchstelle ein zehntel soviel Wert als auf der aten Bruchstelle.

Die ate Bruchstelle heist auch die — ate Stelle.

Die Eins heist auf der ersten Bruchstelle ein Zehntel, (Zeichen $0_{,1}$), auf der zweiten Bruchstelle ein Hundertel (Zeichen $0_{,01}$), auf der dritten Bruchstelle ein Tausendtel (Zeichen $0_{,001}$), auf der vierten Bruchstelle ein Zehntausendtel (Zeichen $0_{,0001}$), auf der fünften Bruchstelle ein Hunderttausendtel (Zeichen $0_{,00001}$), und auf der sechsten Bruchstelle ein Milliontel (Zeichen $0_{,000001}$).

Beim Lesen der Zehntbrüche lieÙt man die Zahl rechts vom Komma als ganze Zahl und giebt ihr den Namen der letzten Bruchstelle.

Zwei Zehntbrüche heissen gleichnamig, wenn ihre letzten Ziffern auf der gleichen Bruchstelle stehen.

Beispiele: $0,_{347}$ gelesen dreihundert vierzig und sieben Tausendtel.

$0,_{0025}$ gelesen zwanzig und fünf Zehntausendtel.

$0,_{0508}$ gelesen fünfhundert und acht Zehntausendtel.

$0,_{000008}$ gelesen acht Milliontel.

Es sind $0,_{252}$ und $0,_{008}$ gleichnamig. Ebenso sind $0,_{90}$ und $0,_{25}$ gleichnamig.

189. **Satz.** In jedem Zehntbrüche (Dezimalbrüche) kann man, wenn das Komma seine Stelle behält, rechts und links beliebig viele Nullen anhängen ohne Aenderung des Wertes.

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiel: Es ist $0,8 = 0,800 = 000,8 = 0,80000$.

190. **Satz.** Mehrere Zehntbrüche (Dezimalbrüche) macht man gleichnamig, indem man allen durch Anhängen von Nullen gleich viel Stellen rechts vom Komma gibt.

Beweis: Unmittelbar aus 189.

Beispiele: $3,_{23}$ $52,_{756}$ $6,_{8273}$ und $0,_{00562}$ werden gleichnamig $3,_{23000}$ $52,_{75600}$ $6,_{82730}$ und $0,_{00562}$.

191. **Satz.** Zufügen der Zehntbrüche (Dezimalbrüche). Zehntbrüche (Dezimalbrüche) fügt man zu, indem man sie gleichnamig macht, sie wie ganze Zahlen zufügt und der Summe den gleichen Namen giebt, wie den Stücken.

Beweis: Unmittelbar aus 153.

Beispiel: Es sei zu fügen $8,5 + 7,_{306} + 0,_{2253}$, so ergibt sich

$8,_{5000}$	Ebenso $8,_{0800}$	Ebenso $8,_{3567}$
$7,_{3060}$	$27,_{4020}$	$0,_{2378}$
$0,_{2253}$	$8,_{0637}$	$5,_{0236}$
$16,_{0313}$	$38,_{5457}$	$13,_{6181}$

Es empfiehlt sich hier eine reiche Uebung im Zufügen. Der geübte Rechner darf beim Zufügen nicht mehr die Stücke nennen, welche er zufügt, sondern muss kurz rechnen, d. h. gleich die Summe nennen, welche herauskommt, also z. B. im letzten Beispiele fügt er die Zehntausendtel also zu: 6, 14, 21, 1 hin; 2, 5, 12, 18, 8 hin; 1, 3, 6, 11, 1 hin; 1, 3, 6, 6 hin; 5, 13, 13 hin. Er lernt dies, indem er ganze Seiten eines Buches aufrechnet. Beim Buchführen wird jede Seite von unten nach oben aufgerechnet, dann nochmals zur Probe, ob richtig gerechnet ist, von oben nach unten durchgerechnet, und, wenn die Summe stimmt, diese als Uebertrag auf die folgende Seite vorgetragen und beim Zufügen mitgerechnet. Jeder Gebildete soll dies mit größter Leichtigkeit ausführen können. Das Uebungsbuch zur Zahlenlehre und das Rechenheft II des Verfassers bieten zahlreiche Gelegenheit zur Uebung.

192. **Satz.** Abziehen der Zehntbrüche (Dezimalbrüche). Zehntbrüche (Dezimalbrüche) zieht man ab, indem man sie gleichnamig macht, sie wie ganze Zahlen abzieht und dem Reste den gleichen Namen giebt, wie dem Vorrat und Abzug.

Beweis: Unmittelbar aus 153.

Beispiel: $28_{,0250}$	$12_{,08528}$	$25_{,54000}$
$\underline{3,7806}$	$\underline{8,92000}$	$\underline{8,59374}$
$24_{,2444}$	$3,16528$	$16,94822$

Auch hier darf der geübte Rechner beim Abziehen nicht erst den Vorrat und Abzug nennen, sondern muss kurz rechnen, d. h. jedesmal nur den Rest nennen, der herauskommt.

Satz. Vervielfachen mit zehn, hundert, tausend, Million. 193.

Eine Zahl vervielfacht man mit zehn, indem man das Komma eine Stelle nach rechts rückt, mit hundert, indem man es zwei Stellen, mit tausend, indem man es drei Stellen, mit Million, indem man es sechs Stellen nach rechts rückt.

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiele: $8_{,56} \times 10 = 85,6$ $3_{,56} \times 100 = 356,$
 $2_{,37} \times 1000 = 2370$ $0_{,0034567} \times 1000000 = 3456,7.$

Satz. Teilen durch zehn, hundert, tausend, Million. 194.

Eine Zahl teilt man durch zehn, indem man das Komma eine Stelle nach links rückt, durch hundert, indem man es zwei Stellen, durch tausend, indem man es drei Stellen, durch Million, indem man es sechs Stellen nach links rückt.

Beweis: Unmittelbar aus 188.

Beispiele: $7 : 10 = 0,7$ $8 : 100 = 0,08$ $5_{,36} : 1000 = 0,00536$
 $233_{,45} : 1000000 = 0,00023345.$

Satz. Eine Zahl vervielfacht man mit $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ u. f. w., 195. indem man das Komma um soviel Stellen nach links rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben sich hat.

Beweis: Unmittelbar aus 194.

Beispiele: $8 \cdot \frac{1}{10} = 0,8$ $258 \times \frac{1}{100} = 2,58$
 $38 \times \frac{1}{1000} = 0,038$ $5 \cdot \frac{1}{1000000} \times 0,000005$

Satz. Eine Zahl teilt man durch $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ u. f. w., in- 196. dem man sie mit 10, 100, 1000 u. f. w. vervielfacht, oder indem man das Komma um soviel Stellen nach rechts rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben sich hat.

Beweis: Unmittelbar nach 181.

Beispiele: $8 : \frac{1}{10} = 80$ $25 : \frac{1}{100} = 2500$
 $0,03 : \frac{1}{1000} = 30$ $32_{,5} : \frac{1}{1000000} = 32500000.$

Satz. Vervielfachen eines Zehntbruches (Decimal- 197. bruches). Einen Zehntbruch (Decimalbruch) vervielfacht man mit einer ganzen Zahl, indem man beide Zahlen als ganze Zahlen ver-

vielfacht und dem Zeuge oder Produkte dann soviel Stellen rechts vom Komma giebt, als der Dezimalbruch hatte.

Beweis: Der Zehntbruch ist nach 188 das Zeug oder Produkt der Zahl als ganzen Zahl und der Bruchseinheit des Zehntbruches (Dezimalbruches). Nach 180 kann man die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändern. Man kann also zunächst die beiden Zahlen als ganze Zahlen vervielfachen und dann das Zeug mit der Bruchseinheit des Zehntbruches (Dezimalbruches) vervielfachen.

Beispiel: $287 \times 51_{,36} = 287 \times 5136 \times \frac{1}{100} = 1473032 \cdot \frac{1}{100} = 14730_{,32}$.

198. **Satz. Vervielfachung zweier Zehntbrüche (Dezimalbrüche.)** Zwei Zehntbrüche (Dezimalbrüche) vervielfacht man, indem man sie als ganze Zahlen vervielfacht und dem Zeuge oder Produkte soviel Stellen rechts vom Komma giebt, als beide Dezimalbrüche zusammen hatten.

Beweis: Die beiden Zehntbrüche schreibe man als Zeuge oder Produkte einer ganzen Zahl des Zählers mit der Bruchseinheit des Nenners. Dann vervielfache man nach 180 die beiden ganzen Zahlen, da die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ist. Demnächst vervielfache man das Zeug mit der ersten Bruchseinheit nach 195, indem man das Komma um soviel Stellen nach links rückt, als die Eins im Nenner Nullen rechts neben sich hat. Endlich vervielfache man das hierdurch erhaltene Zeug mit der zweiten Bruchseinheit nach 195, indem man das Komma abermals um soviel Stellen nach links rückt, als nunmehr die Eins im Nenner Nullen rechts neben sich hat; dann hat also das Zeug oder Produkt der beiden ganzen Zahlen soviel Stellen rechts vom Komma, als beide Zehntbrüche zusammen hatten.

Beispiele: $5_{,27} \times 8_{,363} = 527 \times \frac{1}{100} \times 8363 \times \frac{1}{1000}$
 $= 527 \times 8363 \times \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} = 4407301 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000}$
 $= 44073_{,01} \times \frac{1}{1000} = 44_{,07301}$.

199. **Satz. Teilen durch Zehntbrüche (Dezimalbrüche).** Eine Zahl teilt man durch einen Dezimalbruch, indem man ihr soviel Stellen rechts vom Komma giebt, als der Zehntbruch Stellen rechts vom Komma hat und sie dann wie ganze Zahlen teilt.

Beweis: Habe der Zehntbruch n Stellen rechts vom Komma, so giebt man der Zahl nach 189 auch n Stellen rechts vom Komma. Da nun die Ordnung der Fache oder Faktoren und der Nenner nach 180 beliebig ist, so kann man erst die ganzen Zahlen durch einander

teilen und dann die beiden Nenner durch einander teilen, da aber die letztern beide gleich sind, so geben die beiden Nenner, der eine durch den andern geteilt, nach 173 Eins.

$$\begin{aligned}\text{Beispiel: } 1652 : 2,36 &= 1652,00 : 2,36 \\ &= 165200 : 236 \\ &= 700.\end{aligned}$$

Satz. Einen Zehntbruch (Dezimalbruch) teilt man durch einen 200. Zehntbruch, indem man beiden gleichviel Stellen rechts vom Komma giebt und sie wie ganze Zahlen teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 199.

$$\text{Beispiel: } 3,07 : 5,6 = 3,07 : 5,60 = 307 : 560 = 0,548214.$$

Alle diese Rechnungen mit Zehntbrüchen (Dezimalbrüchen) sind bis zur vollsten Geläufigkeit einzuüben. Es empfiehlt sich dazu des Verfassers Uebungsheft zur Zahlenlehre, bezüglich sein Rechenheft II.

C. Die Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Satz. Eine Vergleichung ändert sich nicht, wenn man auf beiden 201. Seiten mit gleichen Pluszahlen vervielfacht oder teilt; sie wird aber entgegengesetzt, wenn man auf beiden Seiten mit gleichen Strichzahlen vervielfacht oder teilt.

Beweis: 1. Es sei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl nach 142 und sei c eine Pluszahl, so ist nach 180 $(a - b) c = ac - bc$ eine Pluszahl, mithin $ac > bc$. Ebenso ist nach 183 und 180 $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ eine Pluszahl, mithin $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

2. Es sei $a > b$, d. h. $a - b$ eine Pluszahl, dagegen c eine Strichzahl; dann ist nach 157 $(a - b) c = ac - bc$ eine Strichzahl, d. h. $bc - ac$ eine Pluszahl und nach 142 $ac < bc$. Ebenso ist dann $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ nach 180 eine Strichzahl, d. h. $\frac{b}{c} - \frac{a}{c}$ eine Pluszahl und $ac < bc$.

$$\begin{aligned}\text{Beispiel: Da } \frac{5}{3} > \frac{3}{4} \text{ ist, so ist auch } \frac{5 \cdot 7}{3} > \frac{3 \cdot 7}{4}; \text{ dagegen ist} \\ \frac{5}{3} \cdot (-3) < \frac{3}{4} \cdot (-3) \text{ d. h. es ist } -5 < -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Satz. Wächst in einem Zeuge oder Produkte zweier Zahlgrößen 202. die eine der Größen, während die andre gleich bleibt und eine Pluszahl ist, so wächst auch das Zeug, und umgekehrt

Wenn ein Zeug oder Produkt zweier Zahlgrößen wächst, während die eine der Größen gleich bleibt und eine Plusgröße ist, so wächst auch die andre der Größen.

Beweis: Unmittelbar nach 201.

Beispiele: Es ist $(7 + 1) 3 > 7 \cdot 3$.

Es ist $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) 7 > \frac{1}{3} \cdot 7$.

203. **Satz.** Wachfen in einem Zeuge oder Produkte mehrer Plusgrößen eine oder mehre der Größen, während keine kleiner wird, so wächst auch das Zeug.

Beweis: Lässt man zunächst nur eine GröÙe wachfen, während die andern gleich bleiben, so wächst auch nach 202 das Zeug. Lässt man jedesmal in dem so erhaltenen Zeuge die eine GröÙe wachfen, während die andern gleich bleiben, bis alle GröÙen, welche wachfen sollen, gröÙer geworden find, so wächst auch jedesmal das Zeug, und man erhält eine Reihe von Zeugen, in welcher jedes nächstfolgende gröÙer als das vorhergehende ist, also ist nach 144 auch das letzte gröÙer als das erste.

Beispiel: $(3 + 2)(5 + 3) 7 > 3 \cdot 5 \cdot 7$.

204. **Satz.** Das Zeug oder Produkt mehrer Pluszahlen, ist, wenn die einzelnen Zahlen kleiner als Eins find, auch kleiner als Eins, wenn die einzelnen Zahlen gröÙer als Eins find, auch gröÙer als Eins.

Beweis: Unmittelbar aus 203.

Beispiele: $3 \cdot 2 > 1$ und $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} < 1$.

205. **Erklärung.** Eine echte Bruchzahl heist ein Bruch von Pluszahlen, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner.

206. **Satz.** Jede echte Bruchzahl $\frac{a}{b}$ ist kleiner als Eins, und jede Zahl welche kleiner ist als Eins, ist eine echte Bruchzahl.

Beweis: 1. Es sei $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, d. h. a und b Pluszahlen und $b > a$, so ist $b - a$ eine Pluszahl, also auch

$$\frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b} \text{ (nach 180) eine Pluszahl d. h. } \frac{a}{b} < 1.$$

2. Es sei a kleiner als 1, so ist $a = \frac{a}{1}$, nach 205 ein echter Bruch.

Beispiele: $\frac{7}{8} < 1$; $\frac{3}{4} < 1$; $\frac{5}{12} < 1$.

207. **Satz.** Das Zeug oder Produkt echter Bruchzahlen ist wieder eine echte Bruchzahl.

Beweis: Unmittelbar aus 204.

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} < 1$.

Satz. Wächst in einem Bruche von Plusgrößen, während der Zähler gleich bleibt, der Nenner, so nimmt der Bruch ab, und umgekehrt.

Nimmt ein Bruch von Plusgrößen ab, dessen Zähler gleich bleibt, so wächst der Nenner.

Beweis: 1. Wenn a , b und c Plusgrößen sind und $c > b$, d. h. $c - b$ eine Plusgröße, so ist $\frac{a(c-b)}{bc} = \frac{ac-ab}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ (nach 180) eine Plusgröße, also der Bruch $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$.

2. Wenn a , b und c Plusgrößen sind und $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$, so ist $\frac{a}{b} - \frac{a}{c}$ eine Plusgröße, also ist auch $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{ac-ab}{bc} = \frac{a(c-b)}{bc}$ eine Plusgröße und, da a , b und c Plusgrößen, auch $c - b$ eine Plusgröße (nach 180) d. h. $c > b$.

Beispiele: $\frac{3}{7} < \frac{3}{5}$; $\frac{3}{9} < \frac{3}{8}$.

a. Die Eigenschaften ganzer Pluszahlen.

Erklärung. Das Aufgehen: Man sagt, eine ganze Zahl a gehe in eine andre b auf, wenn es eine ganze Zahl c giebt, welche mit der ersten a vervielfacht die zweite b giebt, oder wenn $b = ac$, und zwar sagt man dann, a gehe in b c mal auf.

Beispiel: 8 geht in 56 siebenmal auf, 9 geht in 72 achtmal auf.

Satz. Eins geht in jede Zahl auf, und jede Zahl geht in sich selbst auf.

Beweis: Es sei a eine beliebige Zahl, dann ist $a = 1 \cdot a$, also u. f. w.

Satz. Eine Zahl a , welche in b aufgeht, ist nicht größer als b .

Beweis: Es seien a , b und c ganze Pluszahlen, d. h. jede Eins oder größer als Eins, und $b = ac$. Angenommen nun, dass $a > b$ wäre, so wäre auch $a - b$ eine Pluszahl, also auch $(a - b)c = ac - bc = b - bc$ eine Pluszahl.

Dies ist aber unmöglich, denn ist $c = 1$, so ist $b - bc = b - b = 0$, also keine Pluszahl, und ist $c > 1$, so ist nach 202 auch $bc > b$, mithin $b - bc$ eine Strichzahl, d. h. keine Pluszahl, also ist auch die Annahme unmöglich.

Satz. Zwei ganze Pluszahlen, welche gegenseitig in einander aufgehen, sind einander gleich.

Beweis: Da a in b aufgeht, so ist nach 211 a nicht $> b$, und da b in a aufgeht, so ist nach 211 auch a nicht $< b$, also ist nach 143 $a = b$.

213. **Satz.** Wenn eine Zahl a in eine zweite b n mal aufgeht und die zweite b in eine dritte c m mal aufgeht, so geht auch die erste in die dritte, und zwar nm mal auf.

Beweis: Da a in b n mal aufgeht, und da b in c m mal aufgeht, so ist $b = an$ und $c = b^m$, also ist $c = b^m = a^n = a(nb)$, d. h. a geht in c nm mal auf.

Beispiel: 5 geht in 40 achtmal, 40 geht in 280 siebenmal auf, also geht 5 in 280 auch 8×7 mal auf.

214. **Erklärung.** Das **Gemeinmas** oder das **gemeinschaftliche Mas** zweier Zahlen heist eine Zahl, welche in die beiden Zahlen aufgeht.
Einander fremd oder **primär** heissen zwei Zahlen, deren grösstes **Gemeinmas** eins ist.

Beispiele: Für 36 und 30 ist 6 das **Gemeinmas**; dagegen sind 6 und 7 einander fremd.

215. **Satz.** Das **Gemeinmas** zweier Zahlen ist auch ein **Gemeinmas** ihrer Summe, ihres Unterschiedes und jedes Gliederausdruckes dieser Zahlen, in dem nur ganze Zahlen als Fache oder Faktoren vorkommen.

Beweis: Es sei c das **Gemeinmas** von a und b und gehe in a m mal, in b n mal auf, d. h. es sei $a = mc$ und $b = nc$, so ist

$$1. \quad a + b = mc + nc = (m + n)c.$$

$$2. \quad a - b = mc - nc = (m - n)c.$$

3. Ein beliebiger Gliederausdruck der Zahlen a und b lässt sich ausdrücken durch die Form $S(\pm ad_m \pm be_n)$, wo d_m und e_n ganze Zahlen sind; es ist aber

$$\begin{aligned} S(\pm ad_m \pm be_n) &= S(\pm (mc) d_m \pm (nc) e_n) \\ &= S(\pm c(ad_m) \pm c(be_n)) && \text{(nach 180)} \\ &= c(S(\pm ad_m \pm be_n)) && \text{(nach 183)} \end{aligned}$$

wo $S(\pm ad_m \pm be_n)$ eine Summe ganzer Zahlen, also nach 131 wieder eine ganze Zahl, mithin c das **Gemeinmas** des gegebenen Gliederausdruckes.

Beispiele: 9 ist **Gemeinmas** von 63 und 72, also auch von $63 + 72 = 135$, von $72 - 63 = 9$, von $5 \cdot 63 - 2 \cdot 72 = 171$.

216. **Satz.** Wenn man aus einem gegebenen Pare von Pluszahlen a und b ein zweites Par dadurch ableitet, dass man die kleinere von der grössern abzieht und die kleinere und den Unterschied als zweites

Par setzt; wenn man auf gleiche Weise aus dem zweiten Pare ein drittes Zahlenpar ableitet und hiermit so lange fortfährt, als die beiden Zahlen eines Pares noch verschieden sind, so muss man zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen gelangen und jede derselben ist das grösste Gemeinmas der gegebenen Zahlen, und jedes Gemeinmas von a und b geht auch in dies grösste Gemeinmas auf.

Beweis: Es gehe c in a und in b auf, so geht es nach 215 auch in $a - b$ auf, dann auch in $b - (a - b) = 2b - a$, dann auch in $a - b - (2b - a) = 2a - 3b$, und sofort bis man zuletzt zu einem Pare gleicher Zahlen d gelangt. Dann geht nach 215 auch c in d auf. Es geht dann also jedes Gemeinmas von a und b auch in d auf. Andererseits ist aber auch jede Zahl eines vorhergehenden Pares eine Summe aus den Zahlen des folgenden, da die kleinere bleibt, und die grössere die Summe ist aus der kleinern und dem Unterschiede, also sind auch die gegebenen Zahlen a und b Summen der beiden gleichen p und p ; also ist auch jedes Gemeinmas von p und p ein Gemeinmas von a und b , d. h. da p Gemeinmas von p und p ist auch p das Gemeinmas von a und b , und zwar, da kein Gemeinmas von a und b grösser als p sein kann, das grösste.

Beispiel: Es seien gegeben 315 und 84. Dann ist $315 - 84 = 231$, $231 - 84 = 157$, $157 - 84 = 63$, $84 - 63 = 21$, $63 - 21 = 42$, $42 - 21 = 21$; also ist 21 das grösste Gemeinmas von 315 und 84 und gehen die andern Gemeinmase 3 und 7 sämtlich in 21 auf.

Satz. Wenn m das grösste Gemeinmas von a und b ist, so ist 217. mc das grösste Gemeinmas von ac und bc .

Beweis: Das grösste Gemeinmas von a und b findet man, indem man jedesmal die kleinere Grösse von der grössern abzieht und aus der kleinern und dem Unterschiede ein neues Par bildet. Sei b die kleinere, so erhält man also aus a und b das neue Par $a - b$ und b . Ganz auf gleiche Weise erhält man aus dem Pare ac und bc das neue Par $ac - bc = (a - b)c$ und bc . Das entsprechende neue Par aus ac und bc ist also c mal so gros als das aus a und b . Ganz auf gleiche Weise verhält es sich aber mit jedem neuen Pare, welches durch Abziehen der kleinern von der grössern Zahl gebildet wird. Auch das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus ac und bc gewonnen wird, ist also c mal so gros, als das letzte Par gleicher Zahlen, welches aus a und b gewonnen wird, d. h. da dies m und m ist, so ist jenes mc und mc , und ist dies nach 216 ebenso das grösste Gemeinmas von ac und bc , wie m das ist von a und b .

Beispiel: 9 ist das größte Gemeinmas von 63 und 54, also ist auch $5 \cdot 9 = 45$ das größte Gemeinmas von $5 \cdot 63 = 315$ und $5 \cdot 54 = 270$.

218. **Satz.** Wenn eine Zahl c in ein Zeug oder Produkt zweier Zahlen ab aufgeht und dem einen Fache oder Faktor a fremd ist, so geht sie in den andern auf.

Beweis: Es geht c in ab auf (Voraussetzung) und ebenso in cb . Da aber a und c einander fremde sind, so ist ihr größtes Gemeinmas 1 (nach 214) mithin ist das größte Gemeinmas von ab und cb nach 217 die Zahl $1 \cdot b = b$. Die Zahl c geht, da sie in ab und cb aufgeht, auch nach 217 in deren größtes Gemeinmas, d. h. in b auf.

Beispiel: 11 geht in $1001 = 7 \cdot 143$ auf; es ist 7 fremd also geht es in 143 auf.

219. **Erklärung:** Eine Primzahl heist eine Zahl, in welche auser Eins und der Zahl selbst keine andre Zahl aufgeht. Eine zusammengesetzte Zahl heist eine Zahl, welche nicht Primzahl ist, d. h. in welche auser der Eins und der Zahl selbst mindestens noch eine Zahl aufgeht.

Primfache oder Primfaktoren heissen die Fache oder Faktoren, welche Primzahlen ungleich Eins sind.

Beispiele: Primzahlen: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Zusammengesetzte Zahlen: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20.

Primfache: In 6 sind 2, 3, in 15 sind 3, 5, in 18 sind 2, 3, 3.

220. **Satz.** Eine Primzahl a , welche in eine andre Zahl b nicht aufgeht, ist ihr fremd oder primär.

Beweis: Da a eine Primzahl ist, so geht in sie auser a und 1 keine Zahl auf nach 219, da aber a in b nicht aufgeht, so geht in a und b nur 1 auf, d. h. a ist der b fremd oder primär (nach 214).

221. **Satz.** Eine Primzahl a , welche in 2 Zahlen b und c nicht aufgeht, geht auch nicht in das Zeug oder Produkt derselben bc auf.

Beweis (trennend oder indirekt): Angenommen, es ginge a in bc auf, so müsste, da a Primzahl ist und in b nicht aufgeht, d. h. da a dem b fremde oder primär ist (nach 220), a in c aufgehen (nach 218). Nach dem Satze darf aber a nicht in c aufgehen, also ist die Annahme unmöglich.

Beispiele: Da 9 in 7 und 8 nicht aufgeht, so geht es auch nicht in $7 \cdot 8 = 56$ auf. Da 11 in 9 und 8 nicht aufgeht, so geht es auch nicht in $9 \cdot 8 = 72$ auf.

222. **Satz.** Wenn eine Primzahl a in mehrre Zahlen nicht aufgeht, so geht sie auch nicht in ihr Zeug (Produkt) auf.

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Zahlen b_1, b_2, \dots, b_n). Angenommen, der Satz gelte für a Zahlen (das

nämlich, wenn die Primzahl a in $b_1, b_2 \dots b_a$ nicht aufgeht, sie auch nicht in das Zeug derselben $b_1 b_2 \dots b_a$ aufgeht), so beweise ich, dass er auch für $a + 1$ Zahlen $b_1, b_2 \dots b_{a+1}$ gelte. Nach der Voraussetzung geht nämlich die Primzahl a nicht in die Zahlen $b_1, b_2 \dots b_a$ auf, mithin nach der Annahme auch nicht in deren Zeug $b_1 b_2 \dots b_a$, aber nach der Voraussetzung geht sie auch nicht in b_{a+1} auf, mithin nach 221 auch nicht in das Zeug der beiden Zahlen, d. h. nicht in $b_1 b_2 \dots b_{a+1}$.

Wenn also der Satz für eine beliebige Reihe von Zahlen gilt, so gilt er auch für die Reihe, welche eine Zahl mehr enthält. Nun gilt er nach 221 für zwei Zahlen, also auch allgemein für beliebige viele Zahlen.

Satz. Jede zusammengesetzte Zahl a lässt sich in Primfache 223. (Primfaktoren) zerlegen.

Beweis: 1. Da a eine zusammengesetzte Zahl, so muss nach 219 wenigstens eine von 1 und a verschiedene Zahl in sie aufgehen, dies sei b , und es gehe b in sie c mal auf, so muss $c \geq 1$ sein, denn sonst wäre $a = 1 \cdot b = b$ wider die Annahme, aber auch $c \geq a$, denn sonst wäre $a = a \cdot b$, d. h. $b = 1$ wider die Annahme. Es lässt sich also jede zusammengesetzte Zahl in zwei von 1 und a verschiedene Fache oder Faktoren zerlegen, und diese beiden Fache können nach 211 nicht grösser als a , aber, wie eben bewiesen, auch nicht gleich a sein, sie müssen also kleiner sein als a .

2. Ist von den beiden Fachen oder Faktoren b und c , in welche a zerlegt wurde, der eine noch eine zusammengesetzte Zahl, so kann man diese (nach Beweis 1) wieder in zwei kleinere, von 1 verschiedene Fache zerlegen u. s. w. Jedes Fach wird hierbei mindestens um 1 kleiner, also muss das Zerlegen in kleinere Fache eine Grenze haben, d. h. die Fache können nicht zusammengesetzte Zahlen bleiben, sondern werden zuletzt lauter Primzahlen.

Satz. Wenn zwei Zeuge A und B von Primfachen oder Primfaktoren gleich sind, so können sich beide nur durch die Ordnung ihrer Fache unterscheiden. 224.

Beweis (fortleitend in Bezug auf die Anzahl der Primfache von A).

1. Angenommen, der Satz gelte, wenn A ein Zeug von n Primfachen $a_1 a_2 \dots a_n$ ist, so beweise ich, dass er auch gelte, wenn A ein Zeug von $n + 1$ Primfachen $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$ ist. Nach der Voraussetzung sind A und B gleich, also muss a_{n+1} in $B = A$ aufgehen, mithin muss es nach 221 auch in ein Fach von B aufgehen, dies sei

x. Da aber die Fache von B nach der Voraussetzung Primfache sind, so geht in x nur 1 und x auf, und da a_{n+1} als Primfach ≥ 1 ist nach 219, so muss also $a_{n+1} = x$ sein. Da ferner die Ordnung der Fache nach 180 beliebig ist, so setze in B das Fach x auf die letzte Stelle, und sei das Zeug der übrigen Fache C, so ist

$$Ca_{n+1} = Cx = B = A = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1},$$

mithin nach 164

$$C = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Nach der Annahme gilt nun der Satz für n Fache; es können sich mithin die Fache von C von den Fachen $a_1 a_2 \cdots a_n$ nur durch die Ordnung unterscheiden, also können sich auch die Fache von B von den Fachen $a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}$ von A nur durch die Ordnung unterscheiden, d. h. wenn der Satz für n Fache gilt, so gilt er auch für $n + 1$ Fache.

2. Nun gilt er aber, wenn A nur 2 Fache $a_1 a_2$ enthält; denn (nach Beweis 1) muss a_2 eins der Fache von B sein. Es sei $B = Ca_2$, so ist

$$Ca_2 = B = A = a_1 a_2,$$

$$\text{also nach 164 } C = a_1,$$

mithin $B = a_1 a_2$, d. h. der Satz gilt für zwei Fache, mithin nach Beweis 1 fortleitend auch für beliebige viele Fache.

225. **Satz.** In eine Zahl A können ausser 1 keine andern Zahlen als die Primfache von A und deren Zeuge aufgehen.

Beweis: Es seien $a_1, a_2 \cdots a_n$ die Primfache von A, d. h. $A = a_1 a_2 \cdots a_n$, und es gehe eine beliebige Zahl $B \geq 1$ in A und zwar C mal auf, so ist auch $A = BC$. Nun zerlege man BC in seine Primfache, so müssen diese den Primfachen $a_1 a_2 \cdots a_n$ gleich sein (nach 224), mithin ist B entweder gleich einem dieser Fache oder gleich einem Zeuge derselben.

Beispiele: Es ist $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ also gehen in 420 die Zahlen auf $2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 6, 4 \cdot 3 = 12, 2 \cdot 5 = 10, 3 \cdot 5 = 15, 4 \cdot 5 = 20, 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60, 2 \cdot 7 = 14, 3 \cdot 7 = 21, 4 \cdot 7 = 28, 5 \cdot 7 = 35, 6 \cdot 7 = 42, 12 \cdot 7 = 84, 20 \cdot 7 = 140, 30 \cdot 7 = 210$.

226. **Satz.** Das grösste Gemeinmas. Das grösste Gemeinmas von n Zahlen erhält man, wenn man jede dieser Zahlen in ihre Primfache (Primfaktoren) zerlegt und das Zeug oder Produkt derjenigen Primfache bildet, welche allen n Zahlen gemeinam sind.

Beweis: Es seien die gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \cdots a_n$, und seien die allen n Zahlen gemeinamen Primfache $b_1, b_2 \cdots b_m$, so will ich beweisen, dass $b_1 b_2 \cdots b_m$ das grösste Gemeinmas dieser n Zahlen ist. Es können nach 225 in jede Zahl nur die Primfache derselben

und deren Zeuge oder Produkte aufgehen; es können mithin in allen n Zahlen nur diejenigen Primfache und ihre Zeuge aufgehen, welche allen n Zahlen gemeinsam sind, d. h. nach der Voraussetzung nur $b_1, b_2 \dots b_m$. Von diesen Fachen und ihren Zeugen oder Produkten ist aber das Zeug aller dieser Fache $b_1 b_2 \dots b_m$ das grösste; denn alle andern Zeuge dieser Fache, welche weniger Fache enthalten, gehen in dasselbe auf und sind mithin nach 211 mindestens nicht grösser.

Beispiele: Von $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ und $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ist das grösste Gemeinmas $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Von $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ und $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ist das grösste Gemeinmas $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Erklärung. Ein kurzer oder reducirtter Bruch heisst ein 227. Bruch, dessen Zähler und Nenner einander fremde oder primär sind.

Satz. Wenn in eine Zahl a , welche kleiner ist als bb , die 228. Primzahlen, welche kleiner als b sind, nicht aufgehen, so ist sie selbst eine Primzahl.

Beweis (trennend): Angenommen, a sei keine Primzahl, so müssten nach 223 mindestens zwei von 1 und a verschiedene Primzahlen in sie aufgehen, dies seien c und d , also $a = cd$. Da aber nach der Voraussetzung die Primzahlen, welche kleiner als b sind, nicht in a aufgehen, so müssen c und d grösser als b sein, dann aber müsste nach 203 auch das Zeug $a = cd$ grösser als bb sein. Dies ist aber gegen die Voraussetzung, also kann auch nicht a eine zusammengesetzte Zahl sein, sondern ist eine Primzahl.

Beispiele: In 113 gehen weder 2, noch 3, 5 und 7 auf, da nun $113 < 121 = 11 \cdot 11$ ist, so ist 113 eine Primzahl.

Wir wollen nach diesem Satze die Aufgabe lösen, alle Primzahlen von 1 bis 10000 aufzufinden. Da $100 \cdot 100 = 10000$ ist, so haben wir nur die Vielfachen der kleineren Primzahlen aufzufuchen. Alle geraden Zahlen sind Vielfache von 2; die ungeraden, deren letzte Stelle 5 ist, sind Vielfache von 5 und können also ausser Betracht bleiben. Die Zahlen zwischen Null und 300, in welche 3 aufgeht, sind dieselben, wie die zwischen 300 und 600 und zwischen $a \cdot 300$ und $a \cdot 300 + 300$ und können also fortgelassen werden. Wir haben nun noch die Vielfachen der 7, der 11, 13, 17, 19, 23, 29 u. f. w. jedesmal mit den andern Primzahlen zu berechnen; die Zahlen die dann nicht Vielfache sind, sind Primzahlen. Es ergibt sich demnach die folgende Tafel.

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

Z.	0	300	600	900	Z.	100	400	700	Z.	200	500	800
1	7	49		17...53	1				3	7...29		11...73
7					3		13...31	19...37	9	11...19		
11		13...47			7		11...37	7...101	11		7...73	
13				11...83	9				17	7...31	11...47	19...43
17				7...131	13		7...59	23...31	21	13...17		
19	11...29				19	7...17			23			
23	17...19	7...89	13...71		21	11...11	7...103		27		17...81	
29	7...47	17...37			27		7...61		29		23...23	
31			7...7	7...19	31			17...43	33		13...41	7...17
37		7...7	7...13		33	7...19			39		7...7	11...11
41	11...31				37		19...23	11...67	41			29...29
43	7...7			23...41	39				47	13...19		7...11
47					43	11...13			51		19...23	23...37
49	7	11...59	13...73		49			7...107	53	11...23	7...79	
53					51		11...41		57			
59				7...137	57	7...23			59	7...37	13...43	
61	19...19			31...31	63			7...103	63			
67		23...29			67	13...13	7...67	13...59	69			11...79
71	7...53	11...61			73		11...43		71			13...67
73			7...139		79			19...41	77			
77	11...13	23			81		13...37	11...71	81		7...83	
79		7...97	11...89		87	11...17			83		11...53	
83					91		7...113		87	7...41		
89		13...53	23...43		93		17...23	13...61	89	17...17	19...31	7...127
91	13...17	23			97		7...71		93			19...47
97		17...41			99			17...47	99	13...23		23...31

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 1000 bis 2000.

Z.	1000	1300	1600	1900	Z.	1100	1400	1700	Z.	1200	1500	1800
1	7. 11. 13.				8		23.	61. 13.	131	1	19.	79
3	17.		7.	239. 11.	9				7	17.	71. 11.	137. 13.
7	19.	53.			11	11.	101.	83. 29.	59	11	173.	
9		7. 11. 17.		23.	13		13.	109. 17.	101	17	17.	89. 7.
13		13. 101.			21	19.	59. 7.	7. 29.	17		37.	41. 23.
19				19.	23					19	53. 7.	7. 31.
21				17.	27	7.	7. 23.	11.	157. 23.			17.
27	19.	79.		41.	29			7. 13.	19	29	11.	139. 31.
31		11. 11. 11. 7.	233.		33	11.	103.		31			59
33		31.	43. 23.		39	17.	67.	37.	47	37	29.	53. 11.
37	17.	61. 7.	191.	13.	41	7.	163. 11.	131.	41	17.	73. 23.	67. 7.
39		13.	103. 11.	149. 7.	47	31.	37.		43	11.	113.	19.
43	7.	149. 17.	79. 31.	53. 29.	51			17.	103.	29.	43. 7.	13. 17.
49		19.	71. 17.	97.	53				49			43.
51		7.	193. 13.	127.								
57	7.	151. 23.	59.	19.	57	13.	89. 31.	477.	251	53	7.	179.
61			11.	151. 37.	59	19.	61.		59			17.
63		29.	47.	13.	61		7. 11.	19. 41.	43.	61	13.	97. 7.
67	11.	97.		7.	69	7.	167. 13.	113. 29.	61	67	7.	181.
69		37.	37.	11.								
73	29.	37.	7.	239.	71			7. 11.	23	71	31.	41.
79	13.	33. 7.	137. 23.	73.	77	11.	107. 7.	211.	73	19.	67. 11.	11. 13.
81	23.	47.	41.	41.	81			13.	137	77	19.	83.
87		19.	73. 7.	241.	83	7.	13. 13.		79			
91		13.	107. 19.	89. 11.	87				83			7.
97		7.	139.		89	29.	41.		89		7.	227.
99		11.	127.		93			11.	163. 91.		37.	43. 31.
39	7.	157.			99	11.	109.	7.	257. 97.			7.

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 3000 bis 4000.

Z.	3000	3300	3600	3900	Z.	3100	3400	3700	Z.	3200	3500	3800
1			13...	277 47...	89	1	7...	443 19...	179		31...	113
7	31...	97				8	29...	107 41...	88	7...	11...	29 13...
11			7...	11 43 23...	157	7	13...	239	11	13...	13...	37...
13	23...	131				13	11...	283	17		7...	503
17	7...	431 31...	107			19			21			
19			7...	11 47		19			23	11...	293 13...	271
23						21			27	7...	461	43...
29	13...	233		19...	191	27	53...	59 23...	61			89
31	7...	433				31	31...	101 47...	33	53...	61	547
37		47	71	31...	127	33	13...	241	39	41...	79	349
41			13...	257 11...	831 7...	37			41	7...	463	167
43	17...	179				39	43...	73 19...	181	17...	191	
47	11...	277		7...	521	43	7...	449 11...	313 19...	53...	67	
49			17...	197 41...	89 11...	49	47...	67	23...	11...	17 19	
53	43...	71	7...	479 13...	281 59...	51	23...	137 7...	17 29 11...			
59	7...	19 23				57	7...	11 41	13...			7 19 29
61						61	29...	109	53...	13...	251 7...	17... 227
67			7...	13 37 19...	193	67			69	7...	467 43...	83 53...
71	37...	83				73	19...	167 23...	151 7...	29...	113 7...	7...
73	7...	439		11...	19 19	77	11...	17 17 7...	71	29...	113 7...	7...
77	17...	181	11...	307	41...	81		59	19...	81...	17...	
79			31...	109 13...	283 23...	87			83	7...	7...	353
83			17...	199 29...	127 7...	91			87	19...	173 17...	211 13 13 23
89	11...	281		7...	31	93	31...	103 7...	89	11...	13 23 37...	97
91						97	23...	139 13...	93	37...	89	17...
97	19...	163 43...	79	7...	571	99	7...	457	99		59...	61 7...

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 5000 bis 6000.

z.	5000	5300	5600	5900	z.	5100	5400	5700	z.	5200	5500	5800
8	13.....481	1	11.....491	1	7.....748
9	71.....79	19.....311	7	13.....489	8	11.....11	43.....	7.....829
11	47.....118	31.....181	38.....257	11	19.....269	7.....778	7	41.....127
17	29.....178	18.....409	41.....187	61.....97	13	29.....197	9	7.....787	37.....157
21	17.....818	7.....11	7831.....191	17	7.....17	43.....	13	13.....401	87.....149
23	19	7.....19	19	17.....307	11.....23
27	11.....457	7.....761	17.....881	23	47.....109	11.....17	2959.....97	21	23.....237
29	47.....107	73.....78	13.....439	7.....7	29	23.....233	61.....89	17.....387	27
33	7.....719	43.....181	17.....349	31	7.....783	11.....521	31	7.....7
39	19.....281	37	11.....467	33	11.....503	19.....907
41	71.....71	7.....7	109.....	13.....457	41	53.....97	37	7.....7	113.....449
47	7.....7	103.....	19.....819	43	37.....139	39	13.....13	29.....191
51	11.....541	47	13.....419	7.....821	43	7.....7	107.....241
53	31.....163	53.....101	49	19.....271	49	29.....181	31.....179
57	13.....389	11.....487	7.....23	53	7.....19	41.....523	57	7.....751
59	23.....239	59.....101	59	7.....67	53.....103	13.....449	61	67.....83
63	61.....83	31.....173	7.....809	67.....89	61	13.....397	43.....127	7.....823	63	19.....277	11.....13
69	37.....137	7.....13	59.....	47.....127	67	7.....11	7173.....79	67	23.....229	19.....233
71	11.....461	41.....181	53.....107	7.....853	71	29.....199	73	7.....839
77	19.....233	7.....811	43.....139	73	7.....739	13.....421	23.....251	79	7.....797
81	13.....19	23.....	77	31.....167	53.....109	81
83	13.....17	23.....7	769.....	31.....193	79	87	17.....311	37.....151	7.....29
87	11.....11	47.....	83	71.....73	91	11.....13	37.....	43.....137
89	7.....727	17.....817	53.....113	89	11.....499	7.....827	93	67.....79	7.....17	47.....83
93	11.....463	13.....461	91	29.....179	17.....17	19.....	97	29.....193
99	41.....139	7.....857	97	23.....239	11.....17	31	7.....757	11.....509	17.....847

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 6000 bis 7000.

z.	6000	6300	6600	6900	z.	6100	6400	6700	z.	6200	6500	6800
1	17...	353	7 23 41 67	108	1	...	37 173	...	3	7	7	...
7	...	7 17 53	3	17	359 19	...	9	...	887 23	...
11	11 601	...	7	31	197 43	...	11
13	7	859 59	107 17	889 81	223	41	149 18	17 29	17
17	11	547	13 509	...	13	...	11 11 53	7 7 137	21
19	13	463 71	89	...	19	29	211 7 7 131	...	23	7 7 127 11	593	...
23	19	...	37	179 7 23 43	21	27	13	479 61	107
29	7	947 13 13 41	27	11	567	...	29
31	37	163 13	487 19	349 29	31	...	59 109 53	127 33	33	23	271 47	189
37	7	991	33	...	7	919	39	17	367 13	503 7
41	7	863 17	373 29	229 11	37	17	19 19 41	157	41	79	79 81	211
43	7 13 73 63	151	39	7	877 47	137 23	47
47	...	11 577 17	17 23	...	43	...	17 379 11	613 51	51	7 19 47
49	23	263 7	907 61	109	49	11	13 43	17 397 53	53	13 13 37
53	51	43 157
59	73	17 409	57	47	131 11	587 29	233	...	79	83
61	11	19 29	61	61	101 7 13 71	...	59	11	569 7	937 19 19 19
67	59 113	...	63	...	23 281	...	63
71	13	467 23	277 7	953	67	7	881 29	223 67	101 69
73	69	31	199	7 967
77	59	103 7	911 11	607	73	37	167 11 19 31	13 521	71
79	7 997	79	7	883	...	77
83	7 11 79 18	491 41	163	...	81	23	269 13	499 11	81	11	571	...
89	29 241	87	83	61	103 29	227
91	...	7 11 83	91	41	151	...	87	...	7	941 71
97	7 18 67	...	37 181	...	93	11	563 43	151	87	19	361 11	599 83
					97	...	73 89 7	971 93	93	7 29 81 19	847 61	113
					99	...	67 97 13	523 99	99

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 7000 bis 8000.

z.	7000	7300	7600	7900	z.	7100	7400	7700	z.	7300	7500	7800
1	...	7. 7. 149 11. ... 891	8	...	11. ... 678	...	1	19. ... 879	18. ... 577 29. ... 269	
3	47. ... 149 67. ... 108	...	7. ... 1139	...	9	...	31. ... 289 13. ... 598	...	7	37. ... 211
7	7. 7. 11. 18	11	18. ... 547	...	11. ... 701	11	...	7. 29. 87 78. ... 107	
9	48. ... 163	...	7. ... 1037 11. ... 719	...	17	11. ... 647	18	...	11. ... 688 18. ... 601	
13	...	71. 103 23. ... 831 41. ... 188	...	21	41. ... 181 7. ... 1108	...	17	7. ... 1031	...	
19	...	18. ... 563 19. ... 401	...	28	17. ... 419 13. ... 571	19	...	73. ... 108 7. ... 1117	
23	7. 17. 59	27	...	7. ... 1061	...	23	31. ... 238	...	
27	...	17. ... 431 29. ... 363	...	37	17. 19. 23. 59. ... 181	...	29	
31	79. ... 89	...	13. ... 537 7. ... 11. 103	33	7. ... 1019	11. 19. 37. ... 81	31	7. ... 1038	17. ... 448 41. ... 191	
33	18. ... 541	...	17. ... 449	39	11. 11. 59. 43. ... 173 71. ... 109	37	17. ... 461
37	31. ... 227 11. ... 23. 29. 7. ... 1091	41	37. ... 193 7. ... 1063	41	13. ... 557	...	
39	...	41. ... 179	...	47	7. ... 1021 11. ... 677 61. ... 127	43	...	19. ... 397 11. ... 23. 31	
43	...	7. ... 1049	...	51	23. ... 337	47	7. 19. 59
49	7. 19. 53	53	23. ... 311 29. ... 257	49	11. ... 659	...	47. ... 167
51	11. ... 641	...	7. ... 1093	
57	...	7. ... 1051 13. 19. 31. 73. ... 109	...	57	17. ... 421	53	...	7. 13. 83	
61	23. ... 307 17. ... 433 47. ... 163 19. ... 419	59	59	7. ... 17. 61	...	39. ... 271
63	7. ... 1009 37. ... 193 79. ... 97	63	13. 19. 23. 17. ... 489 7. ... 1109	61	53. ... 187	...	7. ... 1123
67	37. ... 191 53. ... 139 11. ... 17. 41. 31. ... 257	69	67. ... 107 7. ... 11. 97 17. ... 457	67	13. 13. 43. 7. ... 23. 47	...	
69	
73	11. ... 643 73. ... 101	...	7. ... 17. 67	71	71. ... 101 31. ... 241 19. ... 409	71	11. ... 661 67. ... 113 17. ... 463	...	
79	...	47. ... 157 7. ... 1037 79. ... 101	...	77	7. ... 11. 101	...	73	7. ... 1039	...	
81	78. ... 97 11. ... 11. 61	...	23. ... 347	81	43. ... 167	...	31. ... 251	...	77	19. ... 888	...	
87	19. ... 373 83. ... 89	...	7. ... 7. 163	83	11. ... 653 7. ... 1069 43. ... 181	79	29. ... 251 11. ... 13. 53	...	
91	7. ... 1013 19. ... 389	...	61. ... 131	87	13. ... 599	...	83	
93	41. ... 173	...	7. ... 7. 157	89	7. ... 13. 79	89	37. ... 197	...	7. 7. 23
97	47. ... 151 13. ... 569 43. ... 179 11. ... 727	93	59. ... 127	...	91	23. ... 317	...	13. ... 607
99	31. ... 229 7. ... 7. 151	...	19. ... 421	99	23. ... 813	...	11. ... 709	...	97	71. ... 107 53. ... 149	...	

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 8000 bis 9000.

z.	8000	8300	8600	8900	z.	8100	8400	8700	z.	8200	8500	8800
3	53...	151 19...	19 23 7...	1229 29...	307	1	51...	271	1	59...	139	13...
9	7...	1187	7...	59 151	7	11 11 67 7...	1201	7.. 11 113	3	13...	631 11...	773
11	79...	109 7.. 19.. 67	11	...	13...	647 31...	7	29...	289 47...	181
17	7...	1231 97...	13	7.. 19.. 61 47...	179	...	9	...	67...	127 29...
21	13...	617 53...	157 37...	233 11...	17	...	19...	443 23...	13	43...	191	7...
23	71...	1137 29 41	19	23...	353	...	19	...	7...	1217
27	23...	349 11...	757	79...	23	11...	739	11 13 61	21	...	438	7 13 97
29	7.. 31.. 37	29	47...	173	7.. 29.. 43	27	19...	19	449
33	29...	277 13...	641 89...	97	31	79...	103 11 13 59	...	31	...	7 23 53 11 11 73	...
39	...	31...	269 53...	163 7...	37	47...	33
41	11 17 43 19...	439	41	7...	1163 23...	367	37
47	13...	619 17...	491	23...	43	17...	479	7...	39	7 11 107
51	83...	977	1193 41...	211	47	43	...	37...	239
53	17...	509 7...	49	29...	281 7.. 17.. 71 13...	673	49	78...	113 83...	103
57	7...	1151 61...	137 11...	787 13...	53	31...	263 79...	107	57	23...	359 43...	199 17...
59	...	13...	643 7...	1237 17...	59	41...	199 11...	769 19...	61	11...	751 7...	1223
63	11...	733	61	...	61	63	7...	1181 13...	659
69	67	11...	67	...	11 19 41 7.. 7.. 181	...
71	7...	1153 11...	761 13...	23 29	71	...	43...	197 7.. 7.. 179	73	19...
77	41...	197	...	47...	73	11...	743 97...	229 31...	79	17...	487 23...	373 13...
81	...	17 17 29	...	7...	77	13 17 37 7.. 7.. 173 67...	131	...	81	7 7 13 13	...	88...
83	59...	137 83...	101 19...	457 13...	79	...	61...	139	87	...	31...	277
87	7 17 78 11...	19 43	83	7 7 167 17...	499	...	91	...	11 11 71 17...	523
89	89...	89	19...	431 13...	653 11...	93	...	19...	661
93	...	7 11 109	...	17 23 28	97	7...	1213 59...	149	97	7 81 41
99	7 18 89 37...	237	97	7...	1171 29...	298 19...	99	48...	193	11...

Tafel der Primzahlen und der durch 2, 3 und 5 nicht teilbaren Zahlen von 9000 bis 10000.

Z.	9000	9800	9600	9900	Z.	9100	9400	9700	Z.	9200	9500	9800
1	71...151	1	19...479	7...17	7989...	109	...	13...17	43...
7	41...227	13...789	8	7...1301	23...409	31...819	9	61...151	87...257	17...577
11	...	7...1878	11...17	53...	7	571...	11	13...709	31...307	...
13	67...199	23...491	9	...	97...97	7...19	73...
17	71...127	7...11	11...59	163	47...211	13	18...701	11...888	21	7...23
19	29...311	7...13	109...	19	11...829	23	33...401	89...107
23	7...1289	21	7...1303	27	...	107...11
29	...	19...491	21	27	7...1361	31...817
31	11...821	7...31	43...	...	37	23...397	11...857	71...137	29	11...839	13...733	...
37	7...1291	...	23...419	19...523	33	37...263	33	7...1319
41	31...811	39
43	61...163	37	13...19	37...	7...13	107...	41	7...29	47...13
47	83...109	13...719	11...377	7...7	29...43	39	41...223	7...19	71...43	47	...	43...229
49	49	7...1307	11...859	51	11...29	29...
53	11...823	47...199	7...7	197	37...269	51	...	13...727	7...7	53	19...487	41...233
59	...	7...7	191	13...743	23...433	57	...	7...7	193	11...887
61	13...17	41...11	23	37...7	1423...	61	7...7	11...17	...	43...227	59...	...
67	...	17...19	29...7	1831...	...	63	7...7	11...17	...	13...751	63...	...
71	47...193	...	19...509	13...13	59...	67	89...103	67	13...23	31...7
73	43...211	7...13	103	17...569	...	69	53...173	17...557	...	69	...	1367
77	29...313	11...907	81...	73	67...137	...	29...337	71	73...127	17...563
79	7...1297	83...113	...	17...587	87...	79	...	19...499	...	77	...	61...157
83	31...293	11...853	23...421	67...149	91...	81	7...81	101...	...	83	...	11...13
89	61...149	41...229	...	7...1427	93...	87	29...317	11...863	7...1399	87	37...251	...
91	11...881	97...103	97...	91	17...541	...	97...101	89	7...1527	43...223
97	11...827	13...769	99...	93	...	7...23	59	97	53...181	13...761
						99	99	17...547	29...331
												19...521

229. **Satz.** Zwei geht in eine Zahl a auf, wenn sie in die letzte Stelle derselben aufgeht.

Vier geht in eine Zahl a auf, wenn sie in die beiden letzten Stellen derselben aufgeht.

Acht geht in eine Zahl a auf, wenn sie in die drei letzten Stellen derselben aufgeht.

Beweis: 1. Man zerlege die Zahl a in zwei Stücke $b \cdot 10 + d$ wo d die Einer der Zahl a darstelle und b und d ganze Zahlen. Wenn nun zwei in d aufgeht, d. h. wenn $d = c \cdot 2$, wo c eine ganze Zahl, so ist

$$a = b \cdot 10 + c \cdot 2 = b \cdot 5 \cdot 2 + c \cdot 2 = (b \cdot 5 + c) 2.$$

Hier sind b , 5 und c ganze Zahlen, also geht 2 in a auf.

2. Für den zweiten Teil des Satzes zerlege man die Zahl a in zwei Stücke $b \cdot 100 + d$, wo d die Zehner und Einer der Zahl a umfasst und b und d ganze Zahlen sind. Wenn nun vier in d aufgeht, d. h. wenn $d = c \cdot 4$, wo c eine ganze Zahl, so ist

$$a = b \cdot 100 + c \cdot 4 = b \cdot 25 \cdot 4 + c \cdot 4 = (b \cdot 25 + c) 4.$$

Hier sind b , 25 und c ganze Zahlen, also geht 4 in a auf.

3. Ganz entsprechend folgt der Satz für 8.

Beispiele: 2 geht auf in 8728 , 5714,
 4 " " 2536 , 8912,
 8 " " 5728 , 9812.

230. **Erklärung.** Gerade Zahlen heißen die Vielfachen von zwei. Ungerade Zahlen heißen die Zahlen, in welche zwei nicht aufgeht.

231. **Satz.** Fünf geht in eine Zahl auf, wenn die letzte Ziffer fünf oder null ist.

Beispiele: 5 geht auf in 8710 , 8915 , 9835.

232. **Erklärung.** Die Quersumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern, wenn man die Ziffern ohne Rücksicht auf die Stelle als Einer zuzählt.

Beispiele: Die Quersumme von 5754 ist $5 + 7 + 5 + 4 = 21$, die Quersumme von 8259 ist $8 + 2 + 5 + 9 = 24$.

233. **Satz.** Drei und neun gehen in eine Zahl a auf, wenn sie in ihre Quersumme aufgehen.

Beweis: Man zerlege die Zahl a in so viel Stücke als sie Stellen hat und sei

$$a = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 100 + b_3 \cdot 1000 + b_4 \cdot 10000 + \dots$$

Nun kann man $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, $10000 = 9999 + 1$ u. f. w. jede in 2 Stücke zerlegen, dann erhält man

$$\begin{aligned}
 a &= b_0 + b_1(9 + 1) + b_2(99 + 1) + b_3(999 + 1) + b_4(9999 + 1) + \dots \\
 &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 99 + b_3 \cdot 999 + b_4 \cdot 9999 + \dots \\
 &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + 9(b_1 + b_2 \cdot 11 + b_3 \cdot 111 + b_4 \cdot 1111 + \dots)
 \end{aligned}$$

Hier ist $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots$ die Quersumme von a . Gehen also 3 oder 9 in diese Quersumme auf, so gehen sie, da sie auch in 9 aufgehen, nach 215 auch in a auf.

Beispiele: 3 geht auf in 2715; 88108; 52725.

9 geht auf in 37521; 82575; 71856.

Erklärung. Der Neunerrest heist der Rest, welcher übrig 234. bleibt, wenn man die Quersumme einer Zahl durch neun teilt. Gleich heissen zwei Neunerreste, wenn die Reste nur um ein Vielfaches von neun verschieden sind.

Beispiel: Bei 86572 ist der Neunerrest gleich 1; denn $8+6+5+7+2=28$ giebt durch 9 geteilt den Rest 1. Als Neunerrest ist $21=12=3$.

Satz. Probe beim Zufügen: der Neunerrest der Summe ist gleich 235. der Summe der Neunerreste aus den Stücken.

Beweis: Seien a_1, a_2 und $a_3 \dots$ die zu füzenden Zahlen. Man kann nun nach 234 jede dieser Zahlen gleich einem Vielfachen von neun plus einem Neunerreste setzen. Sei also

$$a_1 = 9 \cdot b_1 + c_1 \quad a_2 = 9b_2 + c_2 \quad a_3 = 9b_3 + c_3 \dots$$

wo c_1, c_2 und $c_3 \dots$ die Neunerreste der Zahlen $a_1, a_2, a_3 \dots$ sind, so ist

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + a_3 + \dots &= (9b_1 + c_1) + (9b_2 + c_2) + (9b_3 + c_3) + \dots \\
 &= 9(b_1 + b_2 + b_3 + \dots) + c_1 + c_2 + c_3 + \dots
 \end{aligned}$$

Beispiel: $879568 = 527886 + 351727$,

Neunerrest $2 = 4 + 7 = 9 + 2$.

Satz. Probe beim Abziehen. Der Neunerrest des Vorrats 236. ist gleich der Summe aus den Neunerresten des Abzugs und des Restes.

Beweis: Unmittelbar nach 235.

Beispiel: $7957 - 4268 = 3689$,

Neunerrest $1 = 2 + 8 = 9 + 1$.

Satz. Probe beim Vervielfachen. Der Neunerrest des 237. Zeugens oder Produktes ist gleich dem Zeuge der Neunerreste aus den Fachen oder Faktoren.

Beweis: 1. Für 2 Fache oder Faktoren. Seien a_1 und a_2 die Fache, so kann man nach 234 jede dieser Zahlen $a_1 = 9b_1 + c_1$ und $a_2 = 9b_2 + c_2$ setzen, wo c_1 und c_2 die Neunerreste der Zahlen a_1 und a_2 sind; dann ist

$$a_1 \cdot a_2 = (9b_1 + c_1)(9b_2 + c_2) = 9b_1(9b_2 + c_2) + c_1 \cdot 9b_2 + c_1 \cdot c_2$$

also ist $c_1 c_2$ der Neunerrest von $a_1 a_2$.

2. Wenn der Satz für n Fache gilt, so gilt er auch für $n + 1$ Fache.

Denn es seien $a_n = 9b_n + c_n$ wo c_n der Neunerrest von a_n ist, und es sei $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 9A + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_n$ (Annahme), so ist

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n a_{n+1} = (9A + c_1 c_2 c_3 \cdots c_n) (9b_{n+1} + c_{n+1})$$

$$= 9A (9b_{n+1} + c_{n+1}) + (c_1 c_2 c_3 \cdots c_n) 9b_{n+1} + c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdot c_{n+1}$$

also auch $c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdot c_{n+1}$ der Neunerrest von $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot a_{n+1}$

5. Nun gilt der Satz für 2 Fache oder Faktoren, also gilt er nach 23 allgemein.

Beispiel: $8367 \times 7526 = 62970042$,

Neunerrest $6 \times 2 = 9 + 3 = 8$.

238. **Satz.** Probe beim Teilen ohne Rest. Der Neunerrest der zu teilenden Größe ist gleich dem Zeuge oder Produkte aus den Neunerresten des Teilers und des Quoten (Quotienten).

Beweis: Unmittelbar nach 237.

Beispiel: $6291984 : 752 = 8367$,

Neunerrest $3 = 5 \times 6 = 27 + 3$.

239. **Satz.** Probe beim Teilen mit Rest. Der Neunerrest der zu teilenden Größe weniger dem Neunerreste aus dem bei der Teilung verbleibenden Reste ist gleich dem Zeuge aus den Neunerresten des Teilers und des Quoten, soweit dieser eine ganze Zahl ist.

Beweis: Sei die Aufgabe $a : b$ und gehe b c mal in a auf und verbleibe d bei der Teilung als Rest, so ist $a = bc + d$ oder es ist $a - d = bc$. Also folgt der Satz unmittelbar aus 238.

Beispiel: $14328 : 416$. Es ist $14328 = 416 \cdot 34 + 179$ oder

$$14328 - 179 = 416 \cdot 34$$

Neunerprobe

$$13 - 8 = 5 = 2 \cdot 7 = 9 + 5.$$

240. **Satz.** Elf geht in eine Zahl a auf, wenn die Quersumme der ungeraden Stellen abgezogen von der Quersumme der geraden Stellen (bez. umgekehrt die der geraden abgezogen von der der ungeraden Stellen) ein Vielfaches von elf ist.

Beweis: Es sei

$$a = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 100 + b_3 \cdot 1000 + b_4 \cdot 10000 + b_5 \cdot 100000 + \cdots$$

$$= b_1 \cdot 11 + b_0 - b_1 + b_3 \cdot 1100 + (b_2 - b_3) 100$$

$$+ b_5 \cdot 110000 + (b_4 - b_5) 10000 + \cdots$$

$$= 11 \cdot (b_1 + 100 \cdot b_3 + 10000 \cdot b_5 + \cdots) + [b_0 - b_1 + (b_2 - b_3) \cdot 100$$

$$+ (b_4 - b_5) 10000 + \cdots]$$

Es geht also 11 in die Zahl auf, wenn es in die letzte Summe aufgeht. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 b_0 - b_1 + (b_2 - b_3) 100 + (b_4 - b_5) 10000 + \dots &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \\
 + b_4 - b_5 + \dots + (b_2 - b_3) 99 + (b_4 - b_5) 9999 + \dots \\
 &= b_0 + b_2 + b_4 + \dots - (b_1 + b_3 + b_5 + \dots) \\
 + 11 [(b_2 - b_3) 9 + (b_4 - b_5) 909 + \dots]
 \end{aligned}$$

Hier geht 11 in die Zahl auf, wenn es in

$$b_0 + b_2 + b_4 + \dots - (b_1 + b_3 + b_5 + \dots)$$

aufgeht; also geht 11 dann auch in a auf.

Beispiele: 11 geht auf in 8547688, 9586857.

Satz. Sieben und zehndrei gehen in eine Zahl a auf, wenn 241. die Summe aus der Zahl der Tausende und aus der Zahl der Tausend-millionen abgezogen von der Summe aus der Zahl der Ganzen unter Tausend und aus der Zahl der Millionen unter Tausendmillionen ein Vielfaches von 7 bezüglich von 13 ergibt.

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned}
 a &= b_0 + 1000 \cdot b_1 + 1000000 \cdot b_2 + 1000'000000 \cdot b_3 + \dots \\
 &= 1001 b_1 + b_0 - b_1 + 1000000 (1001 \cdot b_3 + b_2 - b_3) + \dots \\
 &= 1001 (b_1 + 1000000 b_3 + \dots) + b_0 - b_1 + 1000000 (b_2 - b_3) + \dots
 \end{aligned}$$

Hier ist $1001 = 7 \cdot 13 \cdot 11$ und

$$1000000 = 1 + 999999 = 1 + 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \text{ also ist}$$

$$\begin{aligned}
 a &= 7 \cdot 13 \cdot 11 (b_1 + 1000000 b_3 + \dots) + 7 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 (b_2 - b_3) \\
 &+ (b_0 + b_2 + \dots) - (b_1 + b_3 + \dots) \text{ d. h. 7 und 13 gehen in a} \\
 &\text{auf, wenn sie in } (b_0 + b_2 + \dots) - (b_1 + b_3 + \dots) \text{ aufgehen.}
 \end{aligned}$$

Beispiele: 7 geht auf in 586785826971; denn

$$\begin{array}{r}
 735 \\
 971 \\
 \hline
 1706
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 586 \\
 826 \\
 \hline
 -1412 = 294 = 7 \cdot 42
 \end{array}$$

18 geht auf in 828789674865; denn

$$\begin{array}{r}
 789 \\
 855 \\
 \hline
 1644
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 828 \\
 574 \\
 \hline
 -1997 = 247 = 13 \cdot 19.
 \end{array}$$

Erklärung. Der kleinste Gemeinnenner oder Dividens 242. für mehrere gegebene Zahlen ist die kleinste Zahl, in welche diese Zahlen aufgehen.

Beispiele: Für 48, 82 und 72 ist 288 der kleinste Gemeinnenner.

Satz. Der kleinste Gemeinnenner oder Dividens zweier gegebener Zahlen ist das Zeug (Produkt) aus der ersten Zahl und denjenigen Primfactoren der zweiten Zahl, welche der ersten Zahl fehlen, und geht dieser Gemeinnenner in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen.

Beweis: Es seien die gegebenen Zahlen a und b, und seien von a die Primfactoren a_1, a_2, \dots, a_n , die dem b eigenthümlichen Primfactoren,

welche dem a fehlen, aber $b_1 b_2 \dots b_m$, so will ich beweisen, dass $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$ der kleinste Gemeinnenner von a und b sei.

Da nach 225 in jede Zahl nur die Primfache derselben und deren Zeuge aufgehen, so muss jede Zahl c , in welche a aufgehen soll, auch sämtliche Primfache $a_1 a_2 \dots a_n$ von a als Fache enthalten, und jede Zahl, in welche b aufgehen soll, ausser den mit a gemeinsamen Fachen auch mindestens sämtliche dem b eigentümliche Primzahlen $b_1 b_2 \dots b_m$ als Fache enthalten, mithin jede Zahl, in welche a und b zugleich aufgehen sollen, sämtliche Primfache $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$ als Fache enthalten.

2. In jede beliebige Zahl c , in welche a und b aufgehen, gehen also die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$ als Primfache, mithin nach 225 auch deren Zeug oder Produkt auf. Da aber eine Zahl, welche in eine andre aufgeht, nach 211 nicht grösser sein kann als letztere, so giebt es keine Zahl, in die a und b aufgehen, welche kleiner ist als das Zeug $a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$, d. h. dies Zeug ist der kleinste Gemeinnenner jener Zahlen.

Beispiele: Von $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ und von $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ist der kleinste Gemeinnenner $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 = 2310$. Von $8 \cdot 7$ und von $4 \cdot 3$ ist der kleinste Gemeinnenner $8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$.

244. **Satz.** Den kleinsten Gemeinnenner mehrerer Zahlen erhält man, wenn man den kleinsten Gemeinnenner b von 2 Zahlen mit denjenigen Primfachen der dritten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner b noch fehlen, und sofort den kleinsten Gemeinnenner c von $n - 1$ Zahlen mit denjenigen Primfachen der n ten Zahl vervielfacht, welche jenem Gemeinnenner c noch fehlen; der kleinste Gemeinnenner geht in jede Zahl auf, in welche die gegebenen Zahlen aufgehen.

Beweis: 1. Der Gemeinnenner d erhält durch das angegebene Verfahren von jeder Zahl p nur diejenigen Primfache, welche dem Gemeinnenner bis dahin noch fehlen, sollte aber einer dieser Fache fehlen, so würde die betreffende Zahl in die Zahl d nach 225 nicht aufgehen, die Zahl d wäre also kein Gemeinnenner; der Gemeinnenner muss mithin alle diese Primfache enthalten.

2. In jede Zahl, in welche die sämtlichen gegebenen Zahlen aufgehen, müssen also auch sämtliche Primfache des erhaltenen Gemeinnenners, mithin auch das Zeug derselben oder der Gemeinnenner selbst nach 225 aufgehen. Da aber eine Zahl, welche in eine andre aufgeht, nicht grösser sein kann als letztere (nach 211), so ist auch

der erhaltene Gemeinnenner der kleinste Gemeinnenner der gegebenen Zahlen.

Beispiel: Von 8, 12, 15, 20, 24, 36, 48 und 72 ist der kleinste Gemeinnenner $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$.

b. Die Zahlenreihe ersten Ranges.

Erklärung. Eine Zahlenreihe ersten Ranges (eine arithmetische Reihe ersten Ranges) heist eine Reihe von Zahlen, wenn in ihr jede Zahl von der nächstfolgenden Zahl abgezogen denselben Unterschied giebt.

Es bezeichnet in der Zahlenreihe ersten Ranges a das erste, t das n te Glied, b den Unterschied zweier folgender Glieder, Σ die Summe der n ersten Glieder.

Beispiel: Zahlenreihe ersten Ranges: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

Satz. Für die Zahlenreihe (arithmetische Reihe) ersten Ranges gelten folgende Formeln

$$t = a + (n - 1)b \quad \Sigma = \frac{n(a + t)}{2} \quad \Sigma = na + \frac{n(n - 1)}{2}b.$$

Die Summe einer Zahlenreihe ersten Ranges erhält man, indem man, die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl sämtlicher Glieder vervielfacht.

Beweis; 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung 245.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in entgegengesetzter Folge auf und fügt die unter einander stehenden Glieder einander zu, dann ist

$$\Sigma = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (t - b) + t$$

$$\Sigma = t + (t - b) + (t - 2b) + \dots + (a + b) + a$$

$$2\Sigma = (a + t) + (a + t) + (a + t) + \dots + (a + t) + (a + t) = n(a + t),$$

$$\text{d. h.} \quad \Sigma = \frac{n(a + t)}{2},$$

und führt man den Wert von t aus der ersten Formel ein, so erhält man die dritte.

Satz. Die Summe sämtlicher ganzen Zahlen von 1 bis 247. n ist $\frac{n(n + 1)}{2}$.

Beweis: Unmittelbar aus 246, da $t = n$ die Anzahl der Glieder ist.

Satz. Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n - 1)$ ist n^2 . 248.

$$\text{Beweis:} \quad \Sigma = \frac{n(a + t)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2.$$

249. **Erklärung.** Das Zahlenmittel (das arithmetische Mittel) von n Zahlen heist die Summe der n Zahlen geteilt durch n .

Beispiel: Das Zahlenmittel von 1, 5, 7, 11, 14, 17, 20 ist $75 : 7 = 10\frac{5}{7}$.

D. Die Eigenschaften der Brüche.

a. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Zehntbrüche

250. **Satz.** Einen gewöhnlichen Bruch verwandelt man in einen Zehntbruch (Dezimalbruch), indem man dem Zähler ein Komma giebt, Nullen anhängt und dann den Zähler durch den Nenner teilt.

Beweis: Nachdem das Komma gesetzt ist, kann man nach 189 rechts beliebig Nullen anhängen und teilt dann nach 184.

Beispiele: $\frac{3}{8} = 3,000 : 8 = 0,375$

$\frac{5}{9} = 5,000000 : 9 = 0,555556$.

251. **Erklärung.** Endlich heist der Zehntbruch (Dezimalbruch), wenn er nur eine endliche Zahl von Stellen hat; unendlich heist der Zehntbruch, wenn er unendlich viele Stellen hat.

Gekürzt heist der Zehntbruch (Dezimalbruch), wenn in demselben die folgenden Stellen wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden. Die letzte Stelle des gekürzten Zehntbruchs heist die Kürzungsstelle. Die Ziffer derselben wird um 1 erhöht, wenn die nächstfolgende Stelle 5 oder eine grössere Ziffer enthält.

Beispiel: Ein endlicher Bruch ist $\frac{3}{10} = 0,075$. Ein gekürzter Bruch ist $\frac{3}{9} = 0,333336$; die letzte Stelle ist um 1 erhöht, weil die folgende Stelle 5 hat.

252. **Erklärung.** Eine Wiederkehr oder Periode heist die regelmäßige Wiederkehr derselben Ziffern in der Zahl.

Ein rein wiederkehrender oder rein periodischer Bruch heist ein Bruch, welcher nur Ziffern der Wiederkehr enthält.

Ein gemischter oder gemischt-periodischer Bruch heist ein Bruch, welcher ausser der Wiederkehr noch nicht wiederkehrende Ziffern enthält. Die gemischte Wiederkehr heissen die nicht wiederkehrenden Ziffern mit einer Wiederkehr.

Beispiel: In $0,135135135 \dots$ ist die Wiederkehr 135.

Ein rein wiederkehrender Bruch ist $\frac{4}{11} = 0,36363636$.

Ein gemischter Bruch ist $\frac{7}{36} = 0,19444444$. Hier sind die nicht wiederkehrenden Ziffern 19, die gemischte Wiederkehr ist 194.

253. **Satz.** Ein Bruch, dessen Nenner nur 2 und 5 als Fache oder Faktoren enthält, giebt einen endlichen Zehntbruch.

Beweis: Man hänge an den Zähler soviel Nullen, als 2 bez. 5 im Nenner als Fach oder Faktor enthalten ist; dann hat der Zähler sovielmals 10 als der Zähler 2 bez. 5 als Fach enthält. Der Nenner geht dann also in den Zähler auf.

Beispiel: $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{7}{8} = 0,875$ $\frac{3}{5} = 0,6$.

Satz. Ein Bruch, dessen Nenner nur andre Fache oder Faktoren 254.
als 2 und 5 enthält, giebt einen rein wiederkehrenden Zehntbruch.

Beweis: Die andern Primzahlen ausser 2 und 5 gehen nicht in 2 und 5, also nach 221 auch nicht in deren Vielfaches, d. h. nicht in den Nenner auf. Sei nun die Primzahl n , so kann bei der jedesmaligen Teilung nur eine Zahl übrig bleiben, welche kleiner als n ist und muss demnach mindestens bei der $(n-1)$ ten Teilung wieder dieselbe Zahl übrig bleiben, d. h. es muss die Wiederkehr derselben Zahlen (der Periode) eintreten.

Die Wiederkehr (die Periode) hat, wenn das Primfach im Nenner 3 ist, eine Stelle, wenn es 11 ist, zwei, wenn 37 drei, wenn 101 vier Stellen, wenn es 41 oder 271 ist, fünf, wenn es 7 oder 13 ist sechs Stellen.

Beispiel: $\frac{5}{21} = 0,238095238095$ $\frac{7}{9} = 0,777777$

Satz. Ein Bruch dessen Nenner 2, 5 und noch andre Zahlen 255.
als Fache oder Faktoren erhält, giebt einen gemischten Zehntbruch.

Beispiel: $\frac{7}{45} = 0,155555$ $\frac{5}{36} = 0,1388888$
 $\frac{7}{44} = 0,15909090$ $\frac{9}{35} = 0,25714285714$

b. Die Verwandlung der Zehntbrüche (Dezimalbrüche) in
gewöhnliche Brüche.

Satz. Einen endlichen Zehntbruch (Dezimalbruch) verwandelt 256.
man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man den Nenner unter
den Zähler schreibt und hebt.

Beweis: Nach 253 ist der endliche Reihenbruch einem Bruche
gleich, der nur 2 oder 5 im Nenner als Fache hat, da nun im Nenner
die Zahl 10 oder 2 mal 5 beliebig oft als Fach enthalten ist, so muss
der Bruch durch Heben erhalten werden.

Beispiel: $0,925 = \frac{925}{1000} = \frac{37}{40}$ $0,4176 = \frac{4176}{10000} = \frac{261}{625}$

Satz. Einen rein wiederkehrenden Zehntbruch (einen rein 257.
periodischen Dezimalbruch) verwandelt man in einen gewöhnlichen
Bruch, indem man unter jede Ziffer der ersten Wiederkehr eine Neun
schreibt, und nun hebt.

Beweis: Es sei die Wiederkehr $abc \dots n$, wo jeder Buchstabe
eine beliebige Ziffer der Stelle bezeichnet und habe $\overbrace{1000 \dots 0}^n$, bez.

$\overbrace{999 \dots 9}^n$ n Nullen bezüglich Neunen, so ist der rein wiederkehrende
Bruch gleich $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ und ist demnach

$$\overbrace{1000 \dots 0}^n \times 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

davon abgezogen

$$\underline{1 \times 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$$

bleibt

$$\overbrace{999 \dots 9}^n \times 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \text{ und auf beiden Seiten}$$

durch $\overbrace{999 \dots 9}^n$ geteilt

$$\text{gibt} \quad 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{999 \dots 9}.$$

$$\text{Beispiel: } 0,243243243 = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}.$$

Um die Brüche leicht heben zu können, ist es wünschenswert die Zahlen zu kennen, welche in die Nenner 9, 99 u. f. w. aufgehen. Ich füge deshalb hinzu. Es ist

$$\begin{aligned} 99 &= 9 \cdot 11 \\ 999 &= 9 \cdot 3 \cdot 37 \\ 9'999 &= 9 \cdot 11 \cdot 101 \\ 99'999 &= 9 \cdot 41 \cdot 271 \\ 999'999 &= 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 18 \cdot 37 \\ 9'999'999 &= 9 \cdot 1'111'111 \\ 99'999'999 &= 9 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\ 999'999'999 &= 9 \cdot 9 \cdot 37 \cdot 333 \cdot 667 \\ 9'999'999'999 &= 9 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091 \\ 99'999'999'999 &= 9 \cdot 11'111'111'111 \\ 999'999'999'999 &= 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 9901. \end{aligned}$$

258. **Satz.** Einen gemischten Zehntbruch (einen gemischt-periodischen Dezimalbruch) verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man die nicht wiederkehrenden Ziffern von der gemischten Wiederkehr abzieht und im Nenner für jede wiederkehrende Ziffer der Wiederkehr eine Neun, für jede nicht wiederkehrende Ziffer eine Null setzt, und nun hebt.

Beweis: Es seien $b_1 b_2 \dots b_m$ die nicht wiederkehrenden Ziffern $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ die wiederkehrenden, also $b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ die gemischte Wiederkehr, so ist der gemischte Bruch gleich

$$0, b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \text{ und ist demnach}$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{100 \dots 0000}^{m+n} \times 0, b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ &\quad = b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ \text{minus } &\overbrace{100 \dots 0}^m \times 0, b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ &\quad = b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ \hline &\overbrace{999 \dots 9}^n \overbrace{00 \dots 0}^m \times 0, b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ &\quad = b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n - b_1 b_2 \dots b_m \end{aligned}$$

und auf beiden Seiten durch $\overbrace{999 \dots 9}^n \cdot \overbrace{00 \dots 0}^m$ geteilt, giebt.

$$0, b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = \frac{b_1 b_2 \dots b_m a_1 a_2 a_3 \dots a_n \cdot \overbrace{00 \dots 0}^m}{\overbrace{999 \dots 9}^n}$$

Beispiel: $0,68989898 = (6898 - 68) : 9900 = 6825 : 9900 = \frac{1}{122}$.

8. Das Rechnen mit benannten Zahlen oder die Rechnungen des gewöhnlichen Lebens.

Der vorliegende Abschnitt bietet uns die Anwendung der gewonnenen Sätze auf das praktische Leben, zunächst die abgekürzte Rechnung, dann das Rechnen mit benannten Zahlen und die Bruchgleichung oder die Regeldetri, dann die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten und endlich die Gleichung ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten. Für das praktische Leben ist gerade dieser Abschnitt von der größten Bedeutung.

A. Das abgekürzte Rechnen.

Erklärung. Abgekürzt heist die Rechnung, wenn man 259. die Rechnung nur auf die Stellen beschränkt, auf welche es dem Rechnenden ankommt. Die niedrigste dieser Stellen heist die Kürzungsstelle. Die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle, wird nur soweit mit berechnet, als dies noch auf die Kürzungsstelle Einfluss hat; steht auf der folgenden Stelle noch eine der Zahl 5 bis 9, so wird zu der Ziffer der Kürzungsstelle noch eins hinzugefügt.

Beim praktischen Rechnen kommt es immer nur auf bestimmte Stellen an und genügen meist 5 bis 6 Stellen. So kann man die Brüche von Pfennigen stets weglassen, und ähnlich in den meisten Fällen. Die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle berücksichtigt man soweit, dass der Fehler möglichst gering wird; so kürzt man $84625,336$ in 84626 , da dies genauer ist, als wollte man es in 84625 kürzen und beobachtet die in der Erklärung gegebene Regel.

Satz. Beim abgekürzten Zufügen und Abziehen berechnet 260. man noch die auf die Kürzungsstelle folgende Stelle mit, und kürzt dann.

Beispiel: $\begin{array}{r|l} 25,7826' 275 & + 0,8725' 387 \\ 81,2753' 663 & - 23,63297' 622 \end{array} \quad \begin{array}{l} = 26,6550 \\ = 57,7453 \end{array}$

Satz. Beim abgekürzten Vervielfachen kürzt man zunächst 261. den einen Fach bis auf die folgende Stelle nach der Kürzungsstelle und vervielfacht ihn mit den Einern des andern Faches. Bei jeder nächst höhern Stelle des zweiten Faches nimmt man noch die nächst folgende Stelle des ersten Faches für die Berechnung mit und schreibt die Ziffern gleicher Stellen und also auch die Komma senkrecht unter

einander; bei jeder nächst niedern Stelle des zweiten Faches streicht man eine Stelle des andern Faches. Alle Zeuge oder Produkte fügt man sodann zu und kürzt die Summe um eine Stelle.

Beweis: Unmittelbar nach 160 und 161.

Beispiel: $523,783636 \dots \times 38,3789$.

$$\begin{array}{r}
 523,783636 \dots \\
 38,3789 \\
 \hline
 8 \times 523,7836_3 = 4190,2690 \\
 30 \times 523,78363_6 = 15713,5091 \\
 0,8 \times 523,783_3 = 157,1351 \\
 0,07 \times 523,78_3 = 36,6648 \\
 0,008 \times 523,7_3 = 4,1908 \\
 0,0009 \times 523,7_3 = 0,4713 \\
 \hline
 20102,2396
 \end{array}$$

Anm. Man schreibt die Produkte senkrecht unter einander und zieht von Anfang einen senkrechten Strich für das Komma. Hat der Multiplikandus nicht soviel Stellen, als erforderlich, so hängt man die entsprechenden Nullen an.

262. **Satz.** Beim abgekürzten Teilen kürzt man die zu teilende GröÙe und den Teiler so, dass die niedrigsten Stellen in beiden gleich weit rechts, bez. links vom Komma stehen und rückt nun das Komma in beiden Zahlen gleich weit und zwar soweit nach rechts bez. links, dass die letzte Ziffer in beiden Zahlen Einer bezeichnen. Nun teilt man solange mit dem ganzen Teiler in die zu teilende Zahl, als es geht, ohne Nullen anzuhängen. Dann aber teilt man, indem man vor jeder folgenden Teilung eine und zwar die letzte Stelle des Teilers streicht und nur noch in Gedanken mitrechnet, um die Zehner zu berücksichtigen.

Beweis; Unmittelbar nach 184.

Beispiel: $84,8627 : 7,9234$.

$$\begin{array}{r}
 79234 \mid 848627 \quad 10,6473 \\
 79234 \mid \\
 \hline
 7923,4 \mid 51237 \\
 47540 \\
 \hline
 792,3 \mid 3747 \\
 3169 \\
 \hline
 79,2 \mid 578 \\
 554 \\
 \hline
 7,9 \mid 24 \\
 24
 \end{array}$$

Reiche Uebungen für das Rechnen mit gekürzten Rechnungen bieten das Uebungsheft und das Rechenheft III des Verfassers.

Die Kettenbrüche bilden das Mittel, um bei den Brüchen die Näherungswerte zu finden. Da sie eine weitere Bedeutung nicht haben, lasse ich sie im Texte fort und gebe hier nur eine kurze Entwicklung derselben in den folgenden Bemerkungen.

1) Kettenbruch heist ein Bruch, dessen Nenner eine gemischte Zahl ist,

z. B. $\frac{1}{\frac{1}{2} + 2}$

$\frac{1}{3}$, jeder von den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ heist ein Teilbruch.

Echter Kettenbruch heist ein Kettenbruch, in dem alle Zähler 1 sind,

z. B. $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{5}}}}$

2) Einen echten Bruch verwandelt man in einen echten Kettenbruch, indem man den Nenner durch den Zähler teilt und jedesmal den vorigen Nenner oder Divisor durch den letzten Rest teilt, z. B. $\frac{7}{31} = 1$

$$\frac{4}{2} + \frac{1}{3}$$

Beweis: $\frac{7}{31} = 1 = \frac{1}{\frac{31}{7}} = \frac{1}{\frac{4}{7} + 8} = \frac{1}{\frac{4}{7} + 1} = \frac{1}{\frac{4}{7} + \frac{1}{\frac{7}{2} + \frac{1}{3}}}$

3) Einen Kettenbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man von unten beginnend jedesmal die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und diesen umkehrt, z. B. $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}}}}}$

Beweis: $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{8}{2} + 1}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} = \frac{1}{\frac{27}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{1}{\frac{29}{9}} = \frac{9}{29}$

4) In jedem Kettenbruch bilden der erste Teilbruch den ersten Näherungswert, die beiden ersten den zweiten, die drei ersten Teilbrüche den dritten Näherungswert, z. B. in $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{1}{2}}}}}$ ist $\frac{1}{3}$ der erste, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ der zweite,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ der dritte Näherungswert.

l) Der ungerade (erste, dritte, fünfte) Näherungswert ist größer, der gerade (zweite, vierte, sechste) ist kleiner als der gegebene Bruch; denn im

ersten Näherungswerte wird, indem man den Rest weglässt, der Nenner kleiner. im zweiten der Zähler kleiner als im gegebenen Bruche, z. B. $\frac{1}{3}$, größer als

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \text{ kleiner als } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}.$$

6) Der Unterschied zweier auf einander folgender Näherungswerte ist ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt aus den Nennern der beiden Näherungswerte ist, z. B. bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{7}$ ist der Unterschied $\frac{1}{21}$.

7) Die Kettenbrüche sind das Mittel, um für Brüche mit grossen Ziffern die nächsten Annäherungswerte in kleinen Zahlen zu finden.

Die Zahl Pi (π) giebt an, wievielmals der Durchmesser eines Kreises im Kreisumfang enthalten ist, sie ist 3,1415926536. Dafür erhält man durch Kettenbrüche die Näherungswerte: $3\frac{1}{7}$, $3\frac{12}{109}$, $3\frac{126}{113}$, $3\frac{4987}{23207}$. Diese Andeutungen über die Kettenbrüche mögen hier genügen.

B. Das Rechnen mit benannten Zahlen.

1. Auflösen und Zurückführen.

263. **Erklärung.** Die Wertzahl eines Mases heisst die Zahl, welche angiebt, wieviel Einheiten des niedern Mases auf eine Einheit des höhern gehen.

Beispiel: Die Wertzahl des Monats ist 30 Tage, die des Jahres 12 Monate bez. 360 Tage, die des Kilometers ist 1000 Meter, die der Mark 100 Pfennige.

264. **Satz.** Das höhere Mas löst man in das niedere Mas auf (refolvirt man), indem man die Anzahl des höhern Mases mit seiner Wertzahl vervielfacht.

Beispiel: 7 Monate = $7 \times 30 = 210$ Tage, 5 Jahre = $5 \times 360 = 1800$ Tage, 9 Kilometer = $9 \times 1000 = 9000$ Meter, 25 Mark = 2500 Pfennige.

265. **Satz.** Das niedere Mas führt man auf das höhere zurück (reduziert man), indem man die Anzahl des niedern Mases durch die Wertzahl des höhern teilt.

Beispiel: 95 Tage = $95 : 30 = 3$ Monate 5 Tage. Bei diesen Rechnungen mit der Wertzahl muss man sich gewöhnen kurz zu rechnen, d. h. blos das Ergebniss hinschreiben. Dazu ist allerdings Übung erforderlich, für welche die Übungshefte reichlich Gelegenheit bieten.

266. **Satz.** Einnamig macht man eine mehrfach benannte Zahl indem man das höchste Mas ins nächst niedere auflöst und so fort bis zum niedrigsten.

Beispiel: 8 Monate 27 Tage 5 Stunden = $(8 \cdot 30 + 27)$ Tage 5 Stunden = 117 Tage 5 Stunden = $(117 \times 24 + 5)$ Stunden = 2813 Stunden.

267. **Satz.** Mehrfach benannt macht man eine einnamige Zahl, indem man das niedrigste Mas aufs nächst höhere zurückführt und so fort bis zum höchsten.

Beispiel: 70328 Stunden = 70328 : 24 Tage = 2930 Tage 8 Stunden
 = 2930 : 30 Monate 8 Stunden = 97 Monate 20 Tage 8 Stunden.

2. Das Zufügen und Abziehen mehrfach benannter Zahlen.

Satz. Mehrfach benannte Zahlen fügt man zu, indem man die 268. Zahlen desselben Mases senkrecht unter einander schreibt, dann zunächst die Zahlen des niedrigsten Mases für sich zufügt, die Summe aufs höhere Mas zurückführt und dies Ergebniss zu den Zahlen dieses Mases zufügt, und entsprechend der Reihe nach mit den höhern Masen fortführt.

Beweis: Unmittelbar nach 124 und 265.

Beispiel: 83 *M* 75 *S*
 42 *M* 88 *S*

$$\begin{array}{r} 1 \\ 126 \text{ } M \text{ } 63 \text{ } S \end{array}$$

Satz. Mehrfach benannte Zahlen der zehnteiligen Mastheilung 269. fügt man auch zu, indem man sie einnamig macht und dann zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 264.

Beispiel: 37 Kilometer 315 Meter 37315_{,000}
 213 Meter 715 Millimeter 213_{,715}
 37528_{,715}

Der geübte Rechner darf beim Zufügen nicht mehr die Stücke nennen. sondern muss kurz rechnen, d. h. darf jedesmal nur die Summe aussprechen, die heraus kommt, so fügt er z. B. $9 + 7 + 8 + 3 + 5$ so zu, dass er nur die Summen ausspricht 9, 16, 24, 27, 32.

Das Aufrechnen ganzer Seiten in den Büchern bildet eine ausgezeichnete Uebung fürs Kurzrechnen.

Beim Buchführen wird jede Seite von unten nach oben aufgerechnet, dann nochmals zur Probe, ob richtig gerechnet ist, von oben nach unten durchgerechnet, und wenn die Summe stimmt, diese als Uebertrag auf die folgende Seite vorgetragen und beim Zufügen mitgerechnet.

Beim Rechnungsabschlusse schreibt man auf die linke Seite die Einnahmen, auf die rechte die Ausgaben und macht beide gleich, indem man auf der kleinern Seite den Uebertrag zufügt, und nach dem Abschlusse auf der andern Seite der neuen Rechnung vorträgt.

Beispiel:

Einnahme.	<i>M</i>	<i>S</i>	Ausgabe.	<i>M</i>	<i>S</i>
Bestand.....	1018	13	Wochenlohn.....	297	54
196 Scheffel Weizen.....	1764	—	50 Scheffel Saatkorn.....	600	—
83 Scheffel Roggen.....	622	50	300 Ctr. Heu.....	750	—
2055 Liter Milch.....	205	50	90 Ctr. Düngstoffe.....	270	—
			Uebertrag.....	1687	59
Summa.....	3605	13	Summa.....	3605	13
Vortrag.....	1687	59			

270. **Satz.** Mehrfach benannte Zahlen zieht man ab, indem man die Zahlen deselben Mases senkrecht unter einander schreibt, dann zunächst die Zahlen des niedrigsten Mases abzieht, und sofern dies nötig ist, eine Einheit des nächst höhern Mases borgt und entsprechend der Reihe nach mit den höhern Masen fortfährt.

Beweis: Unmittelbar nach 260 und 264.

Beispiel: 25 Ries 12 Buch 7 Bogen

$$\begin{array}{r} - 12 \quad " \quad 13 \quad " \quad 3 \quad " \\ \hline \text{Rest } 12 \text{ Ries } 19 \text{ Buch } 4 \text{ Bogen.} \end{array}$$

271. **Satz.** Mehrfach benannte Zahlen der zehnteiligen Masteilung zieht man auch ab, indem man sie gleichnamig macht und dann abzieht.

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 260.

Beispiel: Aufgabe: 53 Kgr. 350 gr.

$$- 17 \quad " \quad 725 \quad "$$

Rechnung: 53350 gr.

$$- 17725 \text{ gr.}$$

Rest 35625 gr.

Der geübte Rechner darf beim Abziehen nicht erst den Vorrat und Abzug nennen, sondern muss kurz rechnen, d. h. jedesmal nur den Rest nennen, der herauskommt.

3. Das Vervielfachen einer benannten Zahl.

272. **Erklärung.** Das Vervielfachen einer benannten Zahl heist die Rechnung, wenn eine benannte Zahl mit einer oder mehreren reinen Zahlen verwebt oder vervielfacht wird.

Das Zeug oder Produkt zweier benannter Zahlen darf in der Zahlenlehre nie vorkommen.

Es ist dies eine Beschränkung, welche sich alle Lehrer der Zahlenlehre auferlegt haben und welche man daher stets beobachten muss.

273. **Satz.** Alle Gesetze der Vervielfachung reiner Zahlen gelten auch für die Vervielfachung benannter Zahlen; das Zeug oder Produkt der letztern hat den Namen der benannten Zahl.

Beweis: Sei b eine reine, ae die benannte Zahl, so ist nach 105 $b \cdot (ae) = (ba)e$, wo ba ein Zeug oder Produkt reiner Zahlen ist. Alle Gesetze der Vervielfachung, welche also für die reinen Zahlen b und a gelten, gelten auch für die benannte Zahl ae .

Beispiel: 7 mal 8 Ellen ist gleich $7 \cdot 8 = 56$ Ellen.

274. **Satz.** Eine einfach benannte Zahl vervielfacht man mit einer reinen Zahl, indem man die beiden reinen Zahlen mit einander vervielfacht und dem Zeuge oder Produkte den Namen der benannten Zahl giebt.

Beweis: Unmittelbar nach 273.

Satz. Eine mehrfach benannte Zahl vervielfacht man mit einer 275. Zahl, indem man sie einnamig macht und dann vervielfacht.

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 274.

Beispiel: $(52 \text{ Tonnen } 716 \text{ Kgr. } 315 \text{ gr.}) \times 12 = 52'716315 \text{ gr.} \times 12$
 $= 632'595780 \text{ gr.} = 632 \text{ Tonnen } 595 \text{ Kgr. } 780 \text{ gr.}$

Satz, Eine mehrfach benannte Zahl kann man auch mit einer 276. Zahl vervielfachen, indem man die Zahl jedes Mases für sich vervielfacht, die Zeuge aufs höhere Mas zurückführt und dann zufügt.

Beweis: Unmittelbar nach 93, 274 und 265.

4. Das Teilen benannter Zahlen.

Erklärung. Das Teilen benannter Zahlen heist die dem Ver- 277. vielfachen benannter Zahlen entsprechende Trennung, wo zu dem Zeuge oder Produkte einer benannten und einer reinen Zahl bae der eine Fach oder Faktor gegeben ist und der andere gefucht wird

Beim Teilen benannter Zahlen unterscheidet man zwei Fälle. Ist der benannte Fach oder Faktor ae gegeben, so heist das Teilen ein Messen (gr. metréin), ist der unbenannte Fach oder Faktor b gegeben, so heist das Teilen ein Schneiden oder reines Teilen (gr. metrisein).

Beispiel: 3 Meter geteilt durch 100 ist ein Schneiden oder reines Teilen und giebt 3 Centimeter. 56 Meter geteilt durch 8 Meter ist ein Messen und giebt 7.

Satz des reinen Teilens. Alle Gesetze der Teilung reiner 278. Zahlen gelten auch für die Teilung der benannten Zahl durch eine reine Zahl. Der Quote oder Quotient hat den Namen der benannten Zahl.

Beweis: Unmittelbar nach 62; denn nach 62 ist $ae : b = (a : b)e$ wo $a : b$ eine Teilung reiner Zahlen ist. Alle Gesetze der Teilung, welche also für die reinen Zahlen a und b gelten, gelten auch für die Teilung der benannten Zahl ae durch b, und der Quote $(a : b)e$ hat den Namen der benannten Zahl ae.

Satz. Eine einfach benannte Zahl ae teilt man durch eine 279. reine Zahl b, indem man die Anzahl a der benannten Zahl durch die reine Zahl teilt und dem Quoten den Namen der benannten Zahl giebt

Beweis: Unmittelbar nach 278.

Beispiel: $(423 \text{ Mark}) : 9 = (423 : 9) \text{ Mark} = 47 \text{ Mark.}$

Satz. Eine mehrfach benannte Zahl teilt man durch eine Zahl, 280. indem man sie einnamig macht und teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 266 und 279.

Beispiel: $(713 \text{ Km. } 320 \text{ m } 720 \text{ mm}) : 28 = 713'320720 \text{ mm} : 28$
 $= 25'975740 \text{ mm} = 25 \text{ Km. } 475 \text{ m } 740 \text{ mm.} \quad 8^*$

281. **Satz:** Eine mehrfach benannte Zahl kann man auch durch eine Zahl teilen, indem man zuerst die Zahl des höchsten Mases teilt, den Rest ins nächste Mas auflöst und dazu die Zahl dieses Mases fügt, dann diese teilt und so fort.

Beweis: Unmittelbar nach 278, nach 184 und nach 264.

Beispiel: (37 Ries 12 Buch) : 8 = 37 Ries : 8 + 12 Buch : 8
 = 4 Ries + 5 Ries : 8 + 12 Buch : 8 = 4 Ries + (5 Ries + 12 Buch) : 8
 = 4 Ries + (5.20 + 12) Buch : 8 = 4 Ries 14 Buch.

282. **Satz des Messens.** Alle Gesetze der Teilung reiner Zahlen gelten auch für die Teilung einer benannten Zahl durch eine gleich benannte Zahl. Der Quote oder Quotient ist eine reine Zahl.

Beweis: Unmittelbar nach 62; denn nach 62 ist $ae : be$ und dies nach 180 = $(a : b) (e : e) = (a : b) 1 = a : b$ nach 173 und 172.

283. **Satz.** Eine einfach benannte Zahl teilt man durch eine gleichbenannte Zahl, indem man sie wie reine Zahlen teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 282.

284. **Satz.** Eine mehrfach benannte Zahl teilt man durch eine mehrfach benannte Zahl, indem man beide gleichnamig macht und dann wie reine Zahlen teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 264 und 283.

Beispiel: (101 \mathcal{A} 40 \mathcal{B}) : (1 \mathcal{A} 30 \mathcal{B}) = 10140 \mathcal{B} : 130 \mathcal{B}
 = 10140 : 130 = 78.

Bemerkt möge hier noch ausdrücklich werden, dass man nie zwei benannte Zahlen durch einander teilen kann, wenn man sie nicht gleichnamig machen kann.

Es ist notwendig, dass sich jeder Gebildete reiche Uebung im Rechnen mit benannten Zahlen schaffe. Das Uebungsheft und das Rechenheft II des Verfassers bieten dazu reiche Gelegenheit.

C. Die Bruchgleichung oder Proportion und der Dreisatz oder die Regeldetri,

1. Die Bruchgleichung oder die Proportion.

285. **Erklärung.** Eine Bruchgleichung oder eine Proportion, heist eine Gleichung, in welcher jede Seite ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner ungleich Null ist. Jeder solcher Bruch heist ein Verhältniss, der erste Zähler und der zweite Nenner heissen die äussern Grösen, der erste Nenner und der zweite Zähler heissen die innern Grösen.

Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder $a : b = c : d$ hier sind a und d die äussern, b

und c die innern Grösen, $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, sind die beiden Verhältnisse.

Satz. In der Bruchgleichung ist das Zeug (das Produkt) der 286. äußern Größen gleich dem der innern Größen oder

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Annahme), so ist $ad = bc$ (Folgerung).

Beweis: Man vervielfache die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

mit db , so ist (nach 180) $\frac{adb}{b} = \frac{dbc}{d}$, d. h. (nach 182) $ad = bc$.

Beispiele: $\frac{12}{16} = \frac{18}{20}$ also $16 \cdot 18 = 12 \cdot 20$.

Satz. Wenn zwei Zeuge oder Produkte einander gleich, aber 287. ungleich Null sind, so erhält man eine richtige Bruchgleichung, wenn man die beiden Fache oder Faktoren des einen Zeuges als äußere, die des andern als innere Größen setzt, oder

Wenn $ad = bc$ (Annahme), so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Folgerung).

Beweis: Da ad und bc ungleich Null sind, so ist (nach 175) auch b und d , also (nach 175) auch bd ungleich Null. Man teile die gegebene Gleichung durch bd , so ist (nach 180)

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \text{ und (nach 182) gehoben } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Beispiel: Es ist $12 \cdot 18 = 10 \cdot 18$, also ist auch $12 : 18 = 10 : 15$.

Satz. In einer Bruchgleichung kann man zwei äußere Größen 288. gegenseitig vertauschen, und ebenso zwei innere Größen.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also ist (nach 286) $ad = bc$,

mithin ist (nach 287) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ und $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Beispiel: Da $6 : 15 = 8 : 20$ so ist auch $6 : 8 = 15 : 20$, ferner $15 : 6 = 20 : 8$ und $15 : 20 = 6 : 8$.

Satz. Wenn in einer Bruchgleichung eine innere und eine 289. äußere GröÙe einander gleich sind, so sind auch die beiden andern Größen einander gleich.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, also (nach 286) $ad = bc$ und es sei $a = c$ (Voraussetzung), so ist auch $ad = bc = ba$, mithin (nach 46) auch $b = d$.

Satz. Eine äußere GröÙe einer Bruchgleichung erhält man, in- 290. dem man das Zeug oder Produkt der innern Größen durch die andre äußere GröÙe teilt, und entsprechend erhält man eine innere GröÙe u. f. w.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist (nach 286) $ad = bc$, also (nach 287 und 167)

$$a = \frac{bc}{d} \text{ und } d = \frac{bc}{a}; \text{ auch } b = \frac{ad}{c} \text{ und } c = \frac{ad}{b}.$$

Beispiele: $\frac{x}{3} = \frac{8}{5}$, also $x = \frac{3 \cdot 8}{5}$; $\frac{3}{x} = \frac{7}{5}$ also $x = \frac{3 \cdot 5}{7}$.

291. **Satz.** Eine Bruchgleichung bleibt richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachenfumme der beiden Zähler, welche ungleich Null ist, und statt des Nenners die entsprechende Vielfachenfumme der beiden Nenner setzt.

Beweis: Es sei die gegebene Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist (nach 290) $a = \frac{b}{d}c$. Sei nun $aa + cc$ eine beliebige Vielfachenfumme \geq Null von den Zählern a und c , so ist

$$aa + cc = a \frac{b}{d} c + cc = \left(a \frac{b}{d} + c \right) c$$

und (nach 175) $a \frac{b}{d} + c \geq 0$, also ist auch die entsprechende Vielfachenfumme der Nenner b und d

$$ab + cd = a \frac{b}{d} d + cd = \left(a \frac{b}{d} + c \right) d,$$

d. h. da $a \frac{b}{d} + c \geq 0$ und $d \geq 0$, auch dieser Ausdruck ≥ 0 (nach 175). Mithin ist

$$\frac{aa + cc}{ab + cd} = \frac{(a \frac{b}{d} + c) c}{(a \frac{b}{d} + c) d} = \frac{c}{d} \quad (\text{nach 182}).$$

Beispiel: $\frac{5}{7} = \frac{15}{21} = \frac{5(3 \cdot 8 + 4)}{7(3 \cdot 8 + 4)} = \frac{140}{196} = \frac{5(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)}{7(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)} = \frac{35}{49}$.

292. **Satz.** Wenn mehrere Brüche einander gleich sind, so bleibt die Gleichung richtig, wenn man in dem einen Bruche statt des Zählers eine beliebige Vielfachenfumme ≥ 0 der sämtlichen Zähler und statt des Nenners die entsprechende Vielfachenfumme der Nenner setzt.

Beweis: Seien die gegebenen Brüche $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \dots$

und sei $aa + bb + cc + \dots \geq 0$, so ist, da $a_1 = a \frac{a_1}{a}$, $b_1 = b \frac{a_1}{a}$

$c_1 = c \frac{a_1}{a} \dots$ ist, auch

$$\begin{aligned}
 aa_1 + bb_1 + cc_1 + \dots &= aa \frac{a_1}{a} + bb \frac{a_1}{a} + cc \frac{a_1}{a} + \dots \\
 &= (aa + bb + cc + \dots) \frac{a_1}{a},
 \end{aligned}$$

mithin (nach 175) ≥ 0 , da $aa + bb + cc + \dots \geq 0$ ist und auch a_1 und $a \geq 0$ sind. Es ist also

$$\begin{aligned}
 \frac{aa + bb + cc + \dots}{aa_1 + bb_1 + cc_1 + \dots} &= \frac{aa + bb + cc + \dots}{(aa + bb + cc + \dots) \frac{a_1}{a}} \\
 &= \frac{1}{\frac{a_1}{a}} = \frac{a}{a_1} \quad (\text{nach 182 und 181}).
 \end{aligned}$$

Beispiele: $\frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{21}{28} = \frac{9 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 21 \cdot 7}{12 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 28 \cdot 7} = \frac{204}{272}$
 $= \frac{9 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot \frac{1}{3} + 21 \cdot 2}{12 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{3} + 28 \cdot 2} = \frac{41 \frac{1}{2}}{55 \frac{1}{3}}$

Satz. Eine beliebige Vielfachenfumme ungleich Null aus dem 293, Zähler und Nenner des einen Bruches verhält sich zur entsprechenden Vielfachenfumme aus dem Zähler und Nenner jedes gleichen Bruches, wie der Zähler oder Nenner des ersten Bruches zu dem des zweiten.

Beweis: Man vertausche in $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nach 288 die innern Größen, so erhält man $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und hat man für jede beliebige Vielfachenfumme $aa + bb$ die Gleichung

$$\frac{aa + bb}{ac + bd} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (\text{nach 291}).$$

Satz. Wenn in zwei Bruchgleichungen drei entsprechende Größen 294. gleich sind, so sind auch die vierten gleich.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{e}{b}$ mithin (nach 289) $a = e$.

Satz. Zwei und mehrere Bruchgleichungen geben zusammenge- 295. setzt, (d. h. wenn man die entsprechenden Größen mit einander vielfacht) wieder eine richtige Bruchgleichung.

Beweis: Es sei gegeben $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{d_n}$, so ist auch (nach 17)

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_n}{b_n} &= \frac{c_1}{d_1} \cdot \frac{c_2}{d_2} \dots \frac{c_n}{d_n}, \text{ mithin (nach 180)} \\
 \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n} &= \frac{c_1 c_2 \dots c_n}{d_1 d_2 \dots d_n}.
 \end{aligned}$$

Beispiele: $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ und $\frac{8}{10} = \frac{12}{15}$; also ist auch $\frac{9 \cdot 8}{12 \cdot 10} = \frac{12 \cdot 12}{16 \cdot 15}$.

2. Der Dreifatz oder die Regeldetri.

Es bildet der Satz 290 das Gesetz der Regeldetri (der regula de tribus) wo drei Größen gegeben sind und die vierte gesucht wird. Es ist dies Gesetz das wichtigste fürs praktische Rechnen und bedarf daher noch einer Besprechung. Das Gesetz macht den Kindern bei der verschiedenen Stellung welche das x einnehmen kann, Schwierigkeiten. Um diese zu beseitigen, giebt man der Bruchgleichung für das praktische Rechnen die Form des Bruchkreuzes.

296. **Erklärung.** Das Bruchkreuz $\frac{a}{b} \bigg| \frac{c}{d}$ gelesen a durch b , wie c durch d ist die Form der Bruchgleichung fürs praktische Rechnen. Die Zeuge der Scheitel ad und bc heißen die Scheitelzeuge.
297. **Satz.** In jedem Bruchkreuze sind die Scheitelzeuge gleich und kann man die beiden Größen deselben Scheitelzeuges mit einander vertauschen.

Beweis: Unmittelbar nach 286 und 288.

Beispiele: In $\frac{8}{14} \bigg| \frac{12}{21}$ ist $8 \cdot 21 = 14 \cdot 12$ und ist also auch $\frac{8}{12} \bigg| \frac{14}{21}$.

298. **Erklärung.** Der Dreifatz, die Regeldetri ist eine Bruchgleichung, in welcher drei Größen gegeben sind und die vierte x gesucht wird.

Beispiele: $\frac{3}{x} \bigg| \frac{7}{9}$ also $7x = 3 \cdot 9$; $\frac{8}{5} \bigg| \frac{x}{12}$ also $5x = 8 \cdot 12$.

299. **Satz.** Im Dreifatze, in der Regeldetri findet man die Unbekannte x , indem man das vollständige Scheitelzeug durch das unvollständige teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 290.

Beispiel: $\frac{7}{12} \bigg| \frac{8}{x}$ $x = \frac{12 \cdot 8}{7}$ $\frac{9}{x} \bigg| \frac{10}{11}$ $x = \frac{9 \cdot 11}{10}$.

Bemerkt möge hier noch werden, dass man senkrecht, wie wagerecht heben darf, dagegen nicht über Kreuz.

Beispiel: $\frac{10 \cdot 8 \cdot 12}{4 \cdot 5 \cdot 27} \bigg| \frac{18 \cdot 20}{x \cdot 9}$. Hier kann man senkrecht heben 10 und 5, 8 und 4, 12 und 27, 18 und 9 oder wagerecht 10 und 20, 12 und 18, 27 und 9; aber nicht über Kreuz 4 und 20, 5 und 20, 27 und 18 oder 12 und 9.

300. **Satz.** Bei benannten Zahlen muss man die mehrfach benannten in einnamige verwandeln, beim Anfätze die gleich benannten unter einander schreiben und die gleichen Namen im Zähler und Nenner heben. Demnächst findet man die Unbekannte nach 299.

Beweis. Da man nach 297 die Größen deselben Scheitelzeuges mit einander vertauschen kann, so kann man stets die gleichbenannten

unter einander schreiben, dann kann man die gleichen Namen im Zähler und Nenner nach 182 heben und nun die Unbekannte nach 299 finden.

Beispiel: Wenn 8 ℓ . 7 Mark kosten, was kosten 9 ℓ .

$$\text{Ansatz } \frac{8 \ell. 7 \text{ Mk}}{9 \ell.} \cdot \frac{x}{x} \text{ oder } \frac{8 \cdot 7 \text{ Mk}}{9} \cdot \frac{x}{x} \text{ also } x = \frac{9 \cdot 7 \text{ Mk}}{8}.$$

Wenn die entsprechenden Zahlen verschieden benannt sind, so muss man sie erst gleichnamig machen, z. B. Ein Zentner kostet 115 Mk , wie viel kosten 27 kgr.? der Zentner hat 50 kgr., also Ansatz

$$\frac{50 \text{ kgr.} | 115 \text{ Mk}}{27 \text{ kgr.}} \cdot \frac{x}{x} \text{ oder } \frac{50 | 115 \text{ Mk}}{27} \cdot \frac{x}{x} \text{ also } x = \frac{27 \cdot 115 \text{ Mk}}{50}$$

Satz. des erweiterten Dreifatzes. Wenn mehr als drei 301. Größen gegeben sind, so muss man sie stets auf drei Größen zurückführen, indem man die Zeuge oder Produkte der Größen einführt.

Beispiel: 20 Arbeiter arbeiten 30 Tage an einem Graben von 250 m Länge, 6 m Breite und 2 m Tiefe. Wieviel Arbeiter sind zu einem Graben von 300 m Länge, 8 m Breite und 1,5 m Tiefe erforderlich, wenn der Graben in 78 Tagen fertig sein soll?

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } & \frac{20 \cdot 30 \cdot \text{Tage} | 250 \cdot 6 \cdot 2 \text{ m}}{x \cdot 78 \cdot \text{Tage} | 300 \cdot 8 \cdot 1,5 \text{ m}} \text{ oder } \frac{20 \cdot 30 | 250 \cdot 6 \cdot 2}{x \cdot 78 | 300 \cdot 8 \cdot 1,5} \\ x = & \frac{20 \cdot 30 \cdot 300 \cdot 8 \cdot 1,5}{78 \cdot 250 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}. \end{aligned}$$

Der Dreifatz bietet hiernach keinerlei Schwierigkeiten mehr und findet die reichste Anwendung im praktischen Leben. Das dritte und das vierte Heft des Verfassers bieten die zahlreichsten Beispiele aus dem praktischen Leben und sollte sich jeder darin die grösste Gewandtheit aneignen,

D. Die Gleichungen ersten Grades.

Erklärung. Die Unbekannte x einer Gleichung heisst die 302. Grösse, deren Wert gesucht werden soll.

Eine Wurzel der Gleichung heisst jeder bestimmte Wert, welcher statt der Unbekannten eingeführt der Gleichung genügt.

Aufgelöst heisst die Gleichung, wenn man die Wurzel der Gleichung gefunden hat.

Satz. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten 303. der Gleichung mit gleichen Grössen auf gleiche Weise knüpft, namentlich, wenn man auf beiden Seiten Gleiches zufügt, Gleiches abzieht, mit Gleichem vervielfacht, durch Gleiches (ungleich Null) teilt.

Beweis: Unmittelbar nach 17.

Satz. Statt auf einer Seite der Gleichung ein Stück zuzufügen 304. oder einen Abzug abzuziehen, kann man auf der andern Seite das Stück abziehen, oder den Abzug zufügen, und

Statt eine Seite mit einem Fache zu vervielfachen oder durch einen Nenner zu teilen, kann man die andere Seite durch den Fach teilen, oder mit dem Nenner vervielfachen, d. h.

wenn $a + c = b$, so ist $a = b - c$,

wenn $a - c = b$, so ist $a = b + c$,

wenn $ac = b$, so ist $a = \frac{b}{c}$,

wenn $\frac{a}{b} = c$, so ist $a = bc$.

Beweis: Unmittelbar aus 303.

Beispiele:

Wenn $x + c = b$, so ist $x = b - c$. Wenn $x - c = b$, so ist $x = b + c$.

Wenn $ax = b$, so ist $x = \frac{b}{a}$. Wenn $\frac{x}{a} = b$, so ist $x = ab$.

Wenn $ax + b = c$, so ist $ax = c - b$ und $x = \frac{c - b}{a}$ u. f. w. Und in Zahlen

Wenn $x + 12 = 27$, so ist $x = 27 - 12$. Wenn $x - 5 = 12$, so ist $x = 12 + 5$.

Wenn $7 \cdot x = 15$, so ist $x = \frac{15}{7}$. Wenn $\frac{1}{7} x = 15$, so ist $x = 15 \cdot 7$.

Wenn $7x + 5 = 12$ so ist $7x = 12 - 5$ und $x = \frac{12 - 5}{7}$ u. f. w.

305. **Satz.** Ein Glied schafft man von einer Seite weg, indem man es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung stellt.

Einen Fach oder einen Nenner eines Gliedes schafft man weg, indem man alle andern Glieder durch den Fach teilt, oder mit dem Nenner vervielfacht.

Beweis: Unmittelbar aus 304.

Beispiele: $x + c = m$, $x = m - c$ $x \cdot \frac{a}{c} = m$, $x = \frac{mc}{a}$
 $x + (c - b) = m$, $x = m - c + b$ $x : \frac{a}{c} = m$, $x = \frac{ms}{c}$

306. **Satz.** Man kann die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung entgegengesetzt nehmen.

Beweis: Man kann beide Seiten der Gleichung mit -1 vervielfachen, dann aber werden alle Zeichen entgegengesetzt (nach 158).

Beispiele: $a - x = b - c$, $x - a = c - b$.

307. **Satz.** Wenn beide Seiten der Gleichung Brüche sind, deren Zähler ungleich Null, so kann man beide Brüche umkehren.

Beweis: Es sei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}$ (nach 303)

d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (nach 181), was zu beweisen war.

Beispiele: $\frac{a}{x} = c$; $\frac{x}{a} = \frac{1}{c}$; $\frac{a+b}{x} = \frac{m-c}{1}$; $\frac{x}{a+b} = \frac{1}{m-c}$

Erklärung. Eingerichtet heist eine Gleichung, wenn alle 308.
Nenner in denen x vorkommt, fortgeschafft, alle Klammern, welche x enthalten, aufgelöst, die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die ohne x auf die rechte Seite gebracht sind, die Glieder, welche x gleich oft als Fache enthalten, in ein Glied vereinigt, und die Glieder so geordnet sind, dass das vorangehende Glied x öfter als Fach enthält, als die folgenden Glieder, endlich das erste Glied ausser x nur den Fach 1 enthält.

1, Die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.

Satz. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten 309.
ist aufgelöst, wenn sie eingerichtet ist.

Satz. Lösung der Gleichung ersten Grades mit einer 310.
Unbekannten. Die Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten löst man in folgender Weise:

1. Man schafft alle Nenner weg und zwar schafft man den Nenner eines Gliedes weg, indem man jedes andere Glied der Gleichung mit der GröÙe, welche im Nenner steht, vervielfacht.

2. Man löst alle Klammern auf, welche x enthalten nach 131, 180 und 183.

3. Man schafft die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die andern auf die rechte Seite, indem man jedes Glied der rechten Seite, welches x enthält, mit entgegengesetztem Zeichen auf die linke Seite stellt, und jedes Glied der linken Seite, welches kein x enthält, mit entgegengesetztem Zeichen auf die rechte Seite stellt.

4. Man schließt alle Glieder der linken Seite in eine Klammer, welche mit x vervielfacht ist nach 183.

5. Man schafft den Fach oder Faktor von x fort, indem man die andere Seite durch diesen Fach teilt.

6. Man führt nunmehr die Rechnung aus.

Beweis: Unmittelbar aus den Sätzen 303 bis 309.

Beispiel a.

$$\begin{array}{l}
 105 = \frac{(7x - 9)3}{3x - 8} \\
 1. \quad 105(3x - 8) = (7x - 9)3 \\
 2. \quad 315x - 840 = 21x - 27 \\
 3. \quad 315x - 21x = 840 - 27 \\
 4. \quad (315 - 21)x = 840 - 27 \\
 \quad \quad 840 - 27 \\
 5. \quad x = \frac{813}{271} \\
 6. \quad x = 294 = 98
 \end{array}$$

Beispiel b.

$$\begin{array}{l}
 \frac{12}{x} + 13 = \frac{98}{3x} - 18 \\
 1. \quad 12 \cdot 3 + 13 \cdot 3x = 98 - 18 \cdot 3x \\
 2. \\
 3. \quad 13 \cdot 3x + 18 \cdot 3x = 98 - 12 \cdot 3 \\
 4. \quad (13 \cdot 3 + 18 \cdot 3)x = 98 - 12 \cdot 3 \\
 \quad \quad 98 - 12 \cdot 3 \\
 5. \quad x = \frac{18 \cdot 3 + 18 \cdot 3}{2/3} \\
 6. \quad x = 62/3 = 2/3
 \end{array}$$

Es ist notwendig, dass sich jeder Gebildete eine reiche Uebung in der Lösung dieser Gleichungen und in der Ausführung dieser sechs Umformungen schaffe. Das Uebungsheft des Verfassers für die Gleichungen ersten Grades bietet dazu reiche Gelegenheit.

Bei der Auflösung der Klammern muss man die Strichklammer z. B.

— $(a - b)$, die Malklammer z. B. $a \frac{b}{c}$ und die Beziehungsklammer $a(b - c)$ unter-

scheiden. Nicht selten ist die Klammer eine mehrfache z. B. in $a - b(c + d) \frac{e}{n}$ ist im zweiten Gliede eine dreifache Klammer: eine zwiefache Beziehungsklammer

$b(c + d)$ und $(bc + bd) \frac{e}{n} = bc \frac{e}{n} + \frac{bde}{n}$ und eine Strichklammer

— $(b(c + d) \frac{e}{n})$. Bei der mehrfachen Klammer muss stets erst die höhere

Klammer (hier die Beziehungsklammer) und dann erst die niedere Klammer (hier die Strichklammer) gelöst werden. Wenn der Teiler oder Nenner zwei oder mehrere Glieder enthält, so darf man diese Teilkammer nie auflösen, sondern muss stets mit dem ganzen Nenner teilen, oder muss jedes Glied der Gleichung mit dem Nenner vervielfachen und dadurch den Nenner fortschaffen, z. B. In $\frac{a}{b + c} = d + e$ darf man nicht durch b und durch c einzeln teilen. Will man den Nenner fortschaffen, so vervielfacht man jedes Glied mit $b + c$ und erhält dann $a = (d + e)(b + c)$. Reiche Uebungen bietet das Uebungsheft.

Der gewandte Rechner führt einen grossen Teil dieser Umformungen im Kopfe aus und schreibt nur die Umformungen 1 oder 2, 3 oder 6 nieder, z. B.

$$\begin{array}{ll} (x + 5) : (x - 5) = 7 : 4 & (x + 5) 4 = (x - 5) 7 \\ 4x + 20 = 7x - 35 & 3x = 55; x = 18\frac{1}{3}. \end{array}$$

311. **Satz.** Wenn die Aufgabe in einem Satze gegeben ist, so müssen zunächst die Worte in Formeln übersetzt werden; die erhaltene Gleichung heisst der Ansatz. Die Gleichung wird dann gelöst, die Lösung und die Formel wieder in einen vollständigen Satz zurückübersetzt, die Antwort.

Beispiel. Ein Weg soll mit Bäumen bepflanzt werden, so dass diese 3 m aus einander stehen; hätte man 100 Bäume weniger, so könnte man sie nur 4 m aus einander stellen; wieviel Bäume hatte man?

Ansatz: $(x - 100) 4 \text{ m} = x \cdot 3 \text{ m}$

Lösung: $x \cdot 4 - 400 = x \cdot 3 \quad x = 400,$

Antwort: Man hatte 400 Bäume.

Die Anwendung dieser Gleichungen ist für das praktische Leben und für jeden Fortschritt in der Mathematik von grösster Wichtigkeit. Hier ist eine reiche Uebung geboten. Des Verfassers Uebungsheft bietet hierfür durch 262 Aufgaben die reichste Gelegenheit. Im Auflösungshefte findet man jederzeit den Ansatz und die Antwort.

3. Die Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

312. **Satz.** Lösung der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

Die Gleichungen mit mehreren Unbekannten löst man durch Einführung, durch Gleichsetzung oder Vervielfachung.

1. Lösung durch Einführung (Substitutionsmethode). Man löst die eine Gleichung in Bezug auf eine Unbekannte und führt den erhaltenen Wert in die andern Gleichungen ein.

2. Lösung durch Gleichsetzung (Gleichsetzungsmethode). Man löst zwei Gleichungen in Bezug auf dieselbe Unbekannte und setzt die erhaltenen Werte einander gleich.

3. Lösung durch Vervielfachung (Multiplikationsmethode). Man vervielfacht jede der beiden Gleichungen mit dem Fache (dem Faktor), den die eine Unbekannte in der andern Gleichung hat, und zieht nun die eine Gleichung von der andern ab.

Die erste Lösungsart ist die allgemeinste, aber häufig auch wegen der Nenner sehr unbequem; die dritte Lösungsart ist, wo sie anwendbar ist, am bequemsten und daher vorzuziehen.

Beispiel a: Einführung $3\frac{3}{4}x = 36 - \frac{3}{4}y$ $4\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}y + 34$
 $15x = 144 - 3y$ $14x = 8y + 102$ $x = 144 - 102 - 11y$
 $x = 42 - 11y$ also $15(42 - 11y) = 144 - 3y$; $(165 - 3)y = 630 - 144$
 $y = \frac{486}{162} = 3$ $x = 42 - 11y = 9$

Beispiel b: Gleichsetzung $\frac{4x+81}{10y-17} = 6$ $\frac{12x+97}{15y-17} = 4$
 $4x+81 = 6(10y-17) = 60y-102$; $12x+97 = 4(15y-17) = 60y-68$
 $4x+81+102 = 12x+97+68$; $8x = 18$; $x = 2\frac{1}{4}$
 $60y = 4x+81+102 = 192$ $y = 3\frac{1}{5}$

Beispiel c: Vervielfachung $2x - 3y = 35$; $x + 2y = 9$

$2x + 4y = 18$; $4y + 3y = 18 - 35$; $y = -\frac{17}{7} = -2\frac{3}{7}$

$x = 9 - 2y = 9 + 4\frac{6}{7} = 13\frac{6}{7}$

Es wird auch hier sehr zweckmässig sein, wenn sich die Gebildeten einige Uebung in der Lösung dieser Aufgaben schaffen. Das Uebungsheft des Verfassers bietet hiezu reiche Gelegenheit.

4. Die Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.

Satz: Lösung der Gleichung ersten Grades mit drei 313. Unbekannten. Man entfernt zunächst eine Unbekannte aus 2 Gleichungs-paren und entfernt dann aus den erhaltenen beiden Gleichungen die zweite Unbekannte.

Beispiel: $x + y + z = 15$; $x + y - z = 5$; $x - y + z = 1$

$2x + 2y = 20$; $2x = 6$; $x = 3$; $y = 7$; $z = 5$.

Auch hier ist es sehr zweckmässig, wenn die Gebildeten sich Uebung in der Lösung dieser Aufgaben verschaffen. Das Uebungsheft des Verfassers bietet wieder zahlreiche Uebungen, sowie zahlreiche (132) Aufgaben zur Anwendung dieser Gleichungen auf das praktische Leben dar und kann zur Uebung im

Selbstunterrichte wie in Schulen empfohlen werden, da die Aufgaben so geordnet sind, das jeder sie lösen kann.

314. Aufgabe. n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten auflösen.

Auflösung. Aus n Gleichungen, welche n Unbekannte enthalten, kann man nach 312 eine Unbekannte entfernen und erhält $n - 1$ Gleichungen ohne diese Unbekannte. Ebenso erhält man aus $n - m$ Gleichungen mit $n - m$ Unbekannten (d. h. aus denen bereits m Unbekannte entfernt sind) andere $n - m - 1$ Gleichungen mit $n - m - 1$ Unbekannten (d. h. aus denen $m + 1$ Unbekannte entfernt sind), und zuletzt $n - (n - 1)$, d. h. 1 Gleichung mit einer Unbekannten, d. h. die Gleichung ist nach dieser Unbekannten gelöst. Tauscht man dann die entsprechenden Vorzahlen dieser Unbekannten x_1 mit einer andern Unbekannten x_2 , so erhält man die Lösung nach dieser andern Unbekannten und so fort.

Die bequemste Art und Weise der Lösung von Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten werden wir in der Ausdehnungslehre kennen lernen, auf welche hier verwiesen werden kann.

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Die höhere Zahlenlehre oder die Lehre von den Höhen, den Tiefen und den Logen oder Logarithmen.

9. Höhen, Tiefen und Logen der Zahlen und Eigenschaften der Höhen, Tiefen und Loge.

A. Das Höhen der Zahlen.

Erklärung. Das Höhen (das Potenziren) heist die dritte oder 315. höchste Ordnung der Größenknüpfung, für welche das Gesetz der Doppelbeziehung zum Zufügen und zum Vervielfachen gilt, d. h. statt eine GröÙe zur Summe von einer zweiten GröÙe und einer Eins zu höhen, kann man die GröÙe zur zweiten GröÙe höhen und das Ergebniss mit der ersten GröÙe vervielfachen.

Eine GröÙe zur Eins gehöht, wird der GröÙe selbst gleich gesetzt.

Beispiele:

$$3^1 = 3 ; 3^2 = 3^{1+1} = 3 \cdot 3 = 9 ; 3^3 = 3^{2+1} = 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27.$$

Für das Höhen empfiehlt es sich, diese Erklärung zunächst an einigen Beispielen klar zu machen, z. B.

$$8^{2+1} = 8^2 \cdot 8^1 = 8^3 \cdot 8 \quad 2^{5+1} = 2^5 \cdot 2^1 = 2^5 \cdot 2$$

$$8^{1+1+1+1} = 8^1 \cdot 8^1 \cdot 8^1 \cdot 8^1 = 4096 \quad 2^{1+1+1+1+1+1} = 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 = 64$$

$$a^{m+1} = a^m \cdot a^1.$$

Es wird zweckmässig sein dies bis zur vollsten Anschaulichkeit der Erklärung an dem „Eins hoch Eins“ einzuüben z. B.

$$2^{1+1} = 2 \cdot 2 = 4 ; 2^{2+1} = 2^2 \cdot 2 = 8 ; 2^{3+1} = 2^3 \cdot 2 = 16 ; 2^{4+1} = 2^4 \cdot 2 = 32$$

$$3^{1+1} = 3 \cdot 3 = 9 ; 3^{2+1} = 3^2 \cdot 3 = 27 ; 3^{3+1} = 3^3 \cdot 3 = 81 ; 3^{4+1} = 3^4 \cdot 3 = 243$$

$$4^{1+1} = 4 \cdot 4 = 16 ; 4^{2+1} = 4^2 \cdot 4 = 64 ; 4^{3+1} = 4^3 \cdot 4 = 256 ; 4^{4+1} = 4^4 \cdot 4 = 1024$$

Die Erklärung bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die so eben gegebene Erklärung ist die allein scharfe und streng wissenschaftliche und zugleich die einfachste (die elementarste). Aus ihr lässt sich das ganze Gesetz der Doppelbeziehung ableiten. Andererseits enthält diese Erklärung aber auch nicht mehr, als unumgänglich nötig ist, um das Gesetz der Doppelbeziehung daraus ableiten zu können.

Endlich ist diese Erklärung auch allein einfach (elementar). Wollen wir z. B. 9^5 ableiten, so müssen wir zunächst $9^2 = 9^{1+1} = 9 \cdot 9 = 81$ ableiten, daraus $9^3 = 9^{2+1} = 81 \cdot 9 = 729$; dann $9^4 = 9^{3+1} = 729 \cdot 9 = 6561$ endlich $9^5 = 9^{4+1} = 6561 \cdot 9 = 59049$. Die Erklärung ist also ganz einfach oder elementar.

Der Name „das Höhen“ entspricht ganz der Bezeichnung dieser Größenknüpfung an gelesenen a hoch n , und bezeichnet höchst passend die Art dieser Knüpfung, der höchsten in der Zahlenlehre, wie unter den möglichen Arten der Denk-Knüpfungen überhaupt.

316. **Erklärung.** Das Zeichen des Höhens ist das Hochschreiben der GröÙe, welche die andere höh't, z. B. a^m gelesenen a hoch m .

Die niedrig stehende GröÙe, welche gehöh't werden soll, heist die Base, die hochstehende, welche höh't, heist die Stufe oder der Exponent, das Ergebniss der Beziehung heist die Höhe oder die Potenz.

Wenn keine Klammer steht, so wird die gefammte Stufe nur auf die nächst vorher stehende GröÙe der Base bezogen.

Beispiele: Ohne Klammer:

$$a + b^c = a + (b^c) \quad ab^m = a(b^m) \quad b^m \cdot a = (b^m)a$$

$$a^{m+n} = a^{(m+n)} \quad a^{mn} = a^{(mn)} \quad a^{b^c} = (a^b)^c$$

Die Namen „die Base,“ „die Stufe“ und die „Höhe“ sind bereits allgemein eingeföhrt und entsprechen der Sache. Da jedoch diese deutschen Ausdrücke noch einigen Gelehrten weniger geläufig sind, so führe ich neben den deutschen Ausdrücken auch jeden Satz in den üblichen Fremdwörtern auf.

Auch beim Höhen oder Potenziren ist es wieder höchst wichtig, sich darüber klar zu werden, welche Klammern ohne Aenderung des Wertes weggelassen werden können. In jeder einfachen Knüpfungsart können die Klammern fortgelassen werden, wenn fortschreitend geknüpft werden soll: so ist

$$a^{(b+c)} \cdot d = a^{b+c} \cdot d, \text{ so ist } (a^b)^c = a^{b^c}.$$

Wenn dagegen zwei oder mehr Knüpfungsarten gemengt sind, so muss jedesmal zunächst die höhere Knüpfung ausgeföhrt werden, ehe die niedere Knüpfung ausgeföhrt wird, doch gilt dabei die Knüpfung in der Stufe oder im Exponenten höher als in der Base. So ist $a + bc + cd^e = a + (bc) + [c(d^e)]$, so ist $bc^e = b(c^e)$ und $b^c e = (b^e)c$, so ist $a^{b+c} = a^{(b+c)}$ und $a^{bc} = a^{(bc)}$. Es ist wichtig, dass man sich hierin übe.

317. **Erklärung.** Die Klammer heist eine Basenklammer, wenn sie in der Base steht; sie heist eine Stufenklammer, wenn sie in der Stufe steht.

Beispiele: Bafenklammer: $(3,5)^2$; $(3+5)^3$; $(a \cdot b)^n$; $(a+b)^m$.

Stufenklammer: $a^{(m+n)c}$; $a^{(b^d)c}$; $a^{(c^d)}$.

Grundformeln des Höhens (des Potenzirens).

318.

$$a^{b+1} = a^b \cdot a \quad a^1 = a \quad 1^1 = 1$$

Statt zu der Stufe eine Eins zu fügen, kann man die Höhe der Bafe zur Stufe mit der Bafe vervielfachen.

Statt zu dem Exponenten eine Eins zu addiren, kann man die Potenz der Bafe zum Exponenten mit der Bafe multiplizieren.

Eine Zahl mit Eins höhen (potenziren) ändert die Gröse nicht. Eins ist diejenige Gröse, welche mit sich selbst gehöht (potenzirt) sich nicht ändert.

Man kann aus dieser Grundformel das Eins hoch Eins ableiten. Die umstehende Tafel ist hienach berechnet, sie giebt die neun ersten Höhender Zahlen 1 bis 50.

Satz. $a^0 = 1$, wenn $a \geq 0$ ist.

319.

Jede Zahl ungleich Null giebt mit Null gehöht eins.

Beweis: Es ist $a = a^1 = a^{0+1}$ (nach 318 und 134)
 $= a^0 \cdot a$ (nach 318)

Also ist a^0 eine Gröse, welche mit jeder beliebigen Zahl vervielfacht dieselbe nicht ändert, d. h. es ist $a^0 = 1$ nach 98.

Satz. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, wo c eine ganze Zahl. 320.

Statt in der Stufe zu einer Zahl eine ganze Zahl zu fügen, kann man die Bafe zu den einzelnen Zahlen der Stufe höhen und die beiden Höhen mit einander vervielfachen und Zwei Höhen gleicher Bafe vervielfacht man, indem man bei derselben Bafe die Stufen fägt.

Statt in dem Exponenten zu einer Zahl eine ganze Zahl zu addiren, kann man die Bafe zu den einzelnen Zahlen des Exponenten höhen und die beiden Potenzen mit einander multiplizieren und Zwei Potenzen gleicher Bafe multipliziert man, indem man bei derselben Bafe die Exponenten addirt.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c .

1. Der Satz gilt, wenn $c = 1$ ist nach 318.

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), so gilt er auch für die Zahl $c + 1$; denn es ist

$$a^{b+(c+1)} = a^{(b+c)+1} \quad (\text{nach 131})$$

$$= a^{b+c} \cdot a \quad (\text{nach 318})$$

$$= a^b \cdot a^c \cdot a \quad (\text{nach Annahme})$$

Zu No. 318: Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 50.

1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1889568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5158632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7962624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881876	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	24300000	729000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69348957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256813856
45	2025	91125	4100625	184528125	8308765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229845007	10779215829
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000

Die ersten 9 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 50.

1	7	8	9
1	1	1	1
2	128	256	512
3	2187	6561	19683
4	16384	65536	262144
5	78125	390625	1958125
6	279936	1679616	10077696
7	823543	5764801	40858607
8	2097152	16777216	134217728
9	4782969	48046721	887420489
10	10000000	100000000	1000000000
11	19487171	214358881	2357917691
12	35881808	429981696	5159780352
13	62748517	815780721	10604499378
14	105418504	1475789056	20661046784
15	170859375	2562890625	38443359875
16	268435456	4294967296	68719476736
17	410938678	675757441	118587876497
18	612220032	11019960576	198959290368
19	898871739	16983569041	822887697779
20	1280000000	25600000000	512000000000
21	1901068541	37822859861	794280046581
22	2494357888	54875873536	1207269217792
23	3404825447	78310985281	1801152661463
24	4586471424	110075314176	2641807540224
25	6108515625	152587890625	3814697265625
26	8081810176	208827064576	5429508678976
27	10460858203	282429586481	7625597484987
28	18492928512	877801998336	10678455953406
29	17249876309	500246412961	14507145975809
30	21870000000	656100000000	19683000000000
31	27512614111	852891087441	26489622160671
32	34859788868	1099511627776	35184872088832
33	42618442977	1406408618241	46411484401953
34	52523350144	1785793904896	60716992766464
35	64339296875	2251875390625	78815638671875
36	78364164096	2821109907456	101559956668416
37	94981877133	3512479458921	129961739795077
38	114415582592	4347792138496	165216101262848
39	137231008679	5352009260481	208728861158759
40	163840000000	6553600000000	262144000000000
41	194754278881	7984925229121	327881984893961
42	230659888248	9682651996416	406671888848472
43	271818611107	11688200277601	502592611936843
44	319277809664	1404823825216	618121899509504
45	373669458125	16815125390625	756680642578125
46	435817657216	20047612281936	922190162869056
47	506623120463	23811286661761	1119130473102767
48	587068842272	28179280429056	1352605460594688
49	678223072849	33232380569601	1628413697910449
50	781250000000	39062500000000	1958125000000000

$$= a^b \cdot (a^c \cdot a) \quad (\text{nach 180})$$

$$= a^b \cdot a^{c+1} \quad (\text{nach 318}).$$

321. 3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Beziehungsgefetz des Höhens (des Potenzirens)

$$a_{1,n}^{S b_b} = P a_{1,n}^{b_b} \quad \text{oder} \quad a^{b_1+b_2+\dots+b_n} = a^{b_1} \cdot a^{b_2} \cdot \dots \cdot a^{b_n}$$

In jeder Zahlenknüpfung durch Höhen kann man in der Stufe (im Exponenten) die Summe von ganzen Zahlen auflösen, indem man die Base zu den einzelnen Stücken der Stufe höht und die Höhen vervielfacht.

indem man die Base mit den Stücken des Exponenten einzeln potenzirt und die Potenzen multipliziert.

Die Höhe oder Potenz ist wieder eine Zahl.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 2$ nach 320.

2. Wenn der Satz für n gilt, so gilt er auch für $n + 1$; denn

$$a_{1,n+1}^{S b_b} = a_{1,n}^{(S b_b)_{n+1}^{+b}} \quad (\text{nach 14})$$

$$= a_{1,n}^{S b_b} \cdot a^{b_{n+1}} \quad (\text{nach 320})$$

$$= P a_{1,n}^{b_b} \cdot a^{b_{n+1}} \quad (\text{nach Annahme}).$$

$$= P a_{1,n+1}^{b_b} \quad (\text{nach 14})$$

3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

322. Satz. $a^1 = a \quad 1^a = 1$

Die Eins in der Stufe (im Exponenten) ist die nicht ändernde GröÙe des Höhens und die Eins in der Base ist die unveränderliche GröÙe des Höhens.

Beweis: Es ist $a^1 = a$ nach 318; es ist aber auch nach 321 $1^a = 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdot 1^1 \cdot \dots \cdot 1^1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$. (nach 97).

323. Satz. $(ab)^c = a^c \cdot b^c$, wo c eine ganze Zahl.

Das Zeug zweier Zahlen erhöht man mit einer ganzen Zahl, indem man die beiden Zahlen einzeln zu der Stufe erhöht und die Höhen vervielfacht.

das Produkt zweier Zahlen potenzirt man mit einer ganzen Zahl, indem man die Faktoren einzeln mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multipliziert.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c .

1. Der Satz gilt, wenn $c = 1$ ist; denn

$$(ab)^1 = ab = a^1 \cdot b^1 \quad (\text{nach 318})$$

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), so gilt er auch für die Zahl $c + 1$ (Folgerung); denn

$$(ab)^{c+1} = (ab)^c \cdot ab \quad (\text{nach 318})$$

$$= a^c \cdot b^c \cdot ab \quad (\text{nach Annahme})$$

$$= (a^c \cdot a) (b^c \cdot b) \quad (\text{nach 180})$$

$$= a^{c+1} \cdot b^{c+1} \quad (\text{nach 318}).$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $a^{bc} = (a^b)^c$

324.

Eine Zahl höht man zu dem Zeuge zweier ganzen Zahlen, indem man die Base zu den Zahlen der Stufe fortschreitend höht.

Eine Zahl potenzirt man mit dem Produkte zweier ganzen Zahlen, indem man die Base mit den Zahlen des Exponenten fortschreitend potenzirt.

Beweis: Einfach oder elementar in Bezug auf c.

1. Der Satz gilt, wenn $c = 1$ ist; denn $a^{b \cdot 1} = a^b = (a^b)^1$

(nach 318).

2. Wenn der Satz für eine beliebige ganze Zahl c gilt (Annahme), so gilt er auch für die Zahl $c + 1$ (Folgerung); denn

$$(a^b)^{c+1} = (a^b)^c \cdot a^b \quad (\text{nach 318})$$

$$= a^{bc} \cdot a^b \quad (\text{nach Annahme})$$

$$= a^{bc+b} \quad (\text{nach 320})$$

$$= a^{b(c+1)} \quad (\text{nach 156})$$

3. Also gilt der Satz nach 24 allgemein.

Satz. $(a^b)^c = (a^c)^b$

325.

Die Ordnung in welcher man fortschreitend erhöht oder potenzirt, kann man ohne Aenderung des Wertes beliebig ändern.

Beweis: $(a^b)^c = a^{bc} \quad (\text{nach 324})$

$$= a^{cb} \quad (\text{nach 180})$$

$$= (a^c)^b \quad (\text{nach 324}).$$

Gefetz der Zahlenhöhung (der Potenzirung von Zahlen.) 326.

Wenn in der Stufe (im Exponenten) nur ganze Zahlen vorkommen, so kann man in jeder Zahlenknüpfung durch Höhen

erstens jedes Basenzug auflösen, indem man die Fache der Base zu der Stufe höht und die Höhen vervielfacht,

erstens das Basenprodukt auflösen, indem man die Faktoren mit dem Exponenten potenzirt und die Potenzen multipliziert.

zweitens jede Stufenfumme auflösen, indem man die Base zu jedem Stücke der Stufe höht und die Höhen vervielfacht und

drittens jedes Stufenzeug auflösen, indem man die Base fortschreitend zu den Fachen der Stufe höht.

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend höht, ist beliebig. Die Höhe ist wieder eine Zahl.

zweitens die Exponenten-fumme auflösen, indem man die Base mit den Stücken potenzirt und die Potenzen multipliziert, und

drittens das Exponentenprodukt auflösen, indem man die Base fortschreitend mit den Faktoren potenzirt.

Die Ordnung, in welcher man fortschreitend potenzirt, ist beliebig. Die Potenz ist wieder eine Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus 323, 320, 324 und 325.

327. Satz. $a^n = \frac{P}{1,n}$ * n eine ganze Pluszahl

Wenn die Stufe eine ganze Pluszahl n ist, so ist die Höhe ein Zeug, dessen n Fache der Base gleich sind.

Wenn der Exponent eine ganze positive Zahl n ist, so ist die Potenz ein Produkt, dessen n Faktoren der Base gleich sind.

Beweis: Unmittelbar aus 326.

328. Satz. $0^n = 0$ * n eine ganze Pluszahl.

Null, zu jeder ganzen Pluszahl erhöht, giebt wieder Null.

Null, mit jeder ganzen positiven Zahl potenzirt, giebt wieder Null.

Beweis: Unmittelbar aus 327 und 174.

329. Satz. $1^n = 1$; $(-1)^{2n} = 1$; $(-1)^{2n+1} = -1$ * n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe von Pluseins zur ganzen Stufe ist wieder Pluseins; jede Höhe von Stricheins zur geraden Stufe ist Pluseins, zur ungeraden Stufe ist Stricheins.

Jede Potenz von + 1 mit ganzem Exponenten ist wieder + 1; jede Potenz von - 1 mit geradem Exponenten ist + 1, mit ungeradem Exponenten ist - 1.

Beweis: Unmittelbar aus 322 und 180.

330. Satz. $(+a)^n = + (a^n)$; $(-a)^{2n} = + (a^{2n})$; $(-a)^{2n+1} = - (a^{2n+1})$ * n eine ganze Pluszahl.

Jede Höhe einer Pluszahl zur ganzen Stufe ist wieder eine Pluszahl.

Jede Potenz einer positiven Zahl mit ganzem Exponenten ist eine positive Zahl.

Jede Höhe einer Strichzahl zur geraden Stufe ist eine Pluszahl, zur ungeraden Stufe eine Strichzahl.

Jede Potenz einer negativen Zahl mit geradem Exponenten ist eine positive Zahl, mit ungeradem Exponenten eine negative Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus 158, 326, und 329.

Beispiele: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $3^3 = 27$; $3^5 = 243$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$; $(-3)^3 = (-3)^2 \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$

$(-3)^5 = (-3)^{4+1} = (-3)^4 \cdot (-3)^1 = 81 \cdot (-3) = -243.$

Satz. Höhen (Potenzen) von entgegengesetzter Base zu gleicher Stufe sind einander gleich, wenn die Stufe gerade, entgegengesetzt wenn sie ungerade ist.

Beweis: Unmittelbar aus 330.

Beispiele: $3^4 = (-3)^4$; $3^5 = -(-3)^5.$

Satz. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, * $a \geq 0$, n eine ganze Zahl. 332.

Wenn die Base ungleich Null und die Stufe eine ganze Zahl ist, so sind die Höhen oder Potenzen zur entgegengesetzten Stufe die umgekehrten Werte von einander.

Beweis: $a^{-n} = \frac{a^{-n} \cdot a^n}{a^n}$ (nach 167)

$= \frac{a^{-n+n}}{a^n}$ (nach 320)

$= \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ (nach 319)

2. Ebenso folgt $a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$

Beispiele: $9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$; $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}.$

Satz. Eine Zahl vervielfacht man bez. teilt man durch 10^n , 333. wo n eine ganze Pluszahl ist, indem man das Komma um n Stellen nach rechts, bez. nach links rückt, und

Statt das Komma um n Stellen nach rechts bez. nach links zu rücken, kann man die Zahl mit 10^n vervielfachen bez. durch 10^n teilen.

Beweis: Unmittelbar aus 193 und 194.

Satz. $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$ * $a \geq 0$, b und c ganze Zahlen.

Wenn die Base ungleich Null und die Zahlen in der Stufe ganze Zahlen sind, so kann man, statt mit einem Unterschiede zu erhöhen, auch mit den Gliedern einzeln erhöhen und die Höhen entsprechend teilen und

kann man, statt Höhen von gleicher Base zu teilen, auch die Stufen entsprechend abziehen.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } a^{b-c} &= a^{b-c} \cdot a^c : a^c && (\text{nach 167}) \\ &= a^{b-c+c} : a^c && (\text{nach 320}) \\ &= a^b : a^c && (\text{nach 129}).\end{aligned}$$

$$\text{Beispiele: } 7^{5-3} = 7^2 = 49 = 7^5 : 7^3 = 16807 : 343.$$

$$335. \quad \text{Satz.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c} \quad * \quad b \geq 0, \quad c \text{ eine ganze Pluszahl.}$$

Einen Bruch erhöht man zu einer Zahl, indem man Zähler und Nenner einzeln erhöht, und

Statt Zähler und Nenner eines Bruches einzeln zu erhöhen, kann man den ganzen Bruch erhöhen.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } \left(\frac{a}{b}\right)^c &= \left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c : b^c && (\text{nach 167}) \\ &= \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c : b^c && (\text{nach 323}) \\ &= a^c : b^c && (\text{nach 167}).\end{aligned}$$

$$\text{Beispiel: } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 3^3 : 4^3.$$

$$336. \quad \text{Satz.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c \quad * \quad a \text{ und } b \geq 0, \quad c \text{ eine ganze Zahl.}$$

Einen Bruch erhöht man zu einer Strichzahl, indem man den Bruch umkehrt und zu der entsprechenden Pluszahl erhöht.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-c} &= 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^c && (\text{nach 332}) \\ &= 1 : \frac{a^c}{b^c} && (\text{nach 335}) \\ &= \frac{b^c}{a^c} && (\text{nach 181}) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^c && (\text{nach 335})\end{aligned}$$

$$\text{Beispiel: } \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

337. Satz. Jeder echte Plusbruch giebt, zu einer ganzen Pluszahl erhöht, einen echten Bruch, zu einer ganzen Strichzahl erhöht, eine Höhe grösser als Eins, und

Jeder positive echte Bruch giebt, mit einer ganzen positiven Zahl potenziert, einen echten Bruch, mit einer ganzen negativen potenziert, eine Potenz grösser als 1, und

Jede Zahl grösser als Eins giebt, zu einer ganzen Pluszahl erhöht

Jede Zahl grösser als 1 giebt, mit einer ganzen positiven Zahl

eine Höhe grösser als Eins, zu einer ganzen Strichzahl erhöht, einen echten Bruch.	potenzirt, eine Potenz grösser als 1, mit einer ganzen negativen potenzirt, einen echten Bruch.
--	---

Beweis: 1. Wenn die Stufe eine Pluszahl ist, so folgt der Satz unmittelbar aus 207.

2. Wenn dagegen die Stufe eine Strichzahl ist, so sei $b > a$ und beide Zahlen Pluszahlen, dann ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, nach 205, dagegen $\frac{b}{a}$ grösser als eins; denn ist $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$ eine Pluszahl, da $b-a$ eine Pluszahl, nach 142 und a desgleichen, also $b:a$ grösser als 1 nach 142. Nun ist aber $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ nach 336, mithin giebt ein echter Plusbruch, mit einer Strichzahl erhöht, daselbe, was eine Zahl grösser als 1, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach 337, eine Zahl grösser als 1. Ebenso ist nach 336 $\left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, mithin giebt eine Zahl grösser als 1, mit einer Strichzahl erhöht, daselbe was ein echter Bruch giebt, mit einer Pluszahl erhöht, d. h. nach 337, einen echten Bruch.

Satz. Wenn eine Pluszahl a zu einer beliebigen ganzen Zahl 338. ungleich Null erhöht, Eins geben soll, so muss sie Eins sein.

Beweis: Trennend (indirekt). Jede Pluszahl ist nach 143 entweder gleich Eins oder grösser oder kleiner als 1.

Angenommen nun, a sei grösser als Eins, oder es sei kleiner als Eins, d. h. ein echter Bruch nach 196, so ist, da die Stufe ungleich Null ist, die Stufe nach 139 entweder eine Pluszahl oder eine Strichzahl, d. h. die Höhe nach 330 entweder grösser als 1 oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Pluszahl darf also weder grösser noch kleiner als 1 sein, d. h. sie ist gleich Eins (nach 143).

Satz. Wenn eine Pluszahl ungleich eins, zu einer ganzen Zahl 339. b erhöht, Eins giebt, so ist die letztere Null.

Beweis: Trennend (indirekt). Jede Zahl b ist nach 140 entweder Null oder eine Plus- oder eine Strichzahl. Angenommen nun, die Stufe b sei eine Pluszahl, oder sei eine Strichzahl, so ist, da die Base ungleich 1 ist, die Base nach 143 entweder grösser als 1, oder kleiner als 1, mithin auch nach 337 die Höhe, welche man erhält, wenn man die Base mit einer Pluszahl oder mit einer Strichzahl er-

hört, entweder gröser oder kleiner als 1, d. h. jedenfalls nicht gleich Eins. Die Stufe oder der Exponent darf also weder eine Pluszahl, noch eine Strichzahl sein, sie muss also (nach 140) Null sein. Ist aber $b = 0$, so ist, was auch a für eine Gröse sei, $a^b = a^0 = 1$ (nach 319).

340. **Satz.** Zwei Pluszahlen a und b , welche, zu derselben ganzen Zahl c ungleich Null erhöht, dieselbe Höhe oder Potenz geben, sind einander gleich, und

Zwei ganze Zahlen c und d , zu welchen dieselbe Pluszahl a ungleich Eins erhöht, dieselbe Höhe geben, sind auch einander gleich.

Beweis: 1. Es sei $a^c = b^c$ und a und b Pluszahlen und $c > 0$, so ist $1 = \frac{b^c}{b^c} = \frac{a^c}{b^c}$ (nach 173)

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^c \quad (\text{nach 335})$$

mithin ist, da $c > 0$ ist, $\frac{a}{b} = 1$, nach 338, d. h. $a = b$, nach 173.

2. Es sei $a^c = a^d$ und a eine Pluszahl ungleich Eins, so ist

$$1 = \frac{a^c}{a^c} = \frac{a^c}{a^d} \quad (\text{nach 173})$$

$$= a^{c-d} \quad (\text{nach 334})$$

mithin, da $a > 1$ ist, so ist nach 339 $c - d = 0$, d. h. $c = d$ (nach 135).

B. Das Tiefen oder das Radiziren der Zahlen.

341. **Erklärung.** Das Tiefen, das Radiziren der Zahlen heist die dem Höhen der Zahlen entsprechende Trennung, wo die Höhe (die Potenz) $b = a^c$ und die Stufe (der Exponent) c gegeben ist und die Base a gesucht wird. Die Stufe c muss beim Tiefen stets eine ganze Zahl ungleich Null sein.

Die Höhe oder Potenz b , welche getieft werden soll, heist die zu tiefende Gröse (der radicandus), die tiefende Gröse c heist die Senke (der radicator), das Ergebniss des Tiefens heist die Tiefe (die radix) a .

342. **Erklärung.** Das Zeichen des Tiefens ist eine Bruchseinheit

in der Stufe, z. B. $a^{\frac{1}{n}}$ gelesen „ a zur ein ntel“ oder „ a tief n “. Die Zeichen „hoch“ und „tief“ heissen gemeinam steigende Zeichen.

In den mathematischen Werken wird die Tiefe gewöhnlich die Wurzel genannt, aber mit diesen Wurzeln ganz unwissenschaftlich verfahren. Es wird

nämlich in den mathematischen Werken $\sqrt[n]{a^2} = \sqrt{a^2}$ gesetzt, und dabei gleichzeitig gewöhnlich gelehrt, dass es von a^2 zwei Wurzeln gebe, $+a$ und $-a$; darnach setzen diese Werke also, da sie die beiden Wurzeln nicht unterscheiden $+a = -a$; denn $+a = \sqrt{a^2}$ und $-a = \sqrt{a^2}$, also $+a = \sqrt{a^2} = -a$, das aber ist jedenfalls unwissenschaftlich. Da es nun für $\sqrt[n]{a}$ verschiedene Werte

gibt, so ist $\sqrt[n]{a}$ eine n wertige GröÙe, mit welcher man nicht rechnen darf. Ich unterscheide also die Tiefe $a^{\frac{1}{n}}$ als einwertige GröÙe von $\sqrt[n]{a}$ als n wertiger GröÙe.

Sollen zwei mehrwertige GröÙen einander gleich gesetzt werden, so muss man dafür ein besonderes Zeichen einführen. Ich wähle dafür das Zeichen

\cong , gelesen „entsprechend gleich“ und setze also $\sqrt[n]{a} \cong \sqrt[n]{a}$, d. h. die n te Wurzel aus a ist der n ten Wurzel aus a gleich, wenn man auf beiden Seiten die entsprechenden Werte einführt.

Grundformel des Tiefens (des Radizirens).

343.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend tiefen und höhen (radizieren und potenzieren) ändert nichts.

Beispiel: $(27^{\frac{1}{3}})^3 = 3^3 = 27$.

Satz. $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a.$

344.

Mit einer ganzen Zahl fortschreitend höhen und tiefen (potenzieren und radizieren) ändert nichts.

Beweis: $\left[(a^n)^{\frac{1}{n}}\right]^n = a^n$ (nach 343)

mithin, da a und $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ Pluszahlen und n eine ganze Zahl ist, so ist

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a \quad (\text{nach 340}).$$

Satz. $1^{\frac{1}{n}} = 1.$

345.

Die n te Tiefe aus Eins ist wieder 1.

Beweis: $1^{\frac{1}{n}} = (1^n)^{\frac{1}{n}} = 1$ (nach 329)
(nach 344).

Gesetz des Tiefens. Für die Tiefe oder Radix gelten alle Gesetze der Erhöhung. 346.

Beweis: Da die Tiefe $a^{\frac{1}{n}}$ nur einen Wert hat (wenn a nur

einen Wert hat) und also eine ZahlgröÙe ist, so folgt es unmittelbar aus 326 für die Tiefe, wie für jede andere ZahlgröÙe.

$$347. \quad \text{Satz.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

Einen Bruch tief (radiziert) man, indem man Zähler und Nenner tief.

$$\text{Beweis: Es ist } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{\left(\frac{1}{b}\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{nach 343})$$

$$= \left(\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{nach 346 und 335})$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} \quad (\text{nach 344})$$

$$\text{Beispiele: } \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$$

$$348. \quad \text{Satz.} \quad a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Zu einem Bruche erhöht man, indem man die Base fortschreitend zu dem Zähler und Nenner oder fortschreitend zu dem Nenner und Zähler erhöht.

$$\text{Beweis: 1. } a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \left(\left(a^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{nach 344})$$

$$= a^{\left(\frac{m}{n} \cdot n\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (\text{nach 324})$$

$$= (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{nach 167})$$

$$2. \quad a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)} \quad (\text{nach 177})$$

$$= \left(\left(a^{\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m \quad (\text{nach 343})$$

$$= \left(a^{\left(\frac{1}{n} \cdot m \cdot \frac{1}{m}\right)}\right)^m \quad (\text{nach 348,1})$$

$$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad (\text{nach 177,167}).$$

Beispiele: $8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32.$

Satz. $a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}; a^{\frac{1}{m:n}} = a^{\frac{n}{m}}.$

349.

Zu dem Zeuge oder Produkte zweier Zahlen tief (radiziert) man, indem man die Base erst zu dem einen Fache und dann zum andern Fache tief und zu einem Bruche tief (radiziert) man, indem man die Base zu dem umgekehrten Bruche erhöht.

Beweis: 1. $a^{\frac{1}{mn}} = \left(\left(a^{\frac{1}{mn}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 344)

$= \left(a^{\frac{1}{mn} \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 324)

$= \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$ (nach 167)

2. $a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$ (nach 349₁)

3. $a^{\frac{1}{m:n}} = a^{\left(\frac{1}{m:n}\right)} = a^{\left(\frac{n}{m}\right)}$ (nach 181)

$$= a^{\frac{n}{m}}$$

C. Das Logen oder das Logarithmiren der Zahlen.

Erklärung. Das Logen, das Logarithmiren der Zahlen heist 350. die dem Höhen der Zahlen entsprechende Trennung, wo die Höhe (die Potenz) $b = a^c$ und die Base a gegeben ist und die Stufe c gesucht wird.

Die Base a muss beim Logen stets ungleich Eins sein.

Die Höhe oder Potenz b , welche gelogt werden soll, heist die zu logende Gröse oder die Loghöhe (die potentia logarithmi), die logende Gröse a heist die Logbase (die basis logarithmi), das Ergebniss des Logens c heist der Log (der Logarithmus).

Erklärung. Das Zeichen des Logens ist $\frac{b}{a}$ (gelesen b ge- 351.

logt nach a , kurz b nach a) oder $\log. b$ (gelesen $\log b$ nach a). Die Zeichen „hoch“ und „log nach“ heissen gemeinfame Logzeichen.

Das Zeichen \log bezieht sich auf alle folgenden Grösen desselben Gliedes.

352. Grundformel des Logens (des Logarithmirens).

Satz. $c = \frac{a^c}{a}$

Der Log einer Höhe der Base ist gleich der Stufe dieser Höhe.

Der Logarithmus einer Potenz der Logarithmen-Base ist gleich dem Exponenten dieser Potenz.

Beweis: Unmittelbar nach 350.

Beispiel: $\frac{10^3}{10} = 3, \frac{10^3}{10} = 6.$

353. Satz. $\frac{1}{a} = 0.$

Der Log (der Logarithmus) von Eins ist Null.

Beweis: Es ist $1 = a^0$

(nach 319)

mithin ist $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a} = 0$

(nach 352)

Beispiel: $\frac{1}{10} = \frac{10^0}{10} = 0.$

354. Satz. $\frac{a}{a} = 1.$

Der Log (der Logarithmus) der Base ist Eins.

Beweis: Nach 322 ist $a = a^1$, mithin $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a} = 1$ (nach 352)

Beispiel: $\frac{10}{10} = 1, \frac{10^1}{10} = 1.$

355. Satz. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ oder $\log ab = \log a + \log b.$

Der Log eines Zeuges ist die Summe aus den Logen der Fache, und die Summe zweier Loge ist gleich dem Loge des Zeuges ihrer Zahlen.

Der Logarithmus eines Produktes ist die Summe aus den Logarithmen der Fache, und die Summe zweier Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Produkts ihrer Numeri.

Beweis: Es sei $a = c^a$ und $b = c^b$, so ist

$$\frac{ab}{c} = \frac{c^a c^b}{c} = \frac{c^{a+b}}{c} \quad (\text{nach 320})$$

$$= a + b \quad (\text{nach 352})$$

$$= \frac{c^a}{c} + \frac{c^b}{c} \quad (\text{nach 352})$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Beispiele: $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10} = \frac{10^3 + 2}{10} = 3 + 2 = \frac{10^3}{10} + \frac{10^2}{10}$.

Satz. $\frac{a:b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ oder $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. 356.

Den Log (den Logarithmus) eines Bruches erhält man, indem man den Log des Nenners von dem des Zählers abzieht, oder Der Unterschied zweier Loge (Logarithmen) ist gleich dem Loge eines Bruches, dessen Zähler die erste, und dessen Nenner die zweite Loghöhe (die potentia logarithmi) ist.

Beweis: Es ist $\frac{a:b}{c} = \frac{a:b}{c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c}$ (nach 129)

$$= \frac{(a:b) \cdot b}{c} - \frac{b}{c} \quad (\text{nach 355})$$

$$= \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \quad (\text{nach 167})$$

Beispiele: $\frac{10^5 : 10^3}{10} = \frac{10^{5-3}}{10} = 5 - 2 = \frac{10^5}{10} - \frac{10^3}{10}$.

Satz. $\frac{a^b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$ oder $\log a^b = b \cdot \log a$. 357.

Der Log einer Höhe oder Potenz ist gleich der Stufe der Höhe mal dem Loge der Base.

Beweis: Es sei $a = c^a$, so ist $a = \frac{c^a}{c}$; (nach 352)

mithin $\frac{a^b}{c} = \frac{(c^a)^b}{c} = \frac{c^{(ba)}}{c}$ (nach 324)

$$= ba \quad (\text{nach 352})$$

$$= b \cdot \frac{c^a}{c} = b \cdot \frac{a}{c}.$$

Beispiel: $\frac{(10^5)^3}{10} = \frac{10^{5 \cdot 3}}{10} = 5 \cdot 3 = 3 \cdot \frac{10^5}{10}$.

Satz. $\frac{a^{\frac{1}{b}}}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$ oder $\log a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log a$. 358.

Der Log einer Tiefe (Radix) ist gleich dem Loge der Tiefzahl (des Radicand), geteilt durch die Senke (den Radicator).

Beweis: Unmittelbar aus 357.

Beispiel: $\frac{(10^6)^{\frac{1}{3}}}{10} = \frac{10^{6 \cdot \frac{1}{3}}}{10} = 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10^6}{10}$.

359. **Gesetz des Logens.** Statt eine Zahl mit mehreren Zahlen zu vervielfachen, kann man die Loge derselben nach derselben Base zufügen und, statt eine Zahl durch mehrere Zahlen zu teilen, kann man die Loge der Nenner von dem Loge des Zählers abziehen, und schließlich zu dem Loge die Loghöhe suchen und
 Statt eine Zahl zur cten Höhe zu erhöhen, kann man den Log der Zahl mit c vervielfachen und statt eine GröÙe zur cten Tiefe zu vertiefen, kann man den Log der Tiefe durch c teilen und schließlich zu dem Loge die GröÙe suchen oder

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

$$\log \frac{a}{bc} = \log a - \log b - c$$

$$\log a^c = c \cdot \log a \quad ; \quad \log a^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \log a.$$

Beweis: Unmittelbar aus 355, 356, 357 und 358.

Beispiele: $\log 1001 = \log 7 \cdot 11 \cdot 13 = \log 7 + \log 11 + \log 13$

$$\log \frac{999}{27} = \log 999 - \log 27$$

$$\log 73^5 = 5 \cdot \log 73 \quad ; \quad \log 30^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log 30.$$

360.

Satz.

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich dem Loge jener Zahl nach der zweiten Base b mal dem Loge dieser Zahl b nach der ersten Base c.

Beweis: Es sei $a = b^a$ und $b = c^b$, so ist

$$\frac{a}{c} = \frac{b^a}{c} = \frac{(c^b)^a}{c} = a \cdot \frac{c^b}{c} \quad (\text{nach 357})$$

$$= \frac{b^a}{b} \cdot \frac{c^b}{c} \quad (\text{nach 352})$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}.$$

Beispiele: $\frac{10^5}{10} \cdot \frac{10}{e} = \frac{10^5}{e}$

361.

Satz.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b}.$$

Der Log einer Zahl a nach der Base c ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Log jener Zahl a, und dessen Nenner der Log jener Base c ist, beide nach einer neuen Base b genommen.

Beweis: Es ist $\frac{a}{c} = \frac{a}{c} : \frac{c}{b} : \frac{c}{b}$ (nach 167)

$$= \frac{a}{b} : \frac{c}{b} \quad (\text{nach 360}).$$

Erklärung. Der Zehnlog oder der gemeine oder brig- 362.
gische Logarithmus einer Zahl heist der Log (der Logarithmus) dieser
Zahl nach der Base 10.

Das Zeichen des Zehnloges oder des gemeinen Logarithmus der
Zahl a ist $\log_{10} a$, gewöhnlich nur $\log a$.

Satz. $\log a = \log_{10} a = \frac{a}{10}$; $\log abc^n = \log (abc^n)$ 363.

Das Zeichen des Zehnloges \log_{10} oder \log bezieht sich auf alle fol-
genden Größen desselben Gliedes.

Es erschien zweckmäßig hier nochmals hervorzuheben, dass das Zeichen
des Zehnloges ein Formelzeichen ist, welches sich auf die folgenden Größen,
also nach 85 auf alle folgenden Größen desselben Gliedes bezieht. Es folgt
daraus, dass $\log \log x = \log (\log x)$ den Log des Loges von x bezeichnet, dass
 $\log a^n c = \log (a^n c)$ ist, dass dagegen $\log a + c = (\log a) + c$ ist. Soll sich
das Logzeichen nicht auf alle folgenden Größen desselben Gliedes beziehen, so
muss es mit den Größen, auf welche es sich beziehen soll, in eine Klammer ge-
schlossen werden.

Satz. $\log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + n$; $\log_{10} a : 10^n = \log_{10} a - n$. 364.

Statt eine Zahl a mit 10^n zu vervielfachen oder durch 10^n zu
teilen, kann man zu dem Zehnloge der Zahl n zufügen, bez. n ab-
ziehen.

Beweis: 1. Es ist $\log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + \log_{10} 10^n$ (nach 355)
 $= \log_{10} a + n$ (nach 352)

2. Es ist $\log_{10} a : 10^n = \log_{10} a - \log_{10} 10^n$ (nach 356)
 $= \log_{10} a - n$ (nach 352)

Satz. Statt in einer Zahl das Komma um n Stellen nach rechts 365.
bez. nach links zu rücken, kann man zu dem Zehnloge der Zahl
 n zufügen, bez. n vom Zehnloge abziehen.

Beweis: Nach 333 kann man, statt das Komma um n Stellen
nach rechts bez. nach links zu rücken, die Zahl mit 10^n vervielfachen,
bez. durch 10^n teilen; dies aber tut man, indem man nach 364 beim
Zehnloge der Zahl n zufügt, bez. n abzieht.

Erklärung. Der Zehnlog, der gemeine Logarithmus, wird durch 366.
das Komma in zwei Stücke zerlegt: eine ganze Zahl oder die Ziffern
links vom Komma und einen echten Zehntbruch oder die Ziffern
rechts vom Komma. Die ganze Zahl im Zehnloge heist der Stellen-

log (die characteristic), der echte Zehntbruch im Zehnloge heist der Ziffernlog (die mantissa).

Beispiel: Im Zehnloge 9,87276 ist 9 der Stellenlog, 876276 der Ziffernlog.

367. Satz. Alle Zahlen a, b, c, \dots welche dieselben Ziffern $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ in derselben Reihenfolge enthalten, haben denselben Ziffernlog und unterscheiden sich nur im Stellenlog.

Der Stellenlog ist n , wenn die Zahl $n + 1$ geltende Ziffern links vom Komma hat, er ist $c - 10 = -n$, wenn die erste geltende Ziffer der Zahl auf der n ten Stelle rechts vom Komma steht.

Beweis: Da alle die Zahlen a, b, c, \dots ganz dieselben Ziffern in ganz derselben Reihenfolge enthalten sollen, so können sie sich nur noch in der Stelle unterscheiden, welche das Komma in der Zahl einnimmt. Man verwandelt also die eine Zahl a in jede andere b, c, \dots der gegebenen, indem man das Komma in der Zahl um b, c, \dots Stellen nach rechts bez. nach links rückt, oder indem man nach 365 bei dem Zehnloge der Zahl a die Zahl b, c, \dots zufügt bez. abzieht. Da diese Zahlen b, c, \dots aber ganze Pluszahlen sind, so verändert dies Zufügen bez. Abziehen nur den Stellenlog, nie den Ziffernlog.

Beispiele:	Zahl	Stellenlog	Zahl	Stellenlog
	7826	3	0,778	$-1 = 9 - 10$
	32,47	1	0,000784	$-4 = 6 - 10$
	5,789	0	0,0000028	$-6 = 4 - 10$

368. Satz. Die Logtafel oder die Logarithmentafel der gemeinen oder briggschen Logarithmen giebt zu jeder Reihenfolge beliebiger Ziffern einer Zahl den zugehörigen Ziffernlog die Mantiſſe. Es giebt Logtafeln mit 5 Ziffern, mit 7 Ziffern und mit zehn Ziffern. Die bequemsten und für das praktische Leben ausreichenden sind die fünfziffrigen, welche wir daher der Betrachtung zu Grunde legen; die Benutzung der siebenziffrigen und der zehnſziffrigen Logtafeln bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Die Berechnung eines Zehnloges werden wir im nächsten Zweige in der Folgelehre oder Funktionenlehre kennen lernen; die Art und Weise, wie eine ganze Logtafel berechnet wird, ist in der Folgelehre des Verfassers ausführlich dargestellt und kann hier darauf verwiesen werden. Jeder der sie kennen lernen will; kann sie dort nachsehen. Wir nehmen die Logtafel hier als richtig an, zumal die Richtigkeit von jedem leicht geprüft werden kann, und wiederholt sehr streng geprüft ist.

Jeder Gebildete muss die Logtafel leicht gebrauchen können und im Gebrauche derselben die größte Gewandtheit haben; dagegen ist es nicht erforderlich, dass er die Logtafel selbst berechnet und geprüft habe; dies kann er den Mathematikern vom Fache überlassen.

Satz. Der Stellenlog. Wenn die höchste Ziffer der Zahl 369. auf der nullten Stelle (auf der Stelle der Einer links vom Komma) steht, so ist der entsprechende Stellenlog 0.

Wenn die höchste Ziffer der Zahl auf der n ten Stelle (der n ten Stelle links neben den nullten) steht, so ist der entsprechende Stellenlog n .

Wenn die höchste Ziffer der Zahl auf der $-n$ ten Stelle (der n ten Bruchstelle) steht, so ist der entsprechende Stellenlog $-n$. Bei dem Zehnloge setzt man aber statt des $-n$ im Stellenloge eine Pluszahl a vor das Komma, und lässt hinter dem Zehnloge eine Strichzahl $-b$ folgen, so dass $a - b = -n$ ist. Am liebsten wählt man die beiden Zahlen a und b so, dass b ein Vielfaches von 10 ist.

Beweis: Unmittelbar aus 366.

Es ist notwendig, dass man sich hier die Regel über die Stellen nach 117 und die über die Bruchstellen nach 188 vergegenwärtige und an zahlreichen Beispielen einübe.

Die Stelle links vom Komma mit den Einern bildet die nullte Stelle (Stellenlog 0); die a te Stelle links neben der nullten Stelle bildet die a te Stelle (Stellenlog a); die a te Stelle rechts neben den Komma bildet die a te Bruchstelle oder die $-a$ te Stelle (Stellenlog $-a$).

Beispiele:

Zahl	Stellenlog	Zahl	Stellenlog
3405	3	3,0005	0
0,0235	$-2 = 8 - 10$	0,0003	$-4 = 6 - 10$
79,276	1	8376392	6

Das Übungsheft vom Verfasser: Logen und Gleichungen höherer Grade bietet reiche Uebungen dar.

Die Sitte für die Bruchstelle vor den Log eine Pluszahl und hinter den Log -10 oder $-m \cdot 10$ zusetzen, rechtfertigt sich dadurch, dass man für die Loge stets Plusziffern verwendet.

Satz. Das Auffuchen des Logs (des Logarithmus) zur 370. gegebenen Zahl. In der Logtafel (der Logarithmentafel) schlägt man zu den gegebenen Ziffern der Zahl den entsprechenden Ziffernlog auf.

In der ersten Spalte der Tafel findet man unter Z. bez. N. in einer Reihe die ersten drei Ziffern der Zahl und in der folgenden Spalte in derselben Reihe ausgedrückt die ersten beiden Ziffern des Logs. Im Kopfe der folgenden 10 Spalten findet man die vierte Ziffer der Zahl und in der entsprechenden Reihe derselben Spalte die dritte bis fünfte Ziffer des entsprechenden Logs. Ein Stern vor den Ziffern des Logs bezeichnet, dass man für die ersten beiden Stellen des Logs die Ziffern der nächst folgenden Reihe nehmen muss.

370. Hat die Zahl noch eine fünfte Ziffer, so zieht man den Log der betreffenden Spalte von dem entsprechenden Loge der folgenden Spalte ab; den Unterschied findet man in der letzten Spalte der Tafel abgedruckt, er entspricht 10 Einheiten der fünften Ziffer, die kleinen Hülftafeln der letzten Spalte geben an, wieviel für jede fünfte Ziffer der Zahl dem Loge zugefügt werden muss.

Nachdem der Ziffernlog festgestellt ist, setzt man links von demselben das Komma und bestimmt den Stellenlog nach 369.

Es ist notwendig, dass sich jeder Gebildete reiche Uebung im Auffuchen der Loge verschaffe. Das Uebungsheft des Verfassers bietet dazu reiche Gelegenheit.

Auf der letzten Stelle des Logs bezeichnet die grose Ziffer, dass der genaue Log gröser, die kleine Ziffer, dass er kleiner ist als der auf fünf Stellen abgekürzte Log. So z. B. giebt der Log 0,9584444 abgekürzt 0,95844, dagegen giebt der Log 0,9581576 abgekürzt 0,95815.

Beispiele:

	Zahl	Log	Zahl	Log
a.	3,28	0,51322	7,28	0,86213
	58,7	1,72997	98,9	1,97267
b.	283,5	2,45255	6739	3,82866
	42,46	1,62789	524900	5,72008
c.	1,2789	0,10684	0,003273	7,58289 — 10
	37625	4,57547	0,56782	9,75421 — 10

In der 7stelligen Logarithmentafel findet man unter N oder Z die ersten 4 Ziffern der Zahl und in den zehn folgenden Spalten für die folgende 5te Ziffer der Zahl den betreffenden Log. Hat die Zahl noch eine 6te und 7te Ziffer, so zieht man den Log der Zahl vom nächst höheren Loge ab, so hat man den Unterschied der Loge für die Einheit der 5ten Stelle. Man nimmt dann für jede Einheit der nächst folgenden Ziffer $\frac{1}{10}$, für jede der zweitfolgenden Ziffer $\frac{1}{100}$ dieses Unterschiedes und fügt diese zum Loge hinzu. In den Tafeln sind diese Teile der Unterschiede bereits hinten berechnet.

371. Satz. Das Auffuchen der Zahl zum gegebenen Loge (zum Logarithmus). In der Logtafel (in der Logarithmentafel) sucht man den Log auf, welcher der nächst niedere ist zu dem gegebenen Loge und findet in derselben Zeile die drei ersten Ziffern, und im Kopfe derselben Spalte die vierte Ziffer der entsprechenden Zahl.

Nun zieht man den Log der Tafel von dem entsprechenden Loge der folgenden Spalte ab; den Unterschied findet man in der letzten Spalte der Tafel abgedruckt, er entspricht 10 Einheiten der fünften Ziffer der Zahl. Zieht man nun den Log der Tafel vom gegebenen Loge ab und nimmt in der Hülftafel den Wert, der diesem

Reste am nächsten steht, so findet man daneben die fünfte Ziffer der Zahl.

Die erste oder höchste Ziffer der Zahl erhält die Stelle, welche der Stellenlog angiebt und wird das Komma dem entsprechend nach 369 gesetzt.

Wieder ist eine reiche Uebung im Auffuchen der Zahl erforderlich; das Uebungsheft vom Verfasser bietet dazu reiche Gelegenheit.

Beispiele:

	Log	Zahl	Log	Zahl
a.	0,29003	1,95	2,40881	253,4
	0,57576	3,765	5,94265	876300
b.	2,47094	295,76	8,77645 — 10	0,059766
	6,28051	1907700,	7,43704 — 10	0,0027355

Bei den 7stelligen Logen erhält man in der Tafel 5 Ziffern der Zahl. Nun zieht man den Log der Tafel vom demnächst höhern Loge der Tafel ab und findet daraus den Unterschied der Loge für die Einheit der 5ten Stelle, für den an der Seite in der letzten Spalte der Tafel eine kleine Hülftafel steht. Nun nimmt man den Unterschied der gegebenen Mantisse und des nächst niedern Logs der Tafel und ermittelt, welche Zahl in der Hülftafel diesem Unterschiede entspricht und setzt darnach die nächstfolgende oder die beiden nächstfolgenden Stellen fest.

Satz. Das Rechnen mit Logen (Logarithmen).

372.

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

$$\log \frac{a}{bc} = \log a - \log b - \log c.$$

Statt eine Zahl mit mehreren Zahlen zu vervielfachen, kann man die Loge derselben zufügen und statt eine Zahl durch mehrere Zahlen zu teilen, kann man die Loge der Nenner von dem Loge des Zählers abziehen, und schlieslich zu dem Loge die Zahl suchen.

Beweis: Unmittelbar aus 355 und 356.

Beispiele: $\log 87265 \times 57366 = 4,94084 + 4,75865 = 9,69949$
 also $87265 \times 57366 = 5006000000$
 $\log 92,763 : 582,67 = 1,96735 - 2,76545 = 9,20195 - 10$
 also $92,763 : 582,67 = 0,159204$.

Satz. $\log \cdot a^n = n \cdot \log a$ $\log \cdot a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a$.

373.

Statt eine Zahl zur nten Stufe zu erhöhen, kann man den Log der Zahl mit n vervielfachen und statt aus einer Zahl die nte Tiefe zu nehmen, kann man den Log der Zahl durch n teilen und schlieslich zu dem Loge die Zahl suchen.

Beweis: Unmittelbar aus 357 und 358.

Beispiele: $\log 72,682^7 = 7 \cdot 1,86142 = 13,02994$

$$\text{also } 72_{,452}^{\cdot} = 10^{\cdot}718^{\cdot}750^{\cdot}000^{\cdot}000$$

$$\log 85363^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 4,93127 = 1,64376$$

$$\text{also } 85363^{\frac{1}{3}} = 44_{,031}.$$

Es ist dringend wünschenswert, dass jeder Gebildete zahlreiche Übungen im Rechnen mit Logen mache; das Übungsheft vom Verfasser bietet dazu reiche Gelegenheit.

374. **Erklärung:** Der Log nach e heist der Elog oder der natürliche, der nepersche Logarithmus, und zwar ist $e = 2,718281828459$ und $\log e = 0,4342944819$.

Das Zeichen des Elogs ist \log_e oder \log_{nat} .

375. **Satz.** $\frac{a}{e} = \frac{a}{10} : \frac{e}{10}$ oder $\log_e a = 2,3025851 \cdot \log_{10} a$.

Der Elog (der natürliche Logarithmus) einer Zahl ist gleich dem Zehnlog (dem gemeinen Logarithmus) der Zahl geteilt durch den Zehnlog von e, d. h. geteilt durch 0,4342945 oder vervielfacht mit 2,3025851.

Beweis: Unmittelbar aus 361 und 374.

376. **Satz.** $\frac{a}{10} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{10}$ oder $\log_{10} a = 0,4342945 \cdot \log_e a$.

Der Zehnlog (der gemeine Logarithmus) einer Zahl ist gleich dem Elog (dem natürlichen Logarithmus) der Zahl mal dem Zehnlog von e d. h. mal 0,4342945.

Beweis: Unmittelbar aus 360 und 374.

D. Die Eigenschaften von Höhen, Tiefen und Logen.

377. **Satz.** Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert sich nicht, wenn man sie mit gleichen Pluszahlen erhöht oder tieft.

Beweis: Es sei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen. Sei nun c eine ganze Pluszahl, so ist

1. $a^c > b^c$ (nach 203).

2. so ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$; denn wäre $a^{\frac{1}{c}} < b^{\frac{1}{c}}$, so wäre auch $(a^{\frac{1}{c}})^c < (b^{\frac{1}{c}})^c$ (nach Fall 1), d. h. es wäre $a < b$ gegen die Annahme, wäre ferner $a^{\frac{1}{c}} = b^{\frac{1}{c}}$, so wäre auch $a = b$ (nach Fall 1). dies aber ist gleichfalls gegen die Annahme, also ist auch $a^{\frac{1}{c}} > b^{\frac{1}{c}}$,

3. so ist auch $a^{\frac{d}{c}} > b^{\frac{d}{c}}$, sofern d und c ganze Pluszahlen sind (nach Fall 1 und 2).

Beispiele: $9 > 4$ also auch $9^3 > 4^3$ und $9^{1/2} > 4^{1/2}$

Satz. Eine Vergleichung zweier Pluszahlen ändert sich nicht, 378.
wenn man gleiche Zahlen, welche grösser als Eins sind, zu ihnen erhöht und wenn man sie nach gleichen Zahlen grösser als Eins logt.

Beweis. Es sei gegeben $a > b$, wo a und b Pluszahlen, und sei $c > 1$, so ist

1. $c^a > c^b$, denn nach 142 ist $a - b$ eine Pluszahl, also nach 337 ist $c^{a-b} > 1$, und da c^b eine Pluszahl, so ist auch $c^a > c^b$ nach 203.

2. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; denn es sei $a = c^a$ und $b = c^b$, so würde, wenn $a = b$ wäre, auch $c^a = c^b$ sein (nach 377), sollte aber $a < b$ sein, so wäre nach 378, auch $c^a < c^b$, d. h. $a < b$. Da nun $a > b$ sein soll, so muss also auch $a > b$ sein, und da $\frac{a}{c} = a$ und $\frac{b}{c} = b$, so ist also auch $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Beispiele: $8^5 > 8^3$; $4^5 > 4^3$.

Satz. Die Loge (die Logarithmen) aller Zahlen, welche grösser 379.
als Eins sind, sind Pluszahlen; die Loge aller Pluszahlen, welche kleiner als Eins sind, d. h. aller echten Brüche, sind Strichzahlen.

Beweis: Die Loge von 1 sind Null (nach 353). Alle Zahlen, welche grösser als Eins sind, haben aber nach 378 Loge, welche grösser als der Log von 1, d. h. grösser als Null sind, oder sie sind Pluszahlen; alle Pluszahlen, welche kleiner als 1 sind, haben Loge, welche kleiner als der Log von 1, d. h. kleiner als 0 sind, oder sie sind Strichzahlen.

Beispiel: $\frac{10^3}{10} = 3$; $\frac{10^{-3}}{10} = -3$.

Satz. Wenn eine Primzahl p in eine Höhe a^b , deren Base und 380.
Stufe ganze Pluszahlen sind, aufgeht, so geht sie auch in die Base auf.

Beweis. Angenommen, p gehe nicht in a auf, so geht es (nach 222) auch nicht in das Zeug von b Fachen oder Faktoren a auf, d. h. (nach 321) nicht in a^b , was gegen die Voraussetzung des Satzes ist. Also ist die Annahme, dass p nicht in a aufgeht, unmöglich, d. h. p geht in a auf.

Beispiele: Wenn 3 in 9^5 aufgeht, so auch in 9.

Satz. Wenn zwei Zahlen (a und b) einander fremde oder primär sind, 381.

so sind auch ihre Höhen zu ganzer Stufe n einander fremde oder primär.

Beweis: Angenommen, es seien a^n und b^n nicht einander fremde, so müssten beide ein gemeinsames Mas c haben (nach 214) das grösser als Eins ist. Sei d ein Primfach dieses c und grösser als 1, so müsste auch d in a^n und b^n aufgehen (nach 213), mithin (nach 380) auch in a und b aufgehen, d. h. a und b wären einander nicht fremde, was gegen die Voraussetzung des Satzes ist. Also ist die Annahme, dass a^n und b^n einander nicht fremde seien, unmöglich, d. h. a^n und b^n sind einander fremde oder primär.

382. **Erklärung.** Endzahlen oder Rationalzahlen nennt man die ganzen Zahlen und die Bruchzahlen.

Unzahlen oder Irrationalzahlen heissen solche Grössen, welche nicht Endzahlen sind, für welche aber alle Vergleichungssätze in demselben Umfange gelten wie für Endzahlen.

383. **Satz.** Alle Sätze der Zahlenlehre, welche für beliebige ganze und Bruchzahlen gelten, gelten auch für die Unzahlen oder Irrationalzahlen.

384. **Satz.** Die n te Tiefe einer ganzen Pluszahl a ist entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl); aber kein Bruch.

Beweis. Angenommen, $a^{\frac{1}{n}}$ sei ein Bruch, und sei derselbe kurz oder reduzirt $\frac{b}{c}$, so wäre $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c}$, mithin $a = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b^n}{c^n}$ oder $ac^n = b^n$. Da nun b und c einander fremde sind (nach 227) so sind auch b^n und c^n einander fremde (nach 381), mithin (nach 218) $b^n = a$, d. h. $c^n = 1$, also auch $c = (c^n)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$ (nach 338). Also ist $a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$, was gegen die Annahme ist, also ist die

Annahme unmöglich, und $a^{\frac{1}{n}}$ ist kein Bruch, sondern entweder eine ganze Zahl oder eine Unzahl (Irrationalzahl).

385. **Satz.** Der Zehnlog von allen Zahlen, welche weder Höhen noch Tiefen von zehn sind, ist eine Unzahl (Irrationalzahl).

Beweis: Sollte der Zehnlog einer Zahl a eine ganze Zahl n sein, so müsste $\log a = \frac{n}{10} = n$ sein, d. h. nach 352 müsste $a = 10^n$ d. h. eine Höhe von 10 sein.

Sollte der Zehnlog einer Zahl a ein Bruch $\frac{m}{n}$ sein, so müsste $\log a = \frac{a}{10}$

$= \frac{m}{n}$ sein, d. h. nach 357 und 358 müsste $a = 10^{\frac{m}{n}}$ d. h. eine Tiefe

von 10 sein. Da beides gegen die Annahme ist, so kann der Zehnlog einer Zahl, welche weder eine Tiefe, noch eine Höhe von 10 ist, weder eine ganze Zahl noch ein Bruch sein, also ist er nach 382 eine Unzahl (Irrationalzahl).

Satz. Die $(4a)$ ten Höhen der Primzahlen ausser 2 und 5 haben 386. in der letzten Stelle eine Eins, oder die vierte Höhe derselben weniger 1 ist durch zehn teilbar.

Die $(4a + 2)$ ten Höhen der Primzahlen ausser 2 und 5 haben in der letzten Stelle entweder eine Eins oder eine Neun.

Beweis: Sei $a + 10b$, wo $a < 10$ eine Primzahl, sei $c + 10d$ die n te Höhe derselben, so ist die $n + 1$ te Höhe derselben $(a + 10b)(c + 10d) = ac + 10(ad + bc) + 100bd$. Für die letzte Stelle, die Einer der höhern Höhen kommt es demnach nur auf das Zeug oder Produkt der Ziffern in der letzten Stelle an.

Für alle Zahlen ist nun der erste Teil des Satzes gültig für $a = 0$; denn $a^0 = 1$ nach 319. Bewiesen soll werden, dass wenn der Satz für die 4te Höhe gilt, dass er dann auch für die $(4a + 2)$ te und für die $(4a + 4)$ te oder für die $4(a + 1)$ te Höhe gilt. Alle Primzahlen ausser 2 und 5 haben in der letzten Stelle eine der Ziffern 1, 3, 7, 9.

Die Primzahlen mit 1 in der letzten Stelle haben also in der letzten Stelle in der 4ten Höhe 1 (Annahme), in der $(4a + 1)$ ten Stelle $1 \cdot 1 = 1$ und ebenso in den letzten Stellen sämtlicher folgenden Höhen eins.

Die Primzahlen, welche 9 in der letzten Stelle haben, haben in der letzten Stelle in der 4ten Höhe 1 (nach Annahme), in der $(4a + 1)$ ten Höhe $1 \cdot 9 = 9$, in der $(4a + 2)$ ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$ d. h. in der letzten Stelle 1, in der $(4a + 3)$ ten Höhe $1 \cdot 9 = 9$ und in der $(4a + 4)$ ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Die Primzahlen, welche 3 in der letzten Stelle haben, haben in der letzten Stelle in der 4ten Höhe 1 (nach Annahme), in der $(4a + 1)$ ten Höhe $1 \cdot 3 = 3$, in der $(4a + 2)$ ten Höhe $3 \cdot 3 = 9$, mithin in der $(4a + 4)$ ten Höhe $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Die Primzahlen, welche 7 in der letzten Stelle haben, haben in

der letzten Stelle in der 4ten Höhe 1 (nach Annahme), in der $(4a + 1)$ ten Höhe $1 \cdot 7 = 7$, in der $(4a + 2)$ ten Höhe $7 \cdot 7 = 49$, d. h. in der letzten Stelle 9, in der $(4a + 4)$ ten Höhe mithin $9 \cdot 9 = 81$, d. h. in der letzten Stelle 1.

Wenn der Satz für die 4te Höhe gilt, so gilt er mithin auch für die $(4a + 2)$ te und für die $4a + 4$ oder $4(a + 1)$ te Höhe, nun gilt er für $4a = 0$, mithin gilt er allgemein.

10. Die Höhen von Summen und die Summen von Höhen.

A. Die Höhen und die Loge von Summen.

387. Erklärung. Die Geschiedszahl von n zur m ten Stufe heist die Zahl
$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m},$$
 wo n eine ganze Pluszahl ist.

Die Zahl $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ heist die Geänderszahl von n zur m ten Stufe; die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ heist die Tauschzahl von m . Die Geschiedszahl von n zur nullten Stufe setzt man 1. Die Zahl n heist hier die Base, die Zahl m die Stufe.

388. Erklärung. Das Zeichen der Geschiedszahl von n zur m ten Stufe ist $n^{\cdot m}$ (gelesen n Punkt m), das der Geänderszahl von n zur m ten Stufe ist n^m (gelesen n Schlag m), das der Tauschzahl von m ist $m!$ (gelesen m Tausche).

Beispiele: $10^{\cdot 0} = 1$, $10^{\cdot 1} = 10$, $10^{\cdot 2} = 45$, $10^{\cdot 3} = 120$, $10^{\cdot 4} = 210$, $10^{\cdot 5} = 252$, $10^{\cdot 6} = 210$, $10^{\cdot 7} = 120$, $10^{\cdot 8} = 45$, $10^{\cdot 9} = 10$, $10^{\cdot 10} = 1$, $10^{\cdot 11} = 0$. Es ist $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $8! = 5760$, $9! = 51840$, $10! = 518400$.

389. Satz. $n^{\cdot m} = \frac{n^m}{m!}$; $n^m = m! \cdot n^{\cdot m}$.

Die Geschiedszahl von n zur m ten Stufe ist gleich der Geänderszahl von n zur m ten Stufe geteilt durch die Tauschzahl von m und die Geänderszahl von n zur m ten Stufe ist gleich der Geschiedszahl von n zur m ten Stufe mal der Tauschzahl von m .

Beweis: Unmittelbar aus 387.

Beispiel: Es ist $10^{\cdot 2} = 10^{\cdot 2} \cdot 2! = 90$; $10^{\cdot 4} = 10^{\cdot 4} \cdot 4! = 5040$.

390. Satz. $n^{\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Die Geschiedszahl von n zur m ten Stufe ist gleich der Tauschzahl von n geteilt durch das Zeug oder Produkt der beiden Tauschzahlen von m und von $n-m$.

Beweis: Die Geschiedszahl von n zur. mten Stufe ist nach: 387 und nach 182

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \dots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m (n-m)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Satz. $(n+1)^m = n^m + n^{m-1}.$

391.

Jede Geschiedszahl ist gleich der Summe zweier Geschiedszahlen, deren Basen um eins kleiner sind als die Base der gegebenen Geschiedszahl und von deren Stufen die eine ebenso gros, die andere um eins kleiner ist als die Stufe der gegebenen Geschiedszahl.

Beweis: Nach 387 ist

$$\begin{aligned} n^m + n^{m-1} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+2)(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-m+2)(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+2) \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot m} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)m} (n-m+1+m) \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m} = (n+1)^m \end{aligned}$$

Satz. Die zweite Höhe oder das Quader der Summe. 392.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Die zweite Höhe einer Summe ist gleich der Summe aus den zweiten Höhen der beiden Stücke plus dem doppelten Zeuge oder Produkte der beiden Stücke.

Beweis: Man führe die Vervielfachung nach 315 aus, so ist

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Beispiel: $(5+6)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2 = 25 + 60 + 36 = 121.$

Binomischer Lehratz oder die nte Höhe der Summe, 393.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + n \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 \\ &\quad + \dots + nab^{n-1} + b^n \\ &= a^n + n^1 a^{n-1}b + n^2 a^{n-2}b^2 + n^3 a^{n-3}b^3 + \dots \\ &\quad + n^{n-1} ab^{n-1} + n^a b^n \\ &= 3n^a a^{n-a} b^a, \quad \text{we } n \text{ eine ganze Flusszahl.} \end{aligned}$$

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 2$, d. h. für $(a + b)^2$ nach 392.

2. Wenn der Satz für $(a + b)^n$ gilt (Annahme,) so gilt er auch für $(a + b)^{n+1}$ Folgerung; denn

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n = \\ &= a^{n+1} + n \cdot a^n b + n \cdot a^{n-1} b^2 + n \cdot a^{n-2} b^3 + \dots + n \cdot a^{n-1} a^2 b^{n-1} + n \cdot a^n b^n \\ &\quad + a^{n+1} b + n \cdot a^n b^2 + n \cdot a^{n-1} b^3 + \dots + n \cdot a^{n-2} a^2 b^{n-1} + n \cdot a^{n-1} a b^n + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + (n+1) \cdot a^n b + (n+1) \cdot a^{n-1} b^2 + (n+1) \cdot a^{n-2} b^3 \\ &\quad + \dots + (n+1) \cdot a^{n-1} a^2 b^{n-1} + (n+1) \cdot a^n b^n + b^{n+1} \end{aligned}$$

da stets $(n+1) \cdot a^n = n \cdot a^n + n \cdot a^{n-1}$ nach 391, also gilt der Satz auch für $(a + b)^{n+1}$.

3. Mithin gilt der Satz nach 23 ganz allgemein.

Den Binomischen Lehrsatz wendet man gewöhnlich an, um die zweite Tiefe (Wurzel) zu berechnen, die beiden folgenden Sätze 394 und 395 enthalten diese Anwendung. Es ist diese Anwendung aber so gänzlich unpraktisch weitläufig und unbequem, dass ich jedem raten möchte, dieselbe zu überschlagen. Einerseits liefern die Loge oder Logarithmen einen höchst bequemen Weg zur Berechnung für die Wurzel bis auf 5 bis 7 Stellen; andererseits werden wir in der Folgelehre oder Funktionslehre noch einen zweiten bequemen Weg für die Berechnung der Tiefen für beliebig viele Stellen kennen lernen. Die beiden Sätze 394 und 395 habe ich hier nur aufgeführt, damit die Herren, welche an dieselben gewöhnt sind, sie nicht vermissen.

394. Satz für das stellenweise Berechnen der zweite Tiefe (Wurzel): Man teilt die Zahl links vom Komma in m Gruppen von je 2 Stellen, zieht von der ersten linken Gruppe das größte Quader einer einziffrigen Zahl a_1 ab, welches sich davon abziehen lässt. Fügt zu dem Reste r_1 die nächste Stelle und zieht davon den doppelten Wert der Zahl a_1 soviel mal (b_1 mal) ab, als er aufgeht. Der Rest sei r'_1 . Zu dem Reste r'_1 fügt man die Ziffer der nächsten Stelle, und zieht davon das Quader b_1^2 ab, und sei r_2 der Rest, der übrig bleibt, dann ist $a \cdot 10 + b$ der zweite genäherte Wert a_2 der Tiefe. So fährt man fort. Sei a_n der n te genäherte Wert und r_n der Rest der übrig geblieben ist, nachdem b_{n-1}^2 abgezogen ist, so fügt man zu r_n die Ziffer der nächsten Stelle und zieht davon den doppelten Wert der Zahl a_n soviel mal (b_n mal) ab, als er aufgeht, der Rest sei r'_n . Zu dem Reste r'_n fügt man die Ziffer der nächsten Stelle und zieht davon das Quader b_n^2 ab, sei r_{n+1} der Rest, der übrig bleibt, dann ist $a_n \cdot 10 + b_n$ der $n+1$ te genäherte Wert der Wurzel a_{n+1} .

Beweis: Nach 392 ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, gestaltet man diese Formel so um, dass a und b einziffrige Zahlen sind und a eine Stelle höher ist als b , so wird daraus $(a \cdot 10 + b)^2 = a^2 100 + 2a \cdot 10 \cdot b$

+ b^2 . Sei also R die gegebene Zahl und teilt man dieselbe in m Gruppen zu 2 Stellen. Sei nun a_n die n te Wurzel und r_n der Rest für eine Stelle, wenn man bis zu dieser Stelle a_n^2 abgezogen hat und sei c die Ziffer der nächsten Stelle und d die der zweiten Stelle, und R_{n+1} der Rest der folgenden Stellen, so ist also $R = a_n^2 \cdot 100 + r_n \cdot 100 + c \cdot 10 + d + R_{n+1}$ will man nun davon $(a_n \cdot 10 + b_n)^2 = a_n^2 \cdot 100 + 2a_n \cdot 10 \cdot b_n + b_n^2$ abziehen, so muss man von $r_{n+1} \cdot 100 + c \cdot 10$ die Zahl $(2a_n \cdot 10)b$ mal abziehen, und bleibe $r'_n \cdot 10$, so muss man von $r'_n \cdot 10 + d$ die Zahl b^2 abziehen, sei der Rest r^{n+1} so ist also $R = (a_n \cdot 10 + b_n)^2 + r_{n+1} + R_{n+1}$ und ist also $a_n \cdot 10 + b$ der $n + 1$ te Näherungswert der Wurzel.

Beispiele: $\sqrt{217533001} = 14749$

	$\sqrt{217533001}$		
$a_1 = 1$	$\frac{1}{11}$	$r_1 \cdot 10 + d$	1448
$r_1 \cdot 10 + c$	$\frac{11}{11}$	$2a_1 b_1 = 2 \cdot 4 = 8$	1176
$2a_1 b_1 = 2 \cdot 4 = 8$	$\frac{8}{37}$		$\frac{2670}{18}$
$b_1^2 =$	$\frac{16}{215}$	$b_1^2 =$	$\frac{16}{26540}$
$2a_2 b_2 = 28 \cdot 7 = 196$	$\frac{196}{198}$	$2a_2 b_2 = 2948 \cdot 9 =$	$\frac{26582}{81}$
$b_2^2 =$	$\frac{49}{49}$	$b_2^2 =$	$\frac{81}{81}$

Satz für das abgekürzte Berechnen der zweiten Wurzel. 395.

Wenn a_{n+1} ein $n+1$ ziffriger Näherungswert von $R^{\frac{1}{2}}$ ist und $r_{n+1} \cdot 10^p + R_{n+1}$ der zugehörige Rest, so findet man die p folgenden Ziffern der zweiten Wurzel b_{n+1} , indem man $r_{n+1} \cdot 10^p + R_{n+1}$ durch $2a_{n+1}$ teilt und zwar b_{n+1} mal, doch kann in diesem Ausdruck die Ziffer der letzten Stelle um eine Einheit zu groß sein. Sei dann $r'_{n+1} \cdot 10^p + R'_{n+1}$ der Rest, so zieht man b_{n+1}^2 von diesem Reste ab und erhält dann den Rest $r_{n+2} \cdot 10^p + R_{n+2}$ für die weiteren Näherungswerte.

Beweis: Der Beweis ist sehr leicht ganz entsprechend dem Beweise von 394 zu führen.

Beispiele:	$\sqrt{2} = 1,41421356(28790950$
$a_1^2 =$	2
$r_1 \cdot 10 + c$	1
$2a_1 b_1 = 2 \cdot 4$	10
$r'_1 \cdot 10 + d$	8
$b_1^2 = 4^2$	20
$r_2 \cdot 10 + c$	16
$2a_2 b_2 = 28 \cdot 1$	40
$r'_2 \cdot 10 + d$	28
$b_2^2 = 1^2$	120
$r_3 \cdot 100 + c$	1
$2a_3 b_3 = 282 \cdot 42$	11900
$r'_3 \cdot 100 + d$	11844
$b_3^2 = 42^2$	5600
$r_4 \cdot 1000 + c$	1764
$2a_4 b_4 = 28284 \cdot 1536$	38860000
$r'_4 \cdot 10000 + d$	38658104
$b_4^2 = (1536)^2$	68960000
$r_5 \cdot 10_5 + c$	1888736
$2a_5 b_5 = 282842712 \cdot 28790950$	6712126400000000
$r'_5 \cdot 10_5 + d$	6712126256386400
$b_5^2 = (28790950)^2$	14366360000000000
$r_6 =$	363157987902500
	14003202012097500

Auch die folgenden beiden Sätze 396 und 397, welche Gauss 1812 erfunden hat, werden überaus selten gebraucht. Ich rate daher dieselben zunächst zu überschlagen und sie dann nachzuholen, wenn sie praktisch gebraucht werden.

396. Satz. Der Log der Summe.

Es ist bei den log. Berechnungen höchst unbequem, wenn mitten in der Rechnung die Summe oder der Unterschied zweier Zahlen vorkommt, deren Loge man hat. Man muss dann erst zu den beiden Logen die beiden entsprechenden Zahlen auffuchen, von diesen die Summe oder den Unterschied nehmen, und dann erst wieder den Log der gefundenen Zahl aufschlagen. Um diese Weitläufigkeiten zu vermeiden, hat man eine Hülftafel entworfen.*) Man hat für $A = \log x$, das $B = \log(x+1)$ aus der Logarithmentafel berechnet. Seien nun a und b die Zahlen, deren Loge gegeben und sei $a > b$; so wird der $\log(a+b)$ gesucht.

1. Wir setzen $x = \frac{b}{a}$, dann ist $x+1 = \frac{b}{a} + 1 = \frac{b+a}{a}$ und
 $a+b = a(x+1)$ mithin ist $\log b - \log a = \log x = A$,
 $\log(a+b) = \log a(x+1) = \log a + \log(x+1) = \log a + B$.

*) Bemerkte möge hier nochmals werden, dass jedes Formelzeichen, also auch das Zeichen \log sich stets auf das ganze folgende Glied bezieht. Es ist demnach $\log a(x+1) = \log[a(x+1)]$ und $\log \log y = \log(\log y)$ u. f. w.

2. Wir setzen $x = \frac{a}{b}$, dann ist $x + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$ und $a+b = b(x+1)$
 mithin ist $\log a - \log b = \log x = A$.

$$\log(a+b) = \log b(x+1) = \log b + \log(x+1) = \log b + B$$

$$= \log \frac{a(x+1)}{b} = \log a + \log(x+1) - \log \frac{a}{b} = \log a + (B-A)$$

Dies sind dann die Formeln der Hülftafel.

Es wird bemerkt, dass der erstere Weg schneller zum Ziele führt.

Beispiele: 1. $a > b$; $\log b - \log a = A$; $\log(a+b) = \log a + B$.

$$\log b = 2,13782$$

$$\log a = 2,95678$$

$$A = 9,18104 - 10$$

$$B = 0,06184$$

$$\log a + B = 3,01812$$

$$\log(a+b) = \{$$

$$\log b = 3,17658$$

$$\log a = 3,35216$$

$$A = 9,82437 - 10$$

$$B = 0,22204$$

$$\log a + B = 3,57420$$

$$\log(a+b) = \{$$

2. $a > b$; $\log a - \log b = A$; $\log(a+b) = \log b + B = \log a + (B-A)$.

$$\log a = 2,95678$$

$$\log b = 2,13782$$

$$A = 0,81896$$

$$B = 0,88060$$

$$\log b + B = 3,01812$$

$$\log(a+b) = \{$$

$$\log a = 3,35216$$

$$\log b = 3,17658$$

$$A = 0,17568$$

$$B = 0,89767$$

$$\log a + (B-A) = 3,57420$$

$$\log(a+b) = \{$$

Satz. Der Log des Unterschieds.

397.

1. Für den Log des Unterschieds gilt dieselbe Hülftafel, wie für den Log der Summe. Man hat also für $A = \log x$ das $B = \log(x+1)$ aus der Logarithmentafel berechnet. Dann ist, wenn man $B = \log y$ setzt, $A = \log(y-1)$.

Seien nun a und b die Zahlen, deren Loge gegeben und sei $a > b$; es wird der Log $(a-b)$ gesucht.

1. Wir setzen $y = \frac{a}{b}$, dann ist $y - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$ und

$a - b = b(y-1)$ mithin ist $\log a - \log b = \log y = B$ und

$$\log(a-b) = \log b(y-1) = \log b + \log(y-1) = \log b + A$$

$$= \log \frac{b(y-1)}{b} = \log a + \log(y-1) - \log \frac{a}{b} = \log a + A - B$$

$$= \log a - (B - A).$$

2. Wenn $B = \log a - \log b$ kleiner als 0,30500, so wird in der Tafel A zu ungenau und muss man dann A dadurch finden, dass man den Log B nimmt und diesen zu P zufügt, so dass $A = P + \log B$; dann ist also $\log B = A - P$, d. h. $\log \log y = \log(y-1) - P$ und P eine Hülfsgröße aus den logarithmischen Tafeln berechnet. Eine eigene kleine Hülftafel ist für diese Fälle berechnet. Es ist dann $\log(a-b) = \log b + A = \log b + P + \log B$.

Beispiele: $a > b$; $\log a - \log b = B$;

$$\log(a-b) = \log b + A = \log a + A - B.$$

$$\begin{array}{r} \log a = 3,78210 \\ \log b = 9,86854 \\ \hline \end{array}$$

$$B = 3,91856$$

$$A = 3,91861$$

$$\begin{array}{l} \log b + A \} = 3,78215 \\ \log (a - b) \} \end{array}$$

$$a > b; \log a - \log b = B; A = P + \log B; \log (a - b) = \log b + A.$$

$$\log a = 9,57362 - 10$$

$$\log b = 9,52738 - 10$$

$$B = 0,04624$$

$$P = 0,38554$$

$$\begin{array}{l} \log b + A \} = 9,95916 - 10 \\ \log (a - b) \} \end{array}$$

$$\log a = 9,58426 - 10$$

$$\log b = 8,78854 - 10$$

$$B = 0,75072$$

$$A = 0,66584$$

$$\begin{array}{l} \log a + A - B \} = 9,94938 \\ \log (a - b) \} \end{array}$$

$$\log a = 3,42378$$

$$\log b = 3,28737$$

$$B = 0,13641$$

$$P = 0,43220$$

$$\begin{array}{l} \log b + A \} = 3,85598 \\ \log (a - b) \} \end{array}$$

3. Uebrigens muss hiebei noch besonders bemerkt werden, dass diese Rechnung mit Logen stets sehr ungenaue Ergebnisse liefert, wenn sehr kleine Unterschiede gefucht werden und dass man diese Fälle mithin vermeiden muss.

4. Es geben diese beiden Sätze 396 und 397 zugleich ein bequemes Mittel um die Wurzel aus Summen und Unterschieden zu berechnen. Sei z. B. $a = (1 - b^2)^{1/2}$, eine Formel, welche in der Trigonometrie häufig vor-

kommt, wo $\sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}$ und $\cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}$, so hat man

$$B = \log \frac{1}{b^2} = -2 \log b, \text{ mithin } A = \log \left(\frac{1}{b^2} - 1 \right) = \log \frac{1 - b^2}{b^2}, \text{ also}$$

$$\log (1 - b^2) = 2 \log b + A, \text{ und } \log a = \log (1 - b^2)^{1/2} = \log b + \frac{1}{2} A.$$

Die Rechnung ist dann also einfach: Man setze, da $\log b$ gegeben ist, $B = -2 \log b$, suche dazu A und findet dann $\log (1 - b^2)^{1/2} = \log b + \frac{1}{2} A$

$$\text{Beispiele: } \sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}; B = -2 \log \cos x,$$

$$\log \sin x = \log \cos x + \frac{1}{2} A$$

$$\log \cos x = 9,99761$$

$$B = 0,00478$$

$$A = 8,04404$$

$$\begin{array}{l} \log \cos x + \frac{1}{2} A \} = 9,01963 \\ \log \sin x \} \end{array}$$

$$\log \cos x = 9,88425$$

$$B = 0,23150$$

$$A = 9,84764$$

$$\begin{array}{l} \log \cos x + \frac{1}{2} A \} = 9,80807 \\ \log \sin x \} \end{array}$$

$$\cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}; B = -2 \log \cos x$$

$$\log \cos x = \log \sin x + \frac{1}{2} A$$

$$\log \sin x = 9,65054$$

$$B = 0,69892$$

$$A = 0,60200$$

$$\begin{array}{l} \log \sin x + \frac{1}{2} A \} = 9,95154 \\ \log \cos x \} \end{array}$$

$$\log \sin x = 9,53578$$

$$B = 0,92844$$

$$= 0,87396$$

$$\begin{array}{l} \log \sin x + \frac{1}{2} A \} = 9,97276 \\ \log \cos x \} \end{array}$$

B. Die Zahlenreihen höhern Ranges und die Stufenreihen.

1. Die Zahlenreihen (die arithmetischen Reihen) höhern Ranges.

Erklärung. Wenn man in einer Reihe von Zahlen jede vorher- 398.
gehende von der nächstfolgenden abzieht, so heißen die dadurch er-
haltenen Unterschiede die ersten Unterschiede.

Wenn man in der Reihe der n ten Unterschiede wieder jedes
Glieder von dem nächstfolgenden abzieht, so erhält man die $n + 1$ ten
Unterschiede.

Erklärung. Eine Zahlenreihe (arithmetische Reihe) p ten Ranges 399.
heißt eine Reihe von Zahlen, deren p te Unterschiede alle einander
gleich sind.

Wir bezeichnen das n te Glied der Zahlenreihe mit 0a_n , das n te
Glieder der c ten Unterschiede mit ca_n .

Die allgemeine Bezeichnung der Zahlenreihe p ten Ranges ist also

$$\begin{array}{cccccccc}
 {}^0a_1 & {}^0a_2 & {}^0a_3 & {}^0a_4 & {}^0a_5 & {}^0a_6 & {}^0a_7 & {}^0a_8 \\
 {}^1a_1 & {}^1a_2 & {}^1a_3 & {}^1a_4 & {}^1a_5 & {}^1a_6 & {}^1a_7 & \\
 {}^2a_1 & {}^2a_2 & {}^2a_3 & {}^2a_4 & {}^2a_5 & {}^2a_6 & & \\
 {}^3a_1 & {}^3a_2 & {}^3a_3 & {}^3a_4 & {}^3a_5 & & & \\
 {}^4a_1 & {}^4a_2 & {}^4a_3 & {}^4a_4 & & & & \\
 {}^5a_1 & {}^5a_2 & {}^5a_3 & & & & & \\
 {}^6a_1 & {}^6a_2 & & & & & & \\
 {}^7a_1 & & & & & & &
 \end{array}$$

Satz. ${}^{c+1}a_{n+1} = {}^ca_n + {}^{c+1}a_n$ 400.

Bei den Zahlenreihen höhern Ranges ist das $n + 1$ te Glied der
 c ten Unterschiede gleich der Summe aus den beiden n ten Gliedern
der c ten und der $c + 1$ ten Unterschiede.

Beweis: Nach 398 ist in der Reihe der c ten Unterschiede das
 $n + 1$ te Glied weniger dem n ten Gliede gleich dem $n + 1$ ten Unter-
schiede und zwar gleich dem n ten Gliede der $c + 1$ ten Unterschiede, d. h.

$${}^{c+1}a_{n+1} - {}^ca_n = {}^{c+1}a_n \quad \text{also auch} \quad {}^{c+1}a_{n+1} = {}^ca_n + {}^{c+1}a_n$$

Beispiele: Es ist ${}^0a_7 = {}^0a_6 + {}^1a_6$, es ist ${}^1a_3 = {}^1a_2 + {}^2a_2$.

Satz. In einer Zahlenreihe p ten Ranges sind alle $p + a$ ten 401.
Unterschiede gleich Null, wo a eine Pluszahl.

Beweis: Unmittelbar aus 399.

Satz. Das allgemeine n te Glied der c ten Unterschiede 402.
einer Zahlenreihe p ten Ranges.

$$c_{a_{n+1}} = c_{a_1} + n^1 c^{+1} a_1 + n^2 c^{+2} a_1 + n^3 c^{+3} a_1 + \dots + n^{n-1} c^{+n-1} a_1 + c^{+a} a_1 \\ = S n^a c^{+a} a_1$$

hier sind alle Glieder der $p + a$ ten Unterschiede p^{+a} Null.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n = 1$, denn $c_{a_2} = c_{a_1} + c^{+1} a_1$ nach 400.

2. Wenn der Satz für $c_{a_{n+1}}$ gilt, (Annahme) so gilt er auch für $c_{a_{n+2}}$ (Folgerung); denn nach 400 ist

$$c_{a_{n+2}} = c_{a_{n+1}} + c^{+1} a_{n+1} \\ = c_{a_1} + n^1 c^{+1} a_1 + n^2 c^{+2} a_1 + \dots + n^{n-1} c^{+n-1} a_1 + c^{+a} a_1 \\ + c^{+1} a_1 + n^1 c^{+2} a_1 + \dots + n^{n-2} c^{+n-1} a_1 + n^{n-1} c^{+a} a_1 + c^{+a+1} a_1 \\ = c_{a_1} + (n+1)^1 c^{+1} a_1 + (n+1)^2 c^{+2} a_1 + \dots \\ + (n+1)^{n-1} c^{+n-1} a_1 + (n+1)^a c^{+a} a_1 + c^{+a+1} a_1$$

da $(n+1)^a = n^a + n^{a-1}$ (nach 391).

3. Also gilt der Satz nach 23 allgemein.

403. Satz. $c^{-1} a_{n+1} - c^{-1} a_1 = c_{a_1} + c_{a_2} + c_{a_3} + \dots + c_{a_n} = S_{1,n} c_a$

Die Summe der n ersten Glieder der a ten Unterschiede ist gleich dem $n + 1$ ten Gliede weniger dem ersten Gliede der $c - 1$ ten Unterschiede.

Beweis: Nach 400 ist $c^{-1} a_n = c^{-1} a_{n-1} + c_{a_{n-1}}$, mithin ist, wenn wir stets für $c^{-1} a_n$ den Wert einsetzen,

$$c^{-1} a_{n+1} = c^{-1} a_n + c_{a_n} = c^{-1} a_{n-1} + c_{a_{n-1}} + c_{a_n} \\ = c^{-1} a_{n-2} + c_{a_{n-2}} + c_{a_{n-1}} + c_{a_n} \quad \text{u. f. w.} \\ = c^{-1} a_1 + c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_n}$$

also wenn wir $c^{-1} a_1$ auf die linke Seite schaffen

$$c^{-1} a_{n+1} - c^{-1} a_1 = c_{a_1} + c_{a_2} + \dots + c_{a_n}.$$

404. Satz. Die Summe der n ersten Glieder der a ten Unterschiede einer Zahlenreihe p ten Ranges.

$$S_{1,n} c_a = n^1 c_{a_1} + n^2 c^{+1} a_1 + n^3 c^{+2} a_1 + \dots$$

$$+ n^{n-1} c^{+n-2} a_1 + c^{+n-1} a_1 = S_{1,n} n^a c^{+a-1} a_1$$

hier sind alle Glieder der $p + a$ ten Unterschiede p^{+a} Null.

$$\text{Beweis: Nach 400 ist } c^{-1} a_{n+1} = c^{-1} a_1 + n^1 c_{a_1} + n^2 c^{+1} a_1 + n^3 c^{+2} a_1 \\ + \dots + n^{n-1} c^{+n-2} a_1 + c^{+n-1} a_1$$

$$\text{mithin ist } S_{1,n} c_a = c^{-1} a_{n+1} - c^{-1} a_1 = n^1 c_{a_1} + n^2 c^{+1} a_1 + n^3 c^{+2} a_1 + \dots \\ + n^{n-1} c^{+n-2} a_1 + c^{+n-1} a_1 \\ = S_{1,n} n^a c^{+a-1} a_1.$$

Die Zahlenreihe zweiten Ranges heist eine Reihe von Vieleckszahlen (Polygonalzahlen), wenn $a = 1$ und $1_a = 1$ ist. Für das neck ist $2_a = n - 2$.

Die Zahlenreihe dritten Ranges heist eine Reihe von Turmzahlen (Pyramidalzahlen), wenn 0a , 1a und 2a alle gleich Eins, für die neckige Base des Turmes ist $^na = n - 2$.

Die Zahlenreihe p ten Ranges heist eine Reihe figurirter Zahlen (series numerorum figuratorum) wenn 0a , 1a , $^2a \dots p-1a$ alle gleich Eins sind, und pa eine ganze Pluszahl ist.

B. Die Stufenreihe ersten Ranges nebst Zins- und Renten-Rechnung.

Erklärung. Eine Stufenreihe ersten Ranges, (eine geometrische Reihe ersten Ranges) heist eine Reihe von Zahlen, wenn in ihr jede Zahl geteilt durch die nächstvorhergehende denselben Bruch giebt. 405.

Es bezeichnen in der Stufenreihe ersten Ranges a das erste, t das n te Glied, b den Folgebruch d. h. ein Glied geteilt durch das nächstvorhergehende, S die Summe der n ersten Glieder.

Gesetz der Stufenreihe (geometrischen Reihe) ersten Ranges. 406.
Für die Stufenreihe (geometrische Reihe) ersten Ranges hat man folgende Formeln

$$t = ab^{n-1} \quad S = \frac{tb - a}{b - 1} \quad S = a \frac{b^n - 1}{b - 1} = a \frac{1 - b^n}{1 - b}$$

Die Summe einer Stufenreihe ersten Grades erhält man, indem man das erste Glied mit dem Unterschiede aus der Eins und der n ten Höhe des Folgebruches vervielfacht und durch den Unterschied aus der Eins und dem Folgebruche teilt.

Beweis: 1. Die erste Formel folgt unmittelbar aus der Erklärung 405.

2. Um die Summe zu finden, schreibt man die Reihe zweimal in gleicher Folge, aber das zweite mal mit b vervielfacht und zieht die erste von der zweiten ab, dann hat man

$$\begin{array}{r} S = a + ab + ab^2 + \dots + t \\ Sb = \quad ab + ab^2 + \dots + t + tb \\ \hline Sb - S = tb - a, \text{ mithin} \\ S = \frac{tb - a}{b - 1} \end{array}$$

Die dritte Formel erhält man, wenn man den Wert von t aus der ersten Formel einführt und die letzte Formel, wenn man Zähler und Nenner mit -1 vervielfacht.

$$\text{Beispiele: } 3, 9, 27, 81, 243, 729 \quad S = \frac{729 \cdot 3 - 3}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 1092.$$

$$\text{Bruch} \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3.$$

407. **Erklärung.** Zinsen und Renten. Wenn das Vermögen (Kapital) 1 durch Zinsen nach einem Jahre $1 + \frac{p}{100}$ wird, so nennt man p den Zinsfus, $z = 1 + \frac{p}{100}$ den Zinsfach (den Zinsfaktor) und bezeichnet $\frac{p}{100}$ durch p ‰ gelesen p Prozente.

Wenn am Anfange jedes Jahres eine gleiche Summe eingezahlt wird, so heist diese ein jährlicher Beitrag b , wenn am Anfange jedes Jahres eine gleiche Summe ausgezahlt wird, so heist diese eine Jahresrente x .

Beispiel: Sei der Zinsfus 5, so ist das Zinsfach $z = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$.

Sei der Zinsfus $4\frac{1}{2}$, so ist das Zinsfach $z = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$.

Bemerkt wird, dass hier stets mit Zinseszins gerechnet wird. d. h. dass auch die Zinsen von den Zinsen mit berechnet werden, wie dies für Rentenrechnung und Sammlung eines Vermögens notwendig ist.

408. **Satz.** Das Vermögen (Kapital) k hat nach n Jahren bei dem Zinsfache z den Wert x , wo

$$x = kz^n.$$

Beweis: Unmittelbar aus der Erklärung 407.

Beispiele: Das Kapital 1000 \mathcal{M} hat nach 20 Jahren beim Zinsfusse 5 den Wert von $1000 \cdot (1,05)^{20} = 2653,30 \mathcal{M}$

409. **Satz.** Ein Vermögen k hatte vor n Jahren bei dem Zinsfache z den Wert x , wo

$$x = kz^{-n}.$$

Beweis: Nach 408 ist $k = xz^n$, mithin $x = \frac{k}{z^n} = kz^{-n}$.

410. **Satz.** Der jährliche Beitrag b giebt nach n Jahren ein Vermögen (Kapital) x , wo
$$x = bz \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Beweis: Der erste Beitrag steht n Jahre und verwandelt sich also in bz^n (nach 408), der letzte steht ein Jahr und wird bz , die Summe aller dieser Werte ist mithin

$$x = bz^n + bz^{n-1} + \dots + bz^2 + bz = bz \frac{z^n - 1}{z - 1} \text{ (nach 406)}$$

Beispiele: Sei der jährliche Beitrag $b = 100 \mathcal{M}$ und feier $n = 20$ Jahre zu zahlen, so ist nach 20 Jahren das Vermögen x beim Zinsfusse 5

$$x = 100 \cdot 1,05 \frac{(1,05)^{20} - 1}{1,05 - 1} = 105 \cdot \frac{(1,05)^{20} - 1}{0,05} = 105 \cdot 1,61330 = 3471,33 \mathcal{M}.$$

Satz. Wie groß muss gegenwärtig ein Vermögen (Kapital) x 411. sein, wenn daraus n Jahre die Jahresrente r gezahlt werden soll?

Antwort:

$$x = r \frac{z^n - 1}{(z - 1) z^{n-1}}.$$

Beweis: Die erste Rente r wird sofort gezahlt, die zweite r nach einem Jahre, sie hat also gegenwärtig den Wert rz^{-1} (nach 409), die n te r nach $n - 1$ Jahren, sie hat also gegenwärtig den Wert $rz^{-(n-1)}$, mithin ist

$$\begin{aligned} x &= r + rz^{-1} + rz^{-2} + \dots + rz^{-(n-1)} \\ &= (rz^n + rz^{n-1} + rz^{n-2} + \dots - rz) : z^n \\ &= \frac{rz}{z^n} \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1} = r \frac{z^n - 1}{(z - 1)z^{n-1}}. \end{aligned}$$

Beispiele: Sei die Jahresrente $r = 100 \text{ M}$ und sei sie $n = 20$ Jahre zu zahlen, so muss das gegenwärtige Vermögen x sein.

$$x = 100 \frac{(1,05)^{20} - 1}{(1,05 - 1)(1,05)^{19}} = 1308,33 \text{ M}$$

Satz. Wie groß muss der jährliche Beitrag x sein der n Jahre ge- 412. zahlt wird, wenn man dafür q Jahre die Jahresrente r erhalten will und die erste Jahresrente ein Jahr nach dem letzten Beitrage gezahlt wird? **Antwort.**

$$x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}.$$

Beweis: Der jährliche Beitrag x ist (nach 410) nach n Jahren $zx \frac{z^n - 1}{z - 1}$, und dies muss (nach 411) gleich $r \frac{z^q - 1}{(z - 1)z^{q-1}}$ sein, also ist

$$\begin{aligned} zx \frac{z^n - 1}{z - 1} &= r \frac{z^q - 1}{(z - 1)z^{q-1}}, \text{ d. h.} \\ x &= \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}. \end{aligned}$$

Beispiele: Sei $n = 15$ Jahre, $q = 25$ Jahre, die Jahresrente 100 M , Zinsfuß 5, so ist $x = \frac{100 (1,05)^{25} - 1}{(1,05)^{25} (1,05)^{15} - 1} = 65,32 \text{ M}$

C. Die Höhenreihen oder Potenzreihen.

Erklärung. Eine Höhenreihe oder Potenzreihe von x 413. heist eine Reihe, in welcher jedes Glied ein Zeug einer Vorzahl (eines Koeffizienten) mit einer Höhe der Base x ist, und bei welcher alle Glieder, welche dieselbe Höhe von x enthalten, in ein Glied zusammengefasst, die Glieder aber nach der Stufe von x geordnet sind.

Die Form einer Höhenreihe von x ist $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$

Kommt eine Höhe von x in der Höhenreihe nicht vor, so sagt man, ihre Vorzahl sei Null.

In zwei Höhenreihen gleicher Base nennt man die zu gleicher Stufe gehörigen Vorzahlen einander entsprechend.

414. Satz. Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Base fügt man zu, indem man die entsprechenden Vorzahlen (Koeffizienten) zusügt, und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \dots) + (ax^n + bx^{n-1} + \dots) \\ = (a + a)x^n + (b + b)x^{n-1} + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus 122.

415. Satz. Von einer Höhenreihe (Potenzreihe) zieht man eine Höhenreihe gleicher Base ab, indem man von jeder Vorzahl (Koeffizienten) der erstern die entsprechende der letztern abzieht und die zugehörigen Höhen unverändert lässt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \dots) - (ax^n + bx^{n-1} + \dots) \\ = (a - a)x^n + (b - b)x^{n-1} + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus 131.

416. Satz. Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Base x vervielfacht man mit ax^m , indem man jede Vorzahl derselben mit a vervielfacht und zu jeder Stufe m süfügt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \dots) ax^m = aax^{n+m} + bax^{n+m-1} + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

417. Satz. Eine Höhenreihe (Potenzreihe) der Base x teilt man durch ax^m , indem man jede Vorzahl derselben durch a teilt und von der Stufe m abzieht, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + \dots) : (ax^m) = \frac{a}{a} x^{n-m} + \frac{b}{a} x^{n-m-1} + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

418. Satz. Zwei Höhenreihen (Potenzreihen) gleicher Base vervielfacht man mit einander, indem man die eine derselben mit jedem Gliede der andern vervielfacht und die erhaltenen Höhenreihen zusügt, d. h. es ist

$$(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots)(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots) \\ = aax^{n+m} + bax^{n+m-1} + cax^{n+m-2} + \dots \\ + abx^{n+m-1} + bbx^{n+m-2} + \dots \\ + acx^{n+m-2} + \dots \\ = aax^{n+m} + (ba + ab)x^{n+m-1} + (ca + bb + ac)x^{n+m-2} + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus 180.

Satz. Wenn man zwei Höhenreihen gleicher Base mit einander 419. vervielfacht, so erhält man die zu einer Stufe p gehörige Vorzahl, indem man je zwei Vorzahlen, deren Stufen p zur Summe haben, mit einander vervielfacht, und die erhaltenen Zeuge zufügt.

Satz. Eine Höhenreihe A teilt man durch eine zweite B , in 420. dem man das erste Glied der erstern durch das erste Glied der zweiten teilt und das Ergebniss C als erstes Glied des Bruches setzt. Indem man dann mit diesem Gliede C den ganzen Nenner B vervielfacht, das erhaltene Zeug von dem Zähler A abzieht, den Rest demnächst aufs Neue durch den Nenner B teilt und den auf gleiche Weise gefundenen Bruch zu dem zuerst gefundenen zufügt, d. h. es ist

$$\frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B}.$$

$$\text{Beweis: } \frac{A}{B} = \frac{A + BC - BC}{B} \quad (\text{nach 129})$$

$$= \frac{BC + A - BC}{B} \quad (\text{nach 131})$$

$$= \frac{BC}{B} + \frac{A - BC}{B} \quad (\text{nach 170})$$

$$= C + \frac{A - BC}{B} \quad (\text{nach 167}).$$

D. Die Reihenzahlen oder Systemzahlen.

Die Lehre von den Reihenzahlen behandelt die Zahlen des gewöhnlichen zehnteiligen Systemes von einem neuen Gesichtspunkte aus, indem sie jede Zahl als eine Summe von Höhen betrachtet. Neue Gesetze lehrt dieselbe nicht; dagegen ist es lehrreich und für die Anwendung auf die Reihen von Bedeutung auch diese Betrachtungsweise kennen zu lernen.

Erklärung. Eine Reihenzahl heist eine Höhenreihe (eine 421. Systemsahl), wenn die Base x eine ganze Zahl grösser als Eins, die Vorzahlen (Koeffizienten) aber ganze Zahlen von 0 bis $x-1$ sind. Die Base heist dann die Grundzahl. Man schreibt die Reihenzahl, indem man nach der Reihe die Vorzahlen von der höchsten bis zur 0ten Höhe hinschreibt. Hinter die Vorzahl von x^0 setzt man ein Komma, wenn noch Höhen mit Strichstufen oder mit negativen Exponenten folgen, und nennt dann die Reihe rechts vom Komma einen Reihenbruch.

Ist die Grundzahl 10, so heist die Reihenzahl eine Zehnzahl (dekadische Systemsahl), der Reihenbruch ein Zehntbruch (Decimalbruch).

Beispiel: $5008 = 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^0$; $5,008 = 5 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-3}$.

Man hat verschiedene Zahlen, gewöhnlich 10 zur Grundzahl der Reihenzahlen genommen. Jetzt haben alle Völker die 10 als Grundzahl angenommen, indem sie sich an die 10 Finger der Hände angeschlossen haben, welche zum Abzählen benutzt wurden und von Kindern auch jetzt noch benutzt werden. Die Deutschen haben schliesslich noch den Versuch gemacht, über das zehnteilige System hinaus in das zwölfteilige überzugehen, welches zahlreiche Vorzüge besitzt, da in 12 die Zahlen 2, 3, 4, 6 aufgehen, während in 10 nur 2 und 5 aufgehen; aber der Versuch ist nicht durchgeführt und muss daher aufgegeben werden.

Jetzt sind allgemein die indischen (die sogenannten arabischen) Ziffern im Gebrauche, und werden nur die Vorzahlen oder Koeffizienten als Ziffern geschrieben, die Stufen oder Exponenten von Zehn aber durch die Stelle der Ziffer bezeichnet.

422. **Erklärung.** In der Reihenzahl der Zehnzahlen bezeichnet die Stelle der Ziffer die Stufe oder den Exponenten der Grundzahl, und zwar bezeichnet die Ziffer a auf der Stelle links neben dem Komma $a \cdot 10^0$ oder die Einer. Die auf der m ten Stelle links von den Einern (oder die, welche bis zum Komma m Stellen rechts neben sich hat) ist $a \cdot 10^m$, die auf der m ten Stelle rechts vom Komma ist $a \cdot 10^{-m}$. Die Stellen, wo keine Wertziffer steht, erhalten eine 0. So bezeichnet 0,05 die $5 \cdot 10^{-2}$.

Nach den Stellen teilt man die ganzen Zahlen ein in Einer (erste Stelle, 10^0), in Zehner (zweite Stelle, 10^1), in Hunderte (dritte Stelle, 10^2), in Tausende (vierte Stelle, 10^3), in Zehntausende (fünfte Stelle, 10^4) und in Hunderttausende (sechste Stelle, 10^5).

Ist die Reihenzahl noch grösser, so teilt man die Zahlen in je 6 Stellen und bezeichnet je 6 Stellen durch einen Strich oben. Es heisst dann die siebente Stelle oder 10^6 eine Million, die dreizehnte Stelle oder 10^{12} eine Billion, 10^{18} eine Trillion, 10^{24} eine Quadrillion, 10^{30} eine Quinquillion, 10^{36} eine Sexillion u. f. w.

Nach den Stellen teilt man die Zehntbrüche (Dezimalbrüche), in Zehntel (— erste Stelle, 10^{-1}), in Hundertel (— zweite Stelle, 10^{-2}), in Tausendtel (— dritte Stelle, 10^{-3}), in Milliontel 10^{-6} , in Billiontel 10^{-12} u. f. w.

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre:

Die dehnende Zahlenlehre: Die Richtgröse, die Winkelfolgen und die Winkeltafeln.



11. Die Richtgröse, die Winkelfolge und die Winkeltafeln.

Wir haben durch das Logen und Tiefen bereits eine neue Gröse, die Unzahl oder Irrationalzahl, kennen gelernt, indessen lies sich dieselbe doch noch durch einen Zehntbruch darstellen und gehörte demnach in die Reihe der Zahlen.

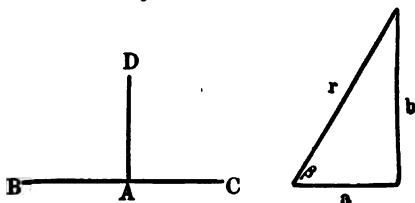
Durch das Tiefen lernen wir aber noch eine andre Art von Grösen kennen, das ist die zweite Tiefe aus -1 , nämlich $(-1)^{1/2}$, welche ganz aus der Reihe der Zahlen heraustritt und eine ganz eigentümliche Bedeutung gewinnt. Bereits 1545 hat Cardano auf diese Gröse aufmerksam gemacht; John Wallis nannte 1673 die Gröse $(-a)^{1/2}$ eine *magnitudo imaginaria* und diesen Namen hat sie behalten, aber erst in diesem Jahrhundert ist die Gröse $(-1)^{1/2}$, namentlich durch Gauss und Cauchy einer eingehenden Betrachtung und wissenschaftlichen Behandlung unterworfen worden. Gauss führte 1801 für diese Gröse das Zeichen i ein, welches jetzt allgemein angenommen ist. Die Gröse $a + ib$ nannte er eine *magnitudo complexa* und wies die Bedeutung dieser Gröse in der Anschauung und im Raume nach; er gelangte dadurch zu den Folgen oder Funktionen der Winkel, welche in der Formenlehre eine so überaus grosse Bedeutung besitzen und deren Kenntniss für jeden Gebildeten unentbehrlich ist.

1. Die Richtgröse.

Erklärung. Das J oder die imaginäre Eins heist die 423. zweite Tiefe aus Stricheins. Die J gröse (die imaginäre Gröse) heist das Zeug oder Produkt aus i und einer Zahl.

Das Zeichen des J ist i , das Zeichen der JgröÙe ist ia , wo a eine beliebige Zahl ist.

Der Name imaginäre GröÙe bezeichnet diese GröÙe als nur dem Scheine nach, nur in der Einbildung bestehend, während diese GröÙe in der Wirklichkeit eine nahe ebenso groÙe Bedeutung hat, wie die Zahl oder die reelle GröÙe. Es kommt nur darauf an, dass man sie gleich von vorne herein in ihrer Bedeutung richtig erkennt, und sie sich anschaulich macht, so dass man sich wirklich bei jeder derselben etwas denkt und vorstellt. Das Eigentümliche bei



der JgröÙe ist nun, dass z. B. in dem Raume, während $+a$ die Linie AB und $-a$ die entgegengesetzte Linie AC bezeichnet, ia oder $(-1)^{1/2}a$ die Mitte zwischen $+a$ und $-a$, d. h. die senkrechte Linie AD auf a bezeichnet. In $a + ib$ bezeichnen also a und b zwei Katheten im rechtwinkligen Dreiecke (und zwar bezeichnet i die senkrechte Lage der Linie b zu a). Die Hypotenuse r ist hier die Linie, für welche $r^2 = a^2 + b^2$ ist; die GröÙe $\frac{a}{r} + i \frac{b}{r}$ bezeichnet, die Verhältnisse $\frac{a}{r}$ und $\frac{b}{r}$, d. h. die der beiden Katheten zur Hypotenuse. Es ist einleuchtend,

dass hier $\frac{a}{r} = \cos \varphi$ und dass $\frac{b}{r} = \sin \varphi$ ist, dass also $\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ist und dass wir also durch Einführung der GröÙe i und der GröÙe $a + ib$ sofort zu den Sätzen über die Winkel und zu den Sätzen über die Funktionen der Winkel, d. h. über den Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Winkels gelangen.

Die ganzen Sätze der Trigonometrie ergeben sich demnach aus dieser dehnenden Zahlenlehre.

424. Satz. $i = (-1)^{1/2} \quad i^2 = -1$

Das J (die imaginäre Eins) ist gleich der zweiten Tiefe aus Strich-eins und das Quader des J ist Stricheins.

425. Satz. $(-a)^{1/2} = i \cdot a^{1/2}$

Die zweite Tiefe einer Strichzahl ist gleich dem Zeuge oder Produkte von i und der zweiten Tiefe der entsprechenden Pluszahl.

Beweis: Es ist $(-a)^{1/2} = ((-1) \cdot a)^{1/2}$ (nach 158)

$= (-1)^{1/2} \cdot a^{1/2}$ (nach 346)

$= i \cdot a^{1/2}$ (nach 424)

426. Erklärung. Die RichtgröÙe oder die komplexe GröÙe heist die Summe einer Zahl und einer JgröÙe $a + ib$. Die Zahl a heist die erste Zahl, die Zahl b die zweite Zahl.

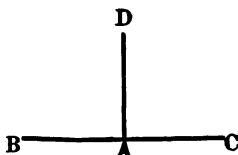
Der Richtwert (der positive Wert der komplexen GröÙe) r heist die zweite Tiefe aus der Summe der Quader der beiden Zahlen der RichtgröÙe, d. h. $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Die Richteinheit (die komplexe Einheit) heist die RichtgröÙe, deren Richtwert eins ist, d. h. wo $(a^2 + b^2)^{1/2} = 1$ ist.

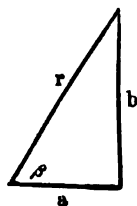
Gleich heißen zwei RichtgröÙen oder komplexe GröÙen $a + ib$ und $\alpha + i\beta$ dann und nur dann, wenn die entsprechenden Zahlen gleich sind, d. h. wenn $a = \alpha$ und zugleich $b = \beta$ ist. Die RichtgröÙen und die Zahlen heißen gemeinfam ZahlengröÙen.

Es ist dringend notwendig, dass man sich sogleich bei dieser Erklärung eine Anschauung verschaffe, was man sich unter der RichtgröÙe zu denken habe, damit die Gedanken eine klare Unterlage haben und man sieht, wohin die Betrachtung führen soll. Die Betrachtung im Raume wird uns diese Anschauung gewähren.

Sei also $AB = 1$, so wird $AC = -1$ sein, es wird also $i = (-1)^{1/2}$ die Mitte zwischen beiden halten müssen, d. h. das Lot AD auf CB und zwar gleicher GröÙe sein müssen.



In der Tat betrachten wir den Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$, so ist $r^2 = a^2 + b^2$. Hier ist also a die Grundseite, b die senkrechte oder die lotrecht auf der Grundseite errichtete Seite, welche mit der Grundseite einen rechten Winkel bildet, r die Hypotenuse oder Spannseite des rechtwinkligen Dreiecks. Das β bezeichnet also im Raume eine Seite, welche nicht in der Linie der Grundseite liegt, welche man also nicht zu ihr zufügen, auch nicht von ihr abziehen kann, welche vielmehr einen bestimmten feststehenden Winkel mit ihr bildet, und man hat in der Mathematik festgestellt, dass dieser Winkel stets ein rechter sein solle, der weder nach der einen, noch nach der andern Seite neige, sondern senkrecht auf der Grundseite aufgerichtet ist.



Hieraus rechtfertigt sich denn auch der Name RichtgröÙe und Richtwert, welchen ich für dieselbe in die Wissenschaft einführe. Der Name *magnitudo complexa*, welchen Gauss in seinem latein geschriebenen Werke dafür hat, und welchen man dann ins Deutsche übernommen hat, bezeichnet eigentlich die umfassende, umschliessende GröÙe, ist demnach wenig passend und ist bereits lange vor Einführung der RichtgröÙe $a + ib$ für Geschiede verwandt. Leibniz hat den Ausdruck *Complexio* zuerst am 7. März 1666 in der *Disputatio arithmetica de complexionibus* (*Opera omnia ed Dutens* III S. 1—10) für die Geschiede der Kombinationslehre verwandt und für diese Geschiede ist der Ausdruck denn auch in Gebrauch geblieben. Es ist unwissenschaftlich und verwirrend, wenn man denselben Ausdruck für so gänzlich verschiedene GröÙen verwenden will. Es empfiehlt sich demnach der Name RichtgröÙe.

Dies vorausgeschickt, so ergibt sich sehr klar aus der Anschauung, dass

man zwei Richtgrößen (komplexe Größen) $a + ib$ und $\alpha + i\beta$ dann und nur dann gleich setzen kann, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$ ist; denn a und b bezeichnen hier die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, der Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$ bezeichnet die Hypotenuse desselben. Alle diese Verhältnisse sind aber nur gleich, wenn die rechtwinkligen Dreiecke deckend oder kongruent sind, d. h. wenn zwei Seiten in den Dreiecken gleich sind.

Dasselbe folgt aber auch ohne Anschauung aus dem Begriffe der Richtgröße; denn in derselben sind a und b ganz unabhängig von einander und kann demnach $a + ib$ nur dann gleich $\alpha + i\beta$ sein, wenn sowohl $a = \alpha$, als auch $b = \beta$ ist.

427. **Satz.** $r^2 = a^2 + b^2$ * wenn $a + ib$ gegeben.
Bei jeder Richtgröße ist die Summe der beiden Quader der Zahlen gleich dem Quader des Richtwertes der Größe.

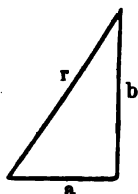
Beweis: Unmittelbar aus 426.

428. **Erklärung.** Die Lotseiten oder die Katheten heißen die beiden Zahlen und zwar heist die erste Zahl die anliegende Lotseite; die Spannseite oder die Hypotenuse heist der Wert der Richtgröße.

Es führt diese Benennung die Richtgrößen dem Verständnisse näher. Cauchy nennt den Richtwert der Richtgröße den module oder Modulus, die Richteinheit nennt er den terme réduit, den reduzierten Ausdruck. Beide Namen sind aber weder bezeichnend, noch schön. Der Richtwert der Richtgröße ist im Kreise der Halbmesser, im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse.

429. **Satz.** Für die Richtgrößen (die komplexen Größen) gelten alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, des Vervielfachens und Teilens oder
die Gesetze der ersten und zweiten Ordnung sind für die Richtgrößen dieselben wie für die Zahlen, sofern man beachtet, dass $ii = -1$ ist.

Beweis. Es ist sowohl i als auch ib eine einwertige Größe, und zwar ist i eine Einheit, ib eine benannte Zahl; ebenso giebt es nur eine Größe, welche zu $a + ib$ gefügt die gleiche Summe giebt, es gilt also auch trennbares Zufügen; ebenso giebt es nur eine Größe, welche mit $a + ib$ vervielfacht oder verwebt das gleiche Zeug giebt, es gilt also auch trennbares Verweben; also gelten auch die Gesetze des Abziehens und des Verteilens.



430. **Satz.** $(a + ib) + (\alpha + i\beta) = (a + \alpha) + i(b + \beta)$
 $(a + ib) - (\alpha + i\beta) = (a - \alpha) + i(b - \beta).$

Statt Richtgrößen (komplexe Größen) zuzufügen oder abzuziehen, kann man ihre entsprechenden Zahlen zufügen oder abziehen.

Beweis: Unmittelbar aus 426.

Beispiele: $(5 + i3) + (8 + i6) = (5 + 8) + i(3 + 6) = 13 + i9$
 $(9 + i6) - (5 + i4) = (9 - 5) + i(6 - 4) = 4 + i2.$

Satz. $(a + ib)(a + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha).$ 431.

Das Zeug oder Produkt zweier Richtgrößen (zweier komplexer Größen) ist gleich einer Richtgröße, deren erste Zahl das Zeug der ersten beiden Zahlen weniger dem Zeuge der zweiten beiden Zahlen ist und deren zweite Zahl die Summe der beiden Zeuge aus der ersten Zahl der einen und der zweiten Zahl der andern Richtgröße ist. Der Richtwert des Zeuges ist das Zeug der Richtwerte der Fache oder Faktoren.

Beweis: $(a + ib)(a + i\beta) = a\alpha + ia\beta + iba + iib\beta$
(nach 180)
 $= (a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha)$
(nach 426)

der Richtwert des Zeuges ist $(a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$
 $= (a\alpha)^2 - 2aab\beta + (b\beta)^2 + (a\beta)^2 + 2aab\beta + (b\alpha)^2$
 $= (a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (a\beta)^2 + (b\alpha)^2$
 $= (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2).$

Beispiele: $(5+i6)(8+i3) = (5 \cdot 8 - 6 \cdot 3) + i(5 \cdot 3 + 6 \cdot 8) = 22 + i \cdot 63$
 $(8+i4)(6+i3) = (8 \cdot 6 - 4 \cdot 3) + i(8 \cdot 3 + 4 \cdot 6) = 36 + i \cdot 48$

Satz. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2.$ 432.

Das Zeug zweier Richtgrößen (zweier komplexer Größen), deren entsprechende Zahlen gleichwertig sind, während die zweiten Zahlen entgegengesetztes Zeichen haben, ist gleich dem Quader des Richtwertes (des positiven Wertes der komplexen Größe).

Beweis: $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 + i(ab-ab)$ (nach 431)
 $= a^2 + b^2 = r^2$ (nach 135 und 427).

Beispiel: $(9+i \cdot 5)(9-i \cdot 5) = 81+25 = 106$
 $(6+i \cdot 7)(6-i \cdot 7) = 36+49 = 85.$

Cauchy und Gauss nennen die Richtgrößen $a + ib$ und $a - ib$ reciproke oder geparte Werte; diese Benennung ist passend und daher beizubehalten.

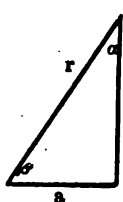
Satz. $\frac{a + ib}{a + i\beta} = \frac{(a + ib)(a - i\beta)}{a^2 + \beta^2}$ 433.

Beweis: Man vervielfache Zähler und Nenner mit $a - i\beta$, so ergibt sich die Formel aus 431.

Satz. $\frac{a + ib}{r} = \frac{a}{r} + i \frac{b}{r}$ ist eine Richteinheit oder 434.

Jede Richtgröße (komplexe Größe), geteilt durch ihren Richtwert ist eine Richteinheit (eine komplexe Einheit).

Beweis: Es ist in der Richtgröse $a + ib$ (nach 426) der Richt-



wert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$, teilt man nun die Richtgröse durch diesen Richtwert, so ist in der neuen Gröse $\frac{a}{r} + i \frac{b}{r}$ der Richtwert $\left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}}{r} = \frac{r}{r} = 1$, also ist die neue Richtgröse eine Richteinheit, deren Richtwert 1 ist, nach 426.

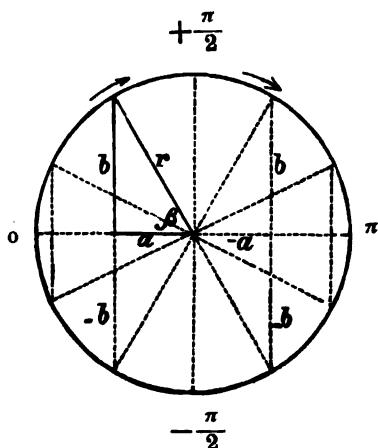
Jeder sieht hier mit dem ersten Blicke auf das nebenstehende rechtwinklige Dreieck, dass hier $\frac{a}{r}$ der Cosinus, $\frac{b}{r}$ der Sinus des Winkels β ist, und dass wir hier unmittelbar in der Richteinheit die Folgen oder Funktionen der Winkel erhalten. Das i vor dem Sinus zeigt dabei an, dass die Kathete des Sinus senkrecht auf der des Cosinus steht.

Die folgende Erklärung ist der einfache Ausdruck dieses Verhältnisses; selbstredend muss, wenn die Erklärung für alle Winkel auch für die mehrfachen Umschwenkung gelten soll, den Verhältnissen des Kreises und der Folgen des Winkels Rechnung getragen werden. Der Halbmesser oder Radius des Kreises ist hierbei stets der Richtwert r .

2. Der Winkel, der Sinus und der Cosinus.

435. Erklärung. Der Winkel der Richteinheit heist der Winkel β zwischen der Grundseite und dem Richtwerte. Derselbe wird gleich

~~Ein~~ gesetzt, wenn sein Kreisbogen dem Richtwerte oder dem Halbmesser des Kreises gleich ist.



Der Kreisumfang ist dann 2π oder $2 \times 3,14159265359$; er wird in 24 Stunden oder in 360 Grade, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden geteilt. Der rechte Winkel ist gleich 90 Grade oder gleich $\frac{1}{2} \pi$.

Der rechte Winkel ist der Winkel innerhalb des einfachen Umkreises oder zwischen $+\pi$ und $-\pi$ oder zwischen $+180^\circ$ und -180° und zwar wird dieser einfache Umkreis in 4 Rechte geteilt. Der erste Plusrechte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, der zweite Plus-

rechte von $\frac{\pi}{2}$ bis π , der erste Strichrechte von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, und der zweite Strichrechte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$.

Die GröÙe des Kreisumfanges oder $2 \times \pi$ ist in der Formenlehre genau berechnet, wir werden diese Berechnung im folgenden Zweige kennen lernen, hier nehmen wir einfach den berechneten Wert auf.

Die GröÙe eines Grades 1° , einer Minute $1'$ und einer Sekunde $1''$ in Teilen des Halbmeassers ist

$$1^\circ = 0,01745329252 \quad 1' = 0,00029088820466 \quad 1'' = 0,0000048481368$$

Es wäre viel richtiger den Kreis in 24 Stunden (h), die aber zehnteilig weiter zu teilen. Es wäre dann $1^h = \frac{1}{12} \pi = 0,261799387799$, und alle folgenden Teile, also $\frac{1}{10^a}$ Stunde = 10^a .

Erklärung. Der Ergänzungswinkel (das complementum) 436.

zum Winkel β heist der Winkel $(90^\circ - \beta)$ oder $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Der Nebenwinkel des Winkels β heist der Winkel $(180^\circ - \beta)$ oder $(\pi - \beta)$.

Die Erklärung ist einfach aus der Raumlehre aufgenommen, um den Sätzen im Folgenden eine bequemere Form geben zu können.

Erklärung. Der Cos oder der Cosinus β heist die erste Zahl 437. der Richteinheit, der Sin oder der Sinus β heist die zweite Zahl der Richteinheit oder der komplexen Einheit.

Die Zeichen cos und sin beziehen sich, wenn keine Klammer steht, stets auf alle folgenden GröÙen deselben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen.

Man bezeichnet den sinus allgemein mit sin, den cosinus mit cos; es empfiehlt sich diese beiden Funktionen im Deutschen daher kurz den Sin und den Cos zu nennen und die lateinische Endung us bez. inus fortzulassen. Jeder kann dann den Sin und den Cos lesen, wie es ihm beliebt.

Die Zeichen sin und cos sind Zeichen von Folgen oder Funktionen. Wie jedes Zeichen einer Folge, beziehen sich auch die Zeichen des sin und des cos stets auf die folgenden GröÙen und zwar, wenn keine Klammer steht, stets auf alle dem Zeichen folgenden GröÙen deselben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen. Es folgt diese Regel aus dem allgemeinen Gesetze für alle Formelzeichen, welche sich auf die folgenden GröÙen beziehen.

Es ist demnach $\sin 2\pi = \sin (2\pi)$, $\sin (2n + 1) \pi = \sin [(2n + 1)\pi]$, dagegen ist $\sin a + b = (\sin a) + b$ also verschieden von $\sin (a + b)$. Eine besondere Aufmerksamkeit erfordern die Ausdrücke $\sin^2 x$, $\sin^2 x$ und $(\sin x)^2$, zumal hier die Deutschen eine fehlerhafte Schreibweise beobachten. Zunächst ist $\sin x^2 = \sin (x^2)$, hierüber kann ein Zweifel nicht obwalten. Dagegen wird das Zeichen $\sin^2 x$ von den Deutschen fehlerhaft so gebraucht, dass sie $\sin^2 x = (\sin x)^2$

setzen, während die Franzosen $\sin^2 x = \sin \cdot \sin x = \sin(\sin x)$ setzen. Hier haben die Franzosen offenbar die richtige Bezeichnung gewählt, denn \sin^2 kann keinen andern Sinn haben als $\sin \cdot \sin$, während es ganz fehlerhaft ist bei $\sin^2 x$, das Stufenzeichen auf den ganzen Ausdruck beziehen zu wollen. Beispielsweise kann $a^2 b$ nie gleich $(ab)^2$ gesetzt werden, also auch nicht $\sin^2 x = (\sin x)^2$. Die deutsche Schreibweise muss demnach aufgegeben, die französische aber eingeführt werden. Auch $\log^2 x$ ist dann gleich $\log \log x = \log(\log x)$.

Zu bemerken ist noch, dass man $(\sin x)^2$ am besten liest „ $\sin x$ ganz hoch 2“, wo das ganz bezeichnet, dass der ganze Ausdruck hoch 2 genommen werden soll.

$$438. \quad \text{Satz.} \quad \cos \beta = \frac{a}{r}; \quad \sin \beta = \frac{b}{r}; \quad \frac{a}{r} + i \frac{b}{r} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

Der Cos des Winkels der Richteinheit ist die erste Zahl, der Sin des Winkels der Richteinheit ist die zweite Zahl der Richteinheit oder der komplexen Einheit.

Beweis: Unmittelbar aus 437.

$$439. \quad \text{Satz.} \quad (\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta) = 1$$

$$\cos \beta - i \sin \beta = \frac{1}{\cos \beta + i \sin \beta}.$$

Das Zeug zweier Richteinheiten (komplexer Einheiten), deren Cosinus gleich, deren Sinus entgegengesetzt sind, ist eins.

Beweis, Unmittelbar aus 432.

$$440. \quad \text{Satz.} \quad a + ib = r(\cos \beta + i \sin \beta) \quad \text{wo } r = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Jede Richtgröße (komplexe Größe) ist gleich dem Richtwerte mal der Richteinheit, wo $\cos \beta$ die erste Zahl und $\sin \beta$ die zweite Zahl ist.

$$\text{Beweis:} \quad \text{Es ist } a + ib = \frac{r}{r}(a + ib) \quad (\text{nach 167})$$

$$= r \left(\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right) \quad (\text{nach 180})$$

$$= r(\cos \beta + i \sin \beta) \quad (\text{nach 437}).$$

$$441. \quad \text{Satz.} \quad (\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2 = 1; \quad \cos \beta = (1 - (\sin \beta)^2)^{1/2};$$

$$\sin \beta = (1 - (\cos \beta)^2)^{1/2}$$

Die Summe der beiden Quader des Cos und des Sin eines Winkels ist Eins.

Beweis: Unmittelbar aus 434.

$$442. \quad \text{Satz.} \quad \cos \beta = \text{Mitt. } [-1, +1] \quad \sin \beta = \text{Mitt. } [-1, +1]$$

Die Größe des Cos und des Sin aller Winkel ist ein Mittel zwischen Strieheins und Pluseins, diese Größe eingeschlossen.

$$\text{Beweis:} \quad \text{Nach 438 ist } \cos \beta = \frac{a}{r}, \quad \sin \beta = \frac{b}{r} \quad \text{und nach 427}$$

ist $r^2 = a^2 + b^2$, also ist $r^2 - b^2 = a^2$ und hier ist b entweder gleich Null oder ungleich Null.

Wenn $b = 0$ ist, so ist $r^2 = a^2$, also $\cos \beta = \frac{a}{r} = +1$, wenn beide Zahlen gleiche, dagegen $= -1$, wenn beide entgegengesetzte Vorzeichen haben.

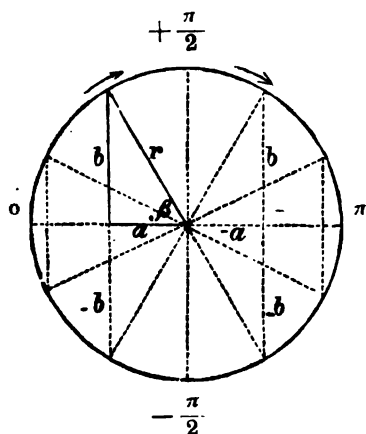
Wenn $b \geq 0$ ist, so ist $r^2 > a^2$ nach 142. Hier ist r eine PlusgröÙe. Sei nun auch a eine PlusgröÙe, so ist nach 377 auch $r > a$, mithin ist $\frac{a}{r}$ nach 205 eine echte Bruchzahl, d. h. $\frac{a}{r}$ nach 206 kleiner als Eins oder ein Mittel zwischen 0 und $+1$.

Sei a eine StrichgröÙe, so ist der Zahlenwert von $\frac{a}{r}$ eine echte Bruchzahl kleiner als Eins, also die GröÙe $\frac{a}{r}$ selbst ein Mittel zwischen 0 und -1 . Was also auch $\frac{a}{r}$ für ein Vorzeichen habe, so ist stets $\cos \beta = \frac{a}{r}$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Ganz ebenso folgt, dass $\sin \beta = \frac{b}{r}$ stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ ist.

Der Satz folgt sehr leicht aus der Anschauung im Kreife. Jede Sehne im Kreife ist kleiner als der Durchmesser oder gleich dem Durchmesser; die auf dem Durchmesser senkrechte halbe Sehne ist ebenso kleiner bis gleich mit dem Halbmesser. Ebenso folgt der Satz leicht aus dem rechtwinkligen Dreiecke, jede Kathete ist kleiner als die Hypotenuse.

Um die Werte von $\cos \beta$ und $\sin \beta$ zu bestimmen, müssen noch die Festsetzungen getroffen werden, wann eine dieser Formeln etwa der Sin den Wert gleich Null haben soll. Wie jeder leicht aus der Anschauung im Kreife, d. h. hier aus der nebenstehenden Zeichnung erfieht, ist für die Winkel 0 und π der Sin gleich Null. Da der einfache Umkreis 2π beträgt, so hat der Winkel $2\pi + \beta$ wieder denselben Wert wie β und sind auch der Sin und der Cos wieder dieselben.

Ebenso muss festgesetzt werden, welches Vorzeichen der Sin und der Cos haben sollen. Wie eine leichte Betrachtung der nebenstehenden Zeichnung zeigt, hat der Sin in den Plusrechten Pluszeichen, in den Strichrechten Strich-



zeichen; dagegen hat der Cos in den beiden ersten Rechten (dem ersten Plusrechten und dem ersten Strichrechten) Pluszeichen, in den beiden zweiten Rechten Strichzeichen. Hieraus ergibt sich, dass wir für den entgegengesetzten Winkel den Sin entgegengesetzt, den Cos dagegen gleich setzen müssen und dass wir für den Nebenwinkel den Sin gleich, den Cos aber entgegengesetzt setzen müssen, wenn wir mit den Gesetzen der Winkelfunktionen oder Winkelfolgen übereinstimmen wollen. Hiernach ergibt sich folgende Erklärung.

443. **Erklärung.** Wenn n eine ganze Zahl ist, so setzen wir den Sin oder den Sinus des Winkels $n\pi$ gleich Null.

Der Sin und der Cos haben im ersten Plusrechten einen Pluswert.

Der Sin des entgegengesetzten Winkels ist der entgegengesetzte Wert; die Cose der entgegengesetzten Winkel sind gleich.

Die Sine der Nebenwinkel sind gleich; der Cos des Nebenwinkels ist der entgegengesetzte Wert.

444. **Satz.** $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ $\cos(-\beta) = \cos\beta$

Der Sin des entgegengesetzten Winkels hat den entgegengesetzten Wert. Die Cose entgegengesetzter Winkel sind gleich.

Beweis: Unmittelbar aus 443.

445. **Satz.** $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$ $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$.

Die Sine der Nebenwinkel sind einander gleich. Der Cos des Nebenwinkels hat den entgegengesetzten Wert.

Beweis: Unmittelbar aus 443.

446. **Satz.** Der Sin hat einen Pluswert in den beiden Plusrechten, einen Strichwert in den beiden Strichrechten.

Der Cos hat einen Pluswert in den ersten beiden Rechten (dem ersten Plusrechten und dem ersten Strichrechten), einen Strichwert in den zweiten beiden Rechten.

Beweis: Der Sin hat nach 443 einen Pluswert im ersten Plusrechten und da die Nebenwinkel nach 445 gleichen Sin haben, auch im zweiten Plusrechten, d. h. in den beiden Plusrechten. Dagegen hat der Sin einen Strichwert in den beiden Strichrechten, da entgegengesetzte Winkel nach 444 entgegengesetzten Sin haben.

Der Cos hat nach 443 einen Pluswert im ersten Plusrechten und da die entgegengesetzten Winkel nach 444 gleichen Cos haben, auch im ersten Strichrechten, mithin in den ersten beiden Rechten. Dagegen hat der Cos einen Strichwert in den zweiten beiden Rechten, da nach 445 Nebenwinkel entgegengesetzten Cos haben.

447. **Satz.** $\cos(-\beta) + i\sin(-\beta) = \cos\beta - i\sin\beta = \frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$

Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) entgegengesetzter Winkel haben den umgekehrten Wert.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } \cos(-\beta) + i \sin(-\beta) &= \cos \beta - i \sin \beta \quad (\text{nach 444}) \\ &= \frac{1}{\cos \beta - i \sin \beta} \quad (\text{nach 439}).\end{aligned}$$

Satz.

448.

$$\cos(180^\circ - \beta) + i \sin(180^\circ - \beta) = -\cos \beta + i \sin \beta = -\frac{1}{\cos \beta + i \sin \beta}$$

$$\cos(180^\circ + \beta) + i \sin(180^\circ + \beta) = -\cos \beta - i \sin \beta = -(\cos \beta + i \sin \beta)$$

Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) der Nebenwinkel haben den entgegengesetzten und zugleich den umgekehrten Wert.

Satz. $\sin n\pi = 0$; $\cos 2n\pi = 1$; $\cos (2n+1)\pi = -1$ 449.
wo n eine ganze Zahl.

Der Sinus des Winkels von $n\pi$ ist Null, der Cosinus des Winkels von $2n\pi$ ist $+1$, der von $(2n+1)\pi$ ist -1 , sofern n eine ganze Zahl ist.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus 442, danach ist $\sin n\pi = 0$. Nun ist aber nach 441 auch $(\cos n\pi)^2 + (\sin n\pi)^2 = 1$, mithin, da $\sin n\pi = 0$, so ist $(\cos n\pi)^2 = 1$, also $\cos n\pi = \pm 1$ nach 157. Nun haben wir in 446 bewiesen, dass der Cos in den ersten beiden Rechten (im ersten Plusrechten und im ersten Strichrechten) eine Pluszahl, in den zweiten beiden Rechten eine Strichzahl ist; demnach ist $\cos 2n\pi = +1$ und $\cos (2n+1)\pi = -1$.

Satz. Wenn zwei Richtgrößen (zwei komplexe Größen) gleich 450.
sind, so sind auch ihre Richtwerte und ihre echten Winkel gleich und dürfen sich die unechten Winkel nur um $2n\pi$ Winkelraum unterscheiden, wo n eine ganze Zahl. Oder Annahme

$$a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = b(\cos \beta + i \sin \beta), \text{ wo } a \text{ und } b \geq 0,$$

$$\alpha \text{ und } \beta = \text{Mitt. } [+ \pi, - \pi] \quad \text{Folgerung } a = b, \alpha = \beta$$

Beweis: 1. Da die Richtgrößen gleich sind, so sind nach 426 auch ihre entsprechenden Zahlen gleich, also auch die Pluswerte, d. h. nach 427 auch $a = b$.

2. Die Gleichung der Annahme wird demnach

$$a(\cos \alpha + i \sin \alpha) = a(\cos \beta + i \sin \beta), \text{ mithin da } a \geq 0 \text{ ist auch}$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos \beta + i \sin \beta, \text{ also nach 426 } b \text{ auch}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \text{ und } \sin \alpha = \sin \beta.$$

Wenn nun die Winkel α und β echt sind, d. h. zwischen π und $-\pi$ liegen, und die Cosinus gleich sind, so müssen die Winkel entweder gleich oder einander entgegengesetzt sein. Letzteres ist, wenn die Winkel nicht gleich 0 oder

π sind, nicht möglich, da entgegengesetzte Winkel entgegengesetzten Sinus haben, und also dann $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ einander entgegengesetzt sein würden, was gegen die Annahme ist; also ist nur das erstere möglich, d. h. $\alpha = \beta$.

Wenn aber einer der Winkel, z. B. α gleich 0 oder π ist, so ist sein Cosinus im ersteren Falle 1, im letzteren -1 , also auch $\cos \beta$ im ersteren Falle $+1$, im letzteren -1 , also auch β im ersteren Falle null, im letzteren π . Also auch in diesen Fällen $\alpha = \beta$. — Wenn α und β auch unechte Winkel sein dürfen, so können sie sich, da sowohl ihr Sinus als ihre Cosinus gleich sind, nur um eine ganze Anzahl von Winkelräumen, d. h. um $2n\pi$ unterscheiden.

451. **Satz.** $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$.
Statt zwei Richteinheiten (komplexe Einheiten) mit einander zu vervielfachen, kann man ihre Winkel zufügen. Das Zeug oder Produkt ist wieder eine Richteinheit.

Beweis: Nach 431 ist das Zeug oder Produkt der Richteinheiten

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$$

$$= [(\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta] + i [(\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta].$$

Und hier ist nach 431 der Richtwert des Zeuges das Zeug der Richtwerte der Fache oder Faktoren. Da nun die Fache Richteinheiten sind, so ist der Richtwert jedes Faches nach 426 gleich Eins, also der Richtwert des Zeuges gleich $1 \cdot 1 = 1$ nach 97, mithin das Zeug oder Produkt eine Richteinheit, also von der Form $\cos \gamma + i \sin \gamma$, wo γ eine Folge von α und β also $\gamma = \alpha \circ \beta$, wo noch die Bedeutung der Knüpfung zu bestimmen bleibt. Es ist also

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha \circ \beta) + i \sin(\alpha \circ \beta)$$

und zwar sind nach 426 die ersten Zahlen gleich und ebenso die zweiten, also:

$$\cos(\alpha \circ \beta) = (\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \circ \beta) = (\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta.$$

Um nun die Bedeutung der Knüpfung zu bestimmen, setzen wir erstens $\alpha = 0$; dann ist nach 449 $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, also

$$\cos(0 \circ \beta) = \cos \beta \qquad \sin(0 \circ \beta) = \sin \beta.$$

Wir setzen zweitens $\beta = 0$; dann ist $\sin \beta = 0$, $\cos \beta = 1$, also

$$\cos(\alpha \circ 0) = \cos \alpha \qquad \sin(\alpha \circ 0) = \sin \alpha.$$

Die Knüpfung $\alpha \circ \beta$ ist also die Knüpfung, für welche Null die nicht ändernde Gröse ist, d. h. die Knüpfung ist die Zufügung oder Addition nach 71. Es ist demnach

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Man hätte den Satz auch leicht aus den Formeln der Trigonometrie für den Cos und den Sin der Summe der Winkel ableiten können; aber unser Weg ist einfacher und kürzer und daher vorzuziehen, zumal dabei keine Hilfsätze aus andern Wissenschaften vorausgesetzt werden.

Für diejenigen, welchen die Sätze der Trigonometrie geläufiger sind, lasse ich hier noch die Ableitung aus der Trigonometrie folgen: Es ist nach der Trigonometrie

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= (\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta; \text{ mithin ist} \\ \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= \\ &= [(\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta] + i [(\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta] \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta).\end{aligned}$$

Will man den echten Winkel des Zuges (Produktes) finden, so muss man falls nicht schon die Summe der Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, so oft 2π hinzufügen oder abziehen, bis der Rest jener Bedingung genügt. Das Zufügen oder das Abziehen von $2\pi = 360^\circ$ ändert bekanntlich in dem Werte der Sinus und Cosinus nichts, also auch nichts in dem Werte der Richtgröße.

$$\begin{aligned}\text{Satz. } \cos(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= (\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta.\end{aligned}\quad 452.$$

Der Cos der Summe zweier Winkel ist gleich dem Zeuge der Cose weniger dem Zeuge der Sine.

Der Sin der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe der beiden Zeuge aus dem Sin des einen und dem Cos des andern Winkels

Beweis: Nach 451 ist

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= [(\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta] + i [(\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta].\end{aligned}$$

Nach 426 müssen hier die ersten Zahlen einander gleich und ebenso die zweiten Zahlen einander gleich sein; also ist

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= (\sin \alpha) \cos \beta + (\cos \alpha) \sin \beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Satz. } \cos(\alpha - \beta) &= (\cos \alpha) \cos \beta + (\sin \alpha) \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha) \cos \beta - (\cos \alpha) \sin \beta.\end{aligned}\quad 453.$$

Der Cos des Unterschieds zweier Winkel ist gleich der Summe von dem Zeuge der Cos und dem Zeuge der Sin.

Der Sin des Unterschieds zweier Winkel ist gleich dem Zeuge aus dem Sin des ersten mit dem Cos des zweiten Winkels weniger dem Zeuge aus dem Cos des ersten mit dem Sin des zweiten Winkels.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: Man setze in den Formeln des Satzes } 452 + \beta &= -\gamma \\ \text{und setze nach 444 } \sin(-\gamma) &= -\sin \gamma \quad \cos(-\gamma) = \cos \gamma, \text{ so folgt} \\ \cos(\alpha - \gamma) &= (\cos \alpha) \cdot \cos(-\gamma) - (\sin \alpha) \cdot \sin(-\gamma) \quad (\text{nach 533}) \\ &= (\cos \alpha) \cdot \cos \gamma + (\sin \alpha) \sin \gamma \quad (\text{nach 525}) \\ \sin(-\gamma) &= (\sin \alpha) \cdot \cos(-\gamma) + (\cos \alpha) \sin(-\gamma) \quad (\text{nach 533}) \\ &= (\sin \alpha) \cdot \cos \gamma - (\cos \alpha) \sin \gamma \quad (\text{nach 525}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Satz. } \sin 2\alpha &= 2(\sin \alpha) \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = 1 - 2(\sin \alpha)^2 = 2(\cos \alpha)^2 - 1.\end{aligned}\quad 454.$$

Der Sin des doppelten Winkels ist gleich dem doppelten Zeuge aus dem Sin und Cos des einfachen Winkels.

Der Cos des doppelten Winkels ist gleich dem doppelten Quader vom Cos des einfachen Winkels weniger Eins.

Beweis: Die ersten beiden Formeln folgen unmittelbar aus 452, wenn man α statt β setzt. Die letzten beiden Formeln folgen aus der zweiten Formel, wenn man nach 442 $(\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2$, bez. $(\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$ einführt.

455. Satz. Der Sin und der Cos des halben Winkels

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)^{1/2} ; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^{1/2}$$

Beweis: Unmittelbar aus 454. Es ist

$$\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin \alpha)^2 = 2(\cos \alpha)^2 - 1;$$

wenn man $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ setzt, dann ist

$$\cos \gamma = 1 - 2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 ; \text{ also } \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 = \frac{1 - \cos \gamma}{2} \text{ und}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \pm \left(\frac{1 - \cos \gamma}{2} \right)^{1/2} \text{ und ebenso folgt}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \pm \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^{1/2}.$$

456. Satz. $\cos(n + \frac{1}{2})\pi = 0$; $\sin(2n + \frac{1}{2})\pi = 1$;
 $\sin(2n - \frac{1}{2})\pi = -1$

wo n eine ganze Zahl.

Der Cos des Winkels von $(n + \frac{1}{2})\pi$ ist Null, der Sin des Winkels von $(2n + \frac{1}{2})\pi$ ist $+1$, der von $(2n - \frac{1}{2})\pi$ ist -1 , sofern n eine ganze Zahl ist.

$$\text{Beweis: Nach 455 ist } \cos \frac{\pi}{2} = \pm \left(\frac{1 + \cos \pi}{2} \right)^{1/2}$$

$$= \pm \left(\frac{1 - 1}{2} \right)^{1/2} = 0 \quad (\text{nach 449}).$$

$$\text{Ebenso ist } \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (\text{nach 444}).$$

$$\text{Nach 536 ist } \sin \frac{\pi}{2} = \pm \left(\frac{1 - \cos \pi}{2} \right)^{1/2} = \pm \left(\frac{1 + 1}{2} \right)^{1/2} = \pm 1$$

(nach 449).

Aber nach 527 hat der $\sin \frac{\pi}{2}$ einen Pluswert, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = +1$

dagegen ist $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ (nach 450).

Die Vergrößerung der Winkel um $2n\pi$ ändert nach 450 die Sin und Cos nicht; mithin gilt der Satz ganz allgemein.

$$\text{Satz.} \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \sin 90^\circ = 1. \quad 457.$$

Der Cos 90° ist Null, der Sin 90° ist Eins.

Beweis: Unmittelbar aus 456.

$$\text{Satz.} \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2)^{1/2}. \quad 458.$$

Der Cos 45° und der Sin 45° sind einander gleich und zwar ein jeder gleich der Hälfte von zwei in der ein halbtten.

Beweis: Unmittelbar nach 455, wenn man $\alpha = 90^\circ$ setzt und beachtet, dass $\cos 90^\circ = 0$ nach 457 ist.

Satz. Der Cos x wächst von -1 bis $+1$ für den Winkel x von $(2n-1)\pi$ bis $2n\pi$ und er nimmt ab von $+1$ bis -1 für den Winkel x von $2n\pi$ bis $(2n+1)\pi$. 459.

Der Sin x wächst von -1 bis $+1$ für den Winkel x von $(2n-\frac{1}{2})\pi$ bis $(2n+\frac{1}{2})\pi$ und er nimmt ab von $+1$ bis -1 für den Winkel x von $(2n+\frac{1}{2})\pi$ bis $(2n+1\frac{1}{2})\pi$.

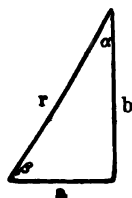
Beweis: Nach 442 sind $\cos x$ und $\sin x$ in den Grenzen zwischen -1 und $+1$; ihr kleinster Wert ist also -1 , ihr größter ist $+1$. Nach 449 ist $\cos(2n+1)\pi = -1$ der kleinste, $\cos 2n\pi = +1$ der größte Wert des Cos. Nach 457 ist $\sin(2n-\frac{1}{2})\pi = -1$ der kleinste, $\sin(2n+\frac{1}{2})\pi = +1$ der größte Wert des Sin. Hieraus wie aus 452 bez. 453 ergibt sich der Satz.

$$\text{Satz.} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad 460.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Der Sin eines Winkels ist gleich dem Cos seines Ergänzungswinkels und der Cos eines Winkels ist gleich dem Sin seines Ergänzungswinkels.

$$\begin{aligned} \text{Beweis:} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \cos \alpha + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(nach 453)} \\ \text{(nach 456)} \end{array}$$



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \alpha - \left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha \\ &= \cos \alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(nach 453)} \\ \text{(nach 456).} \end{array}$$

Der Satz ist an der nebenstehenden Zeichnung im rechtwinkligen Dreiecke ungemein anschaulich.

461. **Satz.** $\cos \alpha + i \sin \alpha = \sin (90^\circ - \alpha) + i \cos (90^\circ - \alpha)$.

Die Richteinheiten (die komplexen Einheiten) der Ergänzungswinkel, vertauschen die erste Zahl mit der zweiten Zahl.

462. **Satz.** $\cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \dots (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n)$.

Statt mehrere Richteinheiten (komplexe Einheiten) mit einander zu vervielfachen, kann man ihre Winkel zufügen. Das Zeug oder Produkt ist wieder eine Richteinheit.

Beweis: Angenommen der Satz gelte für α_m , also Annahme

$$(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \dots (\cos \alpha_m + i \sin \alpha_m)$$

$$= \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$$

so soll bewiesen werden, dass er auch für α_{m+1} gelte. Man setze $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = \beta$, so ist nach 451

$$(\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \alpha_{m+1} + i \sin \alpha_{m+1}) = \cos (\beta + \alpha_{m+1}) + i \sin (\beta + \alpha_{m+1}).$$

Führt man nun statt $\cos \beta + i \sin \beta$ auf der linken Seite den Wert nach der Annahme, auf der rechten Seite für β den Wert $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ ein, so folgt der zu beweisende Satz für α_{m+1} unmittelbar. Nun gilt der Satz für $m=2$, mithin auch für jede folgende Zahl, also auch fortschreitend für $m=n$.

Auch hier muss bemerkt werden, dass, wenn man den echten Winkel des Zeuges (Produktes) finden will, dass man dann, falls nicht schon die Summe der Winkel zwischen π und $-\pi$ liegt, so oft 2π hinzufügen oder abziehen muss, bis der Rest jener Bedingung genügt. Das Zufügen oder das Abziehen von $2\pi = 360^\circ$ ändert bekanntlich in dem Werte der Sinus und Cosinus Nichts, also auch Nichts in dem Werte der Richtgröße.

463. **Satz.** $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ wo n eine ganze Zahl. Statt eine Richteinheit (komplexe Einheit) zu einer ganzen Zahl zu erhöhen (zu potenzieren) kann man ihren Winkel mit dieser Zahl vervielfachen.

Beweis: 1. Für $n=0$ folgt der Satz einerseits aus 319, dass $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^0 = 1$ und andererseits aus 449, dass $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$, also $\cos 0\alpha + i \sin 0\alpha = 1$.

2. Für n gleich einer Pluszahl folgt der Satz aus 462.

3. Für n gleich einer Strichzahl setze $n = -m$, so ist $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = \cos (-m\alpha) + i \sin (-m\alpha) = \cos m\alpha - i \sin m\alpha$ (nach 444)

$$= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^m \quad (\text{nach } 463_2)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \right)^m \quad (\text{nach } 440)$$

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-m} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \quad (\text{nach } 332).$$

$$\text{Satz. } \cos nx = (\cos x)^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 \quad 464.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos x)^{n-4} (\sin x)^4 - \dots$$

$$= S (-1)^a n^{2a} (\cos x)^{n-2a} (\sin x)^{2a}$$

$$\sin nx = n (\cos x)^{n-1} \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\cos x)^{n-3} (\sin x)^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\cos x)^{n-5} (\sin x)^5 - \dots$$

$$= S (-1)^a n^{2a+1} (\cos x)^{n-(2a+1)} (\sin x)^{2a+1}$$

$$\text{wo } n \text{ eine ganze Zahl und } n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}.$$

$$\text{Beweis: } \cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n \quad (\text{nach } 463)$$

$$= (\cos x)^n + i \cdot n (\cos x)^{n-1} \sin x - n \cdot 2 (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2$$

$$- i n^2 (\cos x)^{n-3} (\sin x)^3 + \dots \quad (\text{nach } 393)$$

$$= (\cos x)^n - n \cdot 2 (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 + n \cdot 4 (\cos x)^{n-4} (\sin x)^4 - \dots$$

$$+ i [n (\cos x)^{n-1} \sin x - n \cdot 3 (\cos x)^{n-3} (\sin x)^3 + n \cdot 5 (\cos x)^{n-5} (\sin x)^5 - \dots]$$

Da nun nach 426 in den beiden Richtheiten die ersten Zahlen einander gleich sein müssen und ebenso auch die zweiten Zahlen einander gleich sein müssen, so folgt

$$\cos nx = (\cos x)^n - n \cdot 2 (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 + n \cdot 4 (\cos x)^{n-4} (\sin x)^4 - \dots$$

$$\sin nx = n (\cos x)^{n-1} \sin x - n \cdot 3 (\cos x)^{n-3} (\sin x)^3$$

$$+ n \cdot 5 (\cos x)^{n-5} (\sin x)^5 - \dots$$

$$\text{Beispiele: } \sin 2x = 2 (\cos x) \sin x$$

$$\sin 3x = 3 (\cos x)^2 \sin x - (\sin x)^3 = 3 \sin x - 4 (\sin x)^3.$$

Satz. $[a (\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = a^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, wo n eine ganze Zahl. 465.

Statt eine RichtgröÙe (komplexe GröÙe) zu einer ganzen Zahl zu erhöhen (zu potenzieren) kann man ihren Richtwert zu dieser Zahl erhöhen und ihren Winkel mit dieser Zahl vervielfachen.

$$\text{Beweis: } [a (\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = a^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \quad (\text{nach } 326)$$

$$= a^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \quad (\text{nach } 463).$$

3. Die Tangente, die Cotangente und die Winkeltafeln.

Erklärung. Die Tan oder die Tangente eines Winkels 466. heist der Sin geteilt durch den Cos des Winkels. Die Cot oder die

Cotange eines Winkels heist der Cos geteilt durch den Sin des Winkels.

Die Zeichen \tan und \cot sind Folgen oder Funktionszeichen, sie beziehen sich daher, wenn keine Klammer steht, stets auf alle folgenden Größen deselben Gliedes bis zum nächsten Plus- oder Strichzeichen.

Auch hier gilt die Bemerkung zu 437.

$$467. \quad \text{Satz.} \quad \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}; \quad \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}; \quad \cot \beta = \frac{1}{\tan \beta} \quad \text{auch}$$

$$1 + (\tan \beta)^2 = \frac{1}{(\cos \beta)^2}$$

$$1 = (\cot \beta)^2 = \frac{1}{(\sin \beta)^2}$$

Die Tan eines Winkels ist gleich dem Sin geteilt durch den Cos des Winkels; die Cot eines Winkels ist gleich dem Cos geteilt durch den Sin des Winkels. Die Cot ist der umgekehrte Wert der Tan.

Beweis: Unmittelbar aus 466.

$$\text{Ferner ist } 1 + (\tan \beta)^2 = 1 + \frac{(\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} = \frac{(\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} = \frac{1}{(\cos \beta)^2}$$

$$\text{Und ebenso ist } 1 + (\cot \beta)^2 = \frac{1}{(\sin \beta)^2}$$

$$468. \quad \text{Satz.} \quad \tan(-\beta) = \tan(180^\circ - \beta) = -\tan \beta$$

$$\cot(-\beta) = \cot(180^\circ - \beta) = -\cot \beta.$$

Die Tan und die Cot des entgegengesetzten Winkels und ebenso die Tan und die Cot des Nebenwinkels haben den entgegengesetzten Wert.

Beweis: Unmittelbar aus 444 und 445.

$$469. \quad \text{Satz.} \quad \text{Die Tan und die Cot haben einen Pluswert im ersten Plusrechten und im zweiten Strichrechten, dagegen einen Strichwert im zweiten Plusrechten und im ersten Strichrechten.}$$

Beweis: Unmittelbar aus 446.

$$470. \quad \text{Satz.} \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - (\tan \alpha) \tan \beta}; \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + (\tan \alpha) \tan \beta}$$

Die Tan der Summe zweier Winkel ist gleich der Summe der Tane beider Winkel geteilt durch den Unterschied von 1 weniger dem Zeuge der beiden Tane. Die Tan des Unterschieds zweier Winkel ist gleich dem Unterschiede der beiden Tane geteilt durch die Summe von 1 und dem Zeuge der beiden Tane.

Beweis: Man teile Zähler und Nenner durch $(\cos \alpha) \cos \beta$ dann wird $\tan(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha \pm \beta) : \cos(\alpha \pm \beta)$ (nach 467)

$$\begin{aligned}
 &= [(\sin \alpha) \cos \beta \pm (\cos \alpha) \cdot \sin \beta] : [(\cos \alpha) \cos \beta \mp (\sin \alpha) \sin \beta] \\
 &\quad \text{(nach 452, 453)} \\
 &= \left[\frac{(\sin \alpha) \cos \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta} \pm \frac{(\cos \alpha) \sin \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta} \right] : \left[\frac{(\cos \alpha) \cos \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta} \mp \frac{(\sin \alpha) \sin \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta} \right] \\
 &\quad \text{(nach 167)} \\
 &= [\tan \alpha \pm \tan \beta] : [1 \mp (\tan \alpha) \tan \beta] \quad \text{(nach 167)}
 \end{aligned}$$

Satz. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$ 471.

Die Tan des doppelten Winkels ist gleich der doppelten Tan des einfachen Winkels geteilt durch den Unterschied von 1 weniger dem Quader der Tan.

Beweis: Unmittelbar aus 470.

Satz. Die Tan des halben Winkels $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 472.

Beweis: $\left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ (nach 455)

Dies nach 182 mit $1 + \cos \alpha$ erweitert giebt

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - (\cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{(\sin \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)^2} \quad \text{(nach 441)}$$

Dagegen nach 182 mit $1 - \cos \alpha$ erweitert giebt

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - (\cos \alpha)^2} = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha)^2} \quad \text{(nach 441)}.$$

Satz. 473.

$$\tan n\pi = 0 = \cot(n + \frac{1}{2})\pi ; \tan(n + \frac{1}{2})\pi = \infty = \cot n\pi$$

Die Tan des Winkels $n\pi$ und die Cot des Winkels $(n + \frac{1}{2})\pi$ sind Null; dagegen sind die Tan des Winkels $(n + \frac{1}{2})\pi$ und die Cot des Winkels $n\pi$ unendlich.

Beweis: Unmittelbar aus 449 und 456.

Satz. Die Tan wächst in allen Winkelräumen von $-\infty$ bis 474.

$+\infty$ und zwar für den Winkel von $(\pi - \frac{1}{2})\pi$ bis $(n + \frac{1}{2})\pi$.

Die Cot nimmt in allen Winkelräumen ab und zwar von $+\infty$ bis $-\infty$ und zwar für den Winkel von $n\pi$ bis $(n + 1)\pi$.

Beweis: Das Vorzeichen der Tan und Cot ergibt sich aus 469, die Winkel, wo die Tan und Cot unendlich sind aus 473; daraus folgt der ganze Satz.

475. Satz. $\cot(90^\circ - \alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$$

Die Tan eines Winkels ist gleich der Cot seines Ergänzungswinkels und die Cot eines Winkels ist gleich der Tan seines Ergänzungswinkels.

Beweis: Unmittelbar aus 460.

Zum Schluss der Lehre von den Winkelfolgen lasse ich noch eine Uebersicht über das Wachsen und die Vorzeichen dieser Winkelfolgen in den verschiedenen Winkelräumen folgen.

Uebersicht des Wachsens und der Vorzeichen der Winkelfolgen.

476. Satz. Es wachsen

für x von $(2n - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2n + \frac{1}{2})\pi$ die $\sin x$ von -1 bis $+1$

für x von $(2n - 1)\pi$ bis $2n\pi$ die $\cos x$ von -1 bis $+1$

für x von $(n - \frac{1}{2})\pi$ bis $(n + \frac{1}{2})\pi$ die $\tan x$ von $-\infty$ bis $+\infty$

Es nehmen ab

für x von $(2n + \frac{1}{2})\pi$ bis $(2n + 1\frac{1}{2})\pi$ die $\sin x$ von $+1$ bis -1

für x von $2n\pi$ bis $(2n + 1)\pi$ die $\cos x$ von $+1$ bis -1

für x von $(n - \frac{1}{2})\pi$ bis $(n + \frac{1}{2})\pi$ die $\cot x$ von $+\infty$ bis $-\infty$.

Es sind allgemein

$$\sin(n\pi + (-1)^n x) = \sin x$$

$$\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$$

$$\tan(n\pi + x) = \tan x$$

$$\cot(n\pi + x) = \cot x$$

$$\sin(n\pi - (-1)^n x) = -\sin x$$

$$\cos((2n + 1)\pi \pm x) = -\cos x$$

$$\tan(n\pi - x) = -\tan x$$

$$\cot(n\pi - x) = -\cot x.$$

Beweis: Zunächst ist ganz allgemein der Winkel von $2n\pi + x$, wo n eine ganze Zahl; gleich dem Winkel x , da $2n\pi$ der ganze Kreisumfang ist; ebenso folgt dies unmittelbar aus den Formeln für die Summe $\sin(\alpha + \beta)$ u. f. w. Was nun die einzelnen Winkelfolgen betrifft, so ist

$$1. \sin(\pi - x) = \sin(180^\circ - x) = \sin x \quad (\text{nach 445})$$

Mithin da $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ ist, so ist auch

$$\sin(2n\pi + \pi - x) = \sin x$$

also beides zusammengefasst

$$\sin(n\pi + (-1)^n x) = \sin x.$$

Ferner ist nach 444

$$\sin(-x) = -\sin x; \text{ mithin ist } \sin(n\pi - (-1)^n x) = -\sin x.$$

2. Nach 444 ist $\cos(-x) = \cos x$; mithin $\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$.
 Dagegen ist nach 444 $\cos(\pi - x) = -\cos x$; mithin ist
 $\cos((2n+1)\pi \pm x) = -\cos x$.

3. Nach 468 ist $\tan(-x) = \tan(\pi - x) = -\tan x$
 $\cot(-x) = \cot(\pi - x) = -\cot x$
 also allgemein $\tan(n\pi - x) = -\tan x$
 $\cot(n\pi - x) = -\cot x$.

4. Nach 469 ist ebenso $\tan(n\pi + x) = \tan x$
 $\cot(n\pi + x) = \cot x$.

Satz. Die Winkeltafel oder die trigonometrische Loga- 477.
 rithmentafel giebt zu jedem in Graden, Minuten und Sekunden
 gegebenen Winkel den Log (den Logarithmus) der Winkelfolgen: des
 Sinus, des Cosinus, der Tangente und der Cotangente.
 Es giebt Winkeltafeln mit 5 Ziffern, mit 7 Ziffern und mit 10
 Ziffern. Die bequemsten und für das praktische Leben ausreichenden
 sind die fünfziffrigen, welche wir daher der Betrachtung zu Grunde
 legen; die Benutzung der siebenziffrigen und der zehnziffrigen Winkel-
 tafeln bietet dann keine Schwierigkeit mehr.

Die Berechnung der Zahlen und der Loge oder Logarithmen für die
 Sinus und Tangenten werden wir im folgenden Zweige, in der Folgelehre
 oder Funktionenlehre kennen lernen; die Art und Weise, wie eine solche Tafel
 berechnet wird, ist in der Folgelehre des Verfassers ausführlich dargestellt
 und kann hier darauf verwiesen werden. Jeder, der sie kennen lernen will,
 kann sie dort nachsehen. Wir nehmen die Winkeltafel hier als richtig an,
 zumal die Richtigkeit von jedem leicht geprüft werden kann, und wiederholt
 sehr streng geprüft ist.

Jeder Gebildete muss die Winkeltafel leicht gebrauchen können und im Ge-
 brauche derselben die größte Gewandtheit haben; dagegen ist es nicht erfor-
 derlich, dass er die Winkeltafeln selbst berechnet und geprüft habe; dies kann
 er den Mathematikern vom Fache überlassen.

Satz. Die praktischste Einrichtung der Winkeltafel 478.
 oder der trigonometrischen Logarithmentafel. In der Win-
 keltafel oder der trigonometrischen Logarithmentafel dürfen nur zwei
 Winkelfolgen oder Funktionen: Sinus und Tangente aufgeführt
 werden, die Cosinus und die Cotangenten sind gleich den Sinus und
 den Tangenten ihrer Ergänzungswinkel; dieselben Zahlen können also
 für Sinus und für Cosinus und ebenso für Tangenten und für Cotangenten
 dienen. Wenn die Sinus und Tangenten von links oben gelesen
 werden, so werden die Cosinus und Cotangenten von rechts unten
 gelesen. Die Sinus und Tangenten wachsen mit den Winkeln, die
 Cosinus und Cotangenten nehmen ab, wenn die Winkel wachsen. Bei

dem Stellenloge (der *characteristica*) ist in den Tafeln stets Strich-zehn (— 10) zu ergänzen, sonst gelten auch für diese Tafeln dieselben Regeln wie für die Loge oder Logarithmen.

Beweis: Unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

Beispiele: $\log \sin 27^\circ 32' 35'' = 9,66588$

$\log \operatorname{tg} 52^\circ 15' 24'' = 10,12694$

$\log \cos 42^\circ 28' 16'' = 9,87521$

$\log \cot 57^\circ 45' 12'' = 9,79994.$

In den gewöhnlichen trigonometrischen Logarithmentafeln werden die 4 Funktionen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente neben einander gedruckt, dafür aber nur von 0 bis 45° geführt; dies ist fehlerhaft. Viel besser ist es nur Sinus und Tangente in die Tafel aufzunehmen und zwar auf der linken Seite den Sinus, auf der rechten die Tangente und sie von 0° bis 90° hinter einander zu führen auf jeder Seite aber 11 Säulen für $0' 1' 2'$ bis $10'$ neben einander aufzuführen. Der Raum der Tafel nimmt dann nur 40 Hundertel der andern Tafel ein, jede Seite enthält dann 10° statt eines Grades, das Auffuchen geht daher viel schneller und sicherer von Statten und entspricht genau dem Verfahren bei der Logtafel, bedarf daher keiner befondern Uebung. Die beiden Funktionen Sinus und Tangente wachsen mit den Winkeln; die kleinen Hilfstafeln für die Sekunden lassen sich am Rande leicht zufügen. Die Funktionen, welche von unten aufgehen, Cosinus und Cotangente erscheinen dann schon durch ihre Stellung unten als abnehmende Funktionen, bei denen die kleinen Beträge für die Sekunden abgezogen werden müssen. Der Gebrauch der trigonometrischen Tafel ist dann ganz entsprechend dem der gewöhnlichen Logarithmentafel, ist nicht verwirrend und bedarf keiner befondern Uebung. R. Grassmann, Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, Stettin 1890 sind in dieser Weise aufgestellt, bei der letzten Stelle ist durch den Druck markirt, ob die folgende Stelle über 5 oder unter 5 war. Wegen etwaiger Uebung verweise ich auf R. Grassmanns Uebungsheft.

Der Gebrauch der Tafel macht keine Schwierigkeiten und bedarf einer Anleitung nicht. Reiche Uebung ist auch hier jedem Gebildeten warm zu empfehlen.

Für den Gebrauch der Winkeltafeln bedürfen die Formeln für die Winkelfolgen noch einer Umgestaltung; denn da in den Winkeltafeln die Loge (die Logarithmen) der Winkelfolgen aufgeführt sind, so muss man möglichst alle die Formeln zu vermeiden suchen, wo die Summen oder Unterschiede dieser Winkelfolgen vorkommen. Für diesen Zweck hat man die folgenden Umgestaltungen der Formeln.

479. **Satz.** $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2(\sin \alpha) \cos \beta;$
 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2(\cos \alpha) \cos \beta;$
 $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2(\cos \alpha) \sin \beta;$
 $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2(\sin \alpha) \sin \beta.$

Beweis: Unmittelbar aus 452 und 453 durch Zufügen bez. Abziehen.

Satz. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta);$ 480.
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 (\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta);$
 $\sin \alpha - \sin \beta = 2 (\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta);$
 $\cos \beta - \cos \alpha = 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$

Beweis: Unmittelbar aus 479 wenn man $\alpha + \beta = \gamma$ und $\alpha - \beta = \delta$ setzt, so dass $\alpha = \frac{1}{2} (\gamma + \delta)$ und $\beta = \frac{1}{2} (\gamma - \delta)$ wird und dann für γ wieder α und für δ wieder β einführt.

481.

Satz.
 $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{1}{2} (\alpha + \beta); \quad \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$
 $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{1}{2} (\alpha - \beta); \quad \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$

Beweis: Unmittelbar aus 480, wenn man die Formeln für $\sin \alpha \pm \sin \beta$ durch die Formeln für $\cos \beta \pm \cos \alpha$ teilt.

Satz. $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = (\cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \tan \frac{1}{2} (\alpha - \beta);$ 482.
 $\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta} = (\tan \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \tan \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$

Beweis: Unmittelbar aus 480, wenn man die Sinusformeln, bez. die Cosinusformeln durch einander teilt.

Satz. $(\sin \alpha)^2 - (\sin \beta)^2 = (\sin (\alpha + \beta)) \sin (\alpha - \beta);$ 483.
 $(\cos \beta)^2 - (\cos \alpha)^2 = (\sin (\alpha + \beta)) \sin (\alpha - \beta).$

Beweis: Man vervielfache die Formel in 480 mit einander, dann hat man

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) \\ &= 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \\ & (\sin \alpha)^2 - (\sin \beta)^2 = (\sin (\alpha + \beta)) \sin (\alpha - \beta) \quad (\text{nach 454}) \end{aligned}$$

Und ebenso

$$\begin{aligned} & (\cos \beta + \cos \alpha) (\cos \beta - \cos \alpha) \\ &= 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot 2 (\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \\ & (\cos \beta)^2 - (\cos \alpha)^2 = (\sin (\alpha + \beta)) \sin (\alpha - \beta) \quad (\text{nach 454}) \end{aligned}$$

484.

Satz. $\sin \alpha \pm \cos \alpha = 2^{1/2} \sin (\alpha \pm 45^\circ) = 2^{1/2} \cos (\alpha \mp 45^\circ)$

$\cos \alpha \pm \sin \alpha = 2^{1/2} \sin (45^\circ \pm \alpha) = 2^{1/2} \cos (45^\circ \mp \alpha).$

Beweis: Aus 452 und 453 folgt unmittelbar, wenn man $\beta = 45^\circ$ setzt und beachtet, dass

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2^{1/2}} \text{ ist nach 458}$$

$$\sin(\alpha \pm 45^\circ) = \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \sin \alpha \pm \frac{1}{2^{1/2}} \cos \alpha, \text{ d. h.}$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = 2^{1/2} \sin(\alpha \pm 45^\circ).$$

Und ebenso die andern Formeln.

485. **Satz.** $\left(\frac{1 \pm \sin 2\alpha}{2}\right)^{1/2} = \sin(45^\circ \pm \alpha) = \cos(45^\circ \mp \alpha).$

Beweis: Man setze $\alpha = 90^\circ - 2\gamma$, also $\frac{\alpha}{2} = 45^\circ - \gamma$, dann ist

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - 2\gamma) = \sin 2\gamma \quad (\text{nach 460})$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin(45^\circ - \gamma) = \cos(45^\circ + \gamma) \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \cos(45^\circ - \gamma) = \sin(45^\circ + \gamma) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{da } 45^\circ + \gamma + 45^\circ - \gamma = 90^\circ \\ \text{find und also der eine die} \\ \text{Ergänzung des andern ist} \end{array} \quad (\text{nach 436})$$

dann ist nach 455

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^{1/2}, \text{ also } \sin(45^\circ - \gamma) = \cos(45^\circ + \gamma)$$

$$= \pm \left(\frac{1 - \sin 2\gamma}{2}\right)^{1/2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)^{1/2}, \text{ also } \cos(45^\circ - \gamma) = \sin(45^\circ + \gamma)$$

$$= \pm \left(\frac{1 + \sin 2\gamma}{2}\right)^{1/2}$$

Und wenn man hier wieder α für γ setzt, folgt unmittelbar der Satz.

486. **Satz.** $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\cos \alpha) \cos \beta}; \cot \beta \pm \cot \alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\sin \alpha) \sin \beta}$

Beweis: Unmittelbar aus 452 und 453, wenn man die Formeln durch $(\cos \alpha) \cos \beta$ bezüglich durch $(\sin \alpha) \sin \beta$ teilt.

487. **Satz.** $1 \pm \tan \alpha = 2^{1/2} \cdot \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha} = 2^{1/2} \cdot \frac{\cos(45^\circ \mp \alpha)}{\cos \alpha}$
 $\cot \alpha \pm 1 = 2^{1/2} \cdot \frac{\sin(45^\circ \mp \alpha)}{\sin \alpha} = 2^{1/2} \cdot \frac{\cos(45^\circ \pm \alpha)}{\sin \alpha}$

Beweis: Unmittelbar aus 484, wenn man die Formeln durch $\cos \alpha$ bez. durch $\sin \alpha$ teilt.

488. **Satz.** $\frac{1 + \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha} = \tan(45^\circ \pm \alpha) = \cot(45^\circ \mp \alpha).$

Beweis: Unmittelbar aus 487, wenn man eine Formel durch die andere teilt.

$$\text{Satz. } \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{\cot \alpha - 1} = \tan \alpha. \quad 489.$$

Beweis. Unmittelbar aus 487, wenn man eine Formel durch die andere teilt.

4. Der Bogen.

Erklärung. Der Bogen (der arcus) β heist der dem Winkel 490.

β entsprechende Teil des Kreisumfanges, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, gemessen durch den Halbmesser des Kreises.

Erklärung. Das Zeichen des Bogens β ist, wenn $\sin \beta = x$, 491. $\cos \beta = y$, $\tan \beta = z$ und $\cot \beta = v$ ist, $\beta = \arcsin(x) = \arccos(y) = \arctan(z) = \operatorname{arccot}(v)$.

In den mathematischen Schriften ist es Sitte, den $\arcsin(x)$ als $\arcsin x$ zu bezeichnen; dies ist aber ein Fehler. Unter dem $\arcsin x$ muss und kann man nur den Bogen x verstehen; denn $\arcsin x$ bezeichnet notwendig den Bogen des $\sin x$; der $\sin x$ ist aber der \sin des Winkels oder Bogens x^* . Die Bezeichnung $\arcsin x$ bezeichnet also den Bogen x , nicht aber den Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, dieser darf nur als $\arcsin(x)$ bezeichnet werden, wie es in diesem Buche geschehen ist.

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \arcsin(x) &= \arccos((1-x^2)^{1/2}) = \arctan\left(\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\right) \quad 492. \\ &= \operatorname{arccot}\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}\right) \quad \text{und} \quad \arctan(z) = \arccot\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad \text{Setzen wir } \sin \beta &= x, \text{ so ist nach 441 } \cos \beta = \\ (1 - (\sin \beta)^2)^{1/2} &= (1 - x^2)^{1/2}; \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}; \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \\ &= \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}, \text{ mithin ist } \arcsin(x) = \arccos((1-x^2)^{1/2}) \\ &= \arctan\left(\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{x}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Setzen wir } \tan \beta &= z, \text{ so ist } \cot \beta = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{z} \text{ und ist nach 467} \\ \cos \beta &= \frac{1}{(1 + (\tan \beta)^2)^{1/2}}; \sin \beta = \tan \beta \cdot \cos \beta = \frac{\tan \beta}{(1 + (\tan \beta)^2)^{1/2}}, \text{ mithin} \end{aligned}$$

*So bezeichnet $\log \sin x$ den \log des $\sin x$, so $\operatorname{diff} \sin x$ das Differential des $\sin x$ u. s. w.

$$\text{ist } \arcsin(\tan = z) = \arcsin\left(\cot = \frac{1}{z}\right) = \arcsin\left(\cos = \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}\right) \\ = \arcsin\left(\sin = \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right).$$

493. **Satz.** $\arcsin(\sin = x) + \arcsin(\cos = x) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$\arcsin(\tan = z) + \arcsin(\cot = z) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

Beweis. a. Es sei $\sin \alpha = x$, so ist auch $\cos(90^\circ - \alpha) = x$; und ist also $\frac{\pi}{2} = 90^\circ = \alpha + (90^\circ - \alpha) = \arcsin(\sin = x) + \arcsin(\cos = x)$

b. Es sei $\tan \beta = z$, so ist auch $\cot(90^\circ - \beta) = z$, und ist also $\frac{\pi}{2} = 90^\circ = \beta + (90^\circ - \beta) = \arcsin(\tan = z) + \arcsin(\cot = z)$.

494. **Satz.**

$$\arcsin(\sin = x) + \arcsin(\sin = y) = \arcsin(\sin = (x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2})), \\ \text{wenn } x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\arcsin(\sin = x) + \arcsin(\sin = y) = \pi - \arcsin(\sin = (x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2})), \\ \text{wenn } x^2 + y^2 > 1$$

$$\arcsin(\sin = x) - \arcsin(\sin = y) = \arcsin(\sin = (x(1-y^2)^{1/2} - y(1-x^2)^{1/2})).$$

Beweis. Es sei $\sin \alpha = x$, und $\sin \beta = y$, dann ist $\cos \alpha = (1-x^2)^{1/2}$ und $\cos \beta = (1-y^2)^{1/2}$ und ist $\alpha \pm \beta = \arcsin(\sin = x) \pm \arcsin(\sin = y)$. Nun ist nach 452, 453 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$, mithin ist

$$\arcsin(\sin = x) \pm \arcsin(\sin = y) = \arcsin(\sin = x(1-y^2)^{1/2} \pm y(1-x^2)^{1/2}).$$

Diese Formel gilt allgemein, wenn $\alpha \pm \beta \leq 90^\circ$ ist, wird dagegen $\alpha + \beta > 90^\circ$, so muss man statt des \sin vom $\alpha + \beta$ vielmehr den \sin von $180^\circ - (\alpha + \beta)$ oder $\pi - (\alpha + \beta)$ nehmen, d. h. es ist dann

$$\arcsin(\sin = x) + \arcsin(\sin = y) = \pi - \arcsin(\sin = x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2}).$$

Nun wird der $\cos(\alpha + \beta)$ eine Strichgröße, d. h. negativ, wenn $\alpha + \beta > 90^\circ$ wird. Es ist aber

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha) \cdot \cos \beta - (\sin \alpha) \cdot \sin \beta = (1-x^2)^{1/2}(1-y^2)^{1/2} - xy \\ = \frac{(1-x^2)(1-y^2) - x^2y^2}{((1-x^2)(1-y^2))^{1/2} + xy} \\ = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{((1-x^2)(1-y^2))^{1/2} + xy}.$$

Der $\cos(\alpha + \beta)$ ist also eine Strichgröße, oder $\alpha + \beta > 90^\circ$, wenn $x^2 + y^2 > 1$ ist. Daraus ergibt sich die Bedingungsgleichung im Satze, dass die erste Formel gilt, wenn $x^2 + y^2 \leq 1$, dagegen die zweite, wenn $x^2 + y^2 > 1$ ist.

Satz.

495.

$$\arccos(\tan = x) + \arccos(\tan = y) = \arccos\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \text{ wenn } xy \leq 1$$

$$\arccos(\tan = x) + \arccos(\tan = y) = \pi - \arccos\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \text{ wenn } xy > 1$$

$$\arccos(\tan = x) - \arccos(\tan = y) = \arccos\left(\tan = \frac{x - y}{1 - xy}\right).$$

Beweis. Es sei $\tan \alpha = x$ und $\tan \beta = y$, dann ist nach 470

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp (\tan \alpha) \tan \beta}, \text{ mithin ist}$$

$$\arccos(\tan = x) \pm \arccos(\tan = y) = \arccos\left(\tan = \frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right).$$

Diese Formel gilt wieder allgemein, wenn $\alpha \pm \beta \leq 90^\circ$, dagegen muss man, wenn $\alpha + \beta > 90^\circ$ wird, statt der \tan von $\alpha + \beta$ vielmehr die \tan von $180^\circ - (\alpha + \beta)$ oder $\pi - (\alpha + \beta)$ nehmen, d. h. es ist

$$\arccos(\tan = x) + \arccos(\tan = y) = \pi - \arccos\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

Nun wird aber, wenn $\alpha + \beta > 90^\circ$ wird, der $\cos(\alpha + \beta)$ eine Strichgröße. Es ist aber

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{(\cos \alpha) \cos \beta} = \frac{(\cos \alpha) \cos \beta - (\sin \alpha) \sin \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta} = 1 - \frac{(\sin \alpha) \sin \beta}{(\cos \alpha) \cos \beta}.$$

Der $\cos(\alpha + \beta)$ ist also eine Strichgröße oder $\alpha + \beta > 90^\circ$, wenn $xy > 1$ ist. Daraus ergibt sich die Bedingungsgleichung im Satze, dass die erste Formel gilt, wenn $xy \leq 1$, dagegen die zweite, wenn $xy > 1$ ist.

Erklärung. Unter dem Allgemeinen Bogen (Zeichen $A\arccos$) 496, versteht man einen Bogen, der jenfeit der Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

$$\text{Satz. } A\arccos(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \arccos(\sin = x)$$

497.

$$A\arccos(\cos = x) \cong 2a\pi \pm \arccos(\cos = x).$$

$$A\arccos(\tan = x) \cong a\pi + \arccos(\tan = x)$$

$$A\arccos(\cot = x) \cong a\pi + \arccos(\cot = x).$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 476, wenn man $\arccos(\sin = x) = \alpha$, also $x = \sin \alpha$ setzt. So ist z. B. $\sin(a\pi + (-1)^a \alpha) = \sin \alpha = x$, mithin ist $A\arccos(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \arccos(\sin = x)$.

12. Die Richtgrößen in Bafe, Stufe, Log und Winkel.

Wir versetzen in dieser Nummer die Richtgrößen (die komplexen Größen) auch in die höhern Gebiete in die Bafe, in die Stufe, in den Log und in den Winkel und untersuchen die Gesetze, welche in diesen Gebieten für sie Platz greifen.

1. Die Richtgröße in der Bafe.

Um die Richtgröße in der Bafe behandeln zu können, betrachten wir zunächst die Richteinheit in der Bafe.

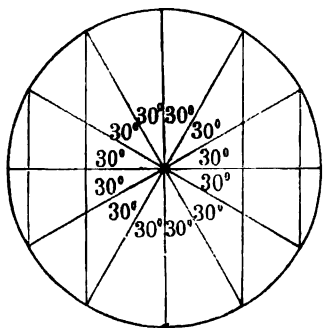
498. **Satz.** Wenn $x^n = 1$, wo n eine ganze Zahl, so ist

$$x = \cos \frac{2a\pi}{n} + i \sin \frac{2a\pi}{n}$$

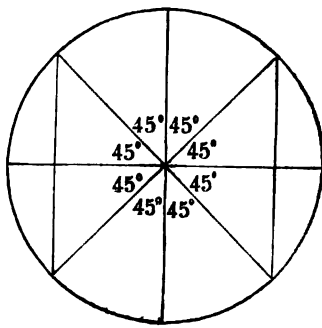
wo a alle Werte von 0 bis $n - 1$ haben kann, d. h. die Wurzel ist eine Richteinheit (komplexe Einheit), deren Winkel einer derjenigen Winkel ist, welche n Strahlen mit einander bilden, die von einem Punkte ausgehen und den ganzen Winkelraum in n gleiche Teile teilen.

Beweis. Es sei x zunächst eine beliebige Richtgröße $= a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, wo a eine Plusgröße und der Winkel α echt ist, so folgt aus der Gleichung $1 = x^n$ $1 = (a \cdot \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = a^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, nach 465, hier ist nach 426 $a^n = 1$, also auch $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = 1$, d. h. $\cos n\alpha = 1$ und $\sin n\alpha = 0$, d. h. nach 449 $n\alpha = 2a\pi$, mithin $\alpha = \frac{2a\pi}{n}$, d. h. es ist $x = \cos \frac{2a\pi}{n} + i \sin \frac{2a\pi}{n}$.

Es erfüllt also jeder dieser Werte die Gleichung, auch kann es nicht mehr als n solche Werte geben; denn sei $a > n$, also $a = n + b$, wo b einer der Werte von 0 bis $n - 1$, so wird $\frac{2a\pi}{n} = \frac{2(n + b)\pi}{n} = 2\pi + \frac{2b\pi}{n} = \frac{2b\pi}{n}$; die Werte von $a = 0$ bis $a = n - 1$ liefern also sämtliche Wurzeln.



Nachdem wir auf diese Weise die Werte der Wurzel aus 1 festgestellt haben, so können wir nun auch zu der Betrachtung der Wurzeln aus Winkelgrößen übergehen.



Beispiele. Es sei $x^{12} = 1$, so ist

$$x = \cos \frac{2a\pi}{12} + i \sin \frac{2a\pi}{12} \text{ und } \frac{2a\pi}{12} = \begin{cases} 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, \\ 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ \end{cases}$$

$$\text{Es sei } x^8 = 1, \text{ so ist } x = \cos \frac{2a\pi}{8} + i \sin \frac{2a\pi}{8},$$

$$\text{also } \frac{2a\pi}{8} = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ.$$

Die vorstehenden Zeichnungen veranschaulichen diese Winkel, sowie die cosinus und sinus dieser Winkel.

Erklärung. Eine Richtgröße zu einer Zahl c erhöhen 499.
(eine komplexe Größe zu einer reellen Zahl potenzieren) heißt den Richtwert jener Größe zu c erhöhen und ihren Winkel mit c vervielfachen auch dann, wenn die Zahl c keine ganze Zahl ist, sofern dann der Winkel der Größe echt ist, oder

Es ist $[a(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^c = a^c (\cos c\alpha + i \sin c\alpha)$ wo a eine Plusgröße, α ein Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$ und n eine (reelle) Zahl.

Die Richteinheit, deren Winkel $\alpha = 1$ ist, wird gleich ε gesetzt, oder

$$\text{Es ist } \varepsilon = \cos 1 + i \sin 1.$$

Satz. Wenn a der Richtwert und c der Winkel einer Richt- 500.
größe (einer komplexen Größe) $a(\cos c + i \sin c)$ ist, so ist

$$a(\cos c + i \sin c) = a\varepsilon^c.$$

$$\text{Beweis. Es ist } a\varepsilon^c = a(\cos 1 + i \sin 1)^c \quad (\text{nach 499})$$

$$= a(\cos c + i \sin c) \quad (\text{nach 499})$$

Satz. Wenn entweder n eine ganze Zahl oder c ein echter 501.
Winkel ist, so ist $(a\varepsilon^c)^n = a^n \cdot \varepsilon^{cn}$.

Beweis. Unmittelbar aus 464 bez. 499.

Satz. Wenn a eine beliebige Zahlgröße (d. h. eine reine Zahl 502.
oder eine Richtgröße) ist und b und c Zahlen (reell) sind, so ist

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c.$$

Beweis. 1. Es sei $a = \varepsilon$, so ist

$$\varepsilon^b \varepsilon^c = (\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c) \quad (\text{nach 500})$$

$$= \cos(b+c) + i \sin(b+c) \quad (\text{nach 451})$$

$$= \varepsilon^{b+c} \quad (\text{nach 500}).$$

2. Es sei p der Richtwert von a und α der echte Winkel von a
also $a = p \cdot \varepsilon^\alpha$, so ist

$$a^b \cdot a^c = (p\varepsilon^\alpha)^b \cdot (p\varepsilon^\alpha)^c = p^b \varepsilon^{ab} p^c \varepsilon^{ac} \quad (\text{nach 501})$$

$$= p^{b+c} \varepsilon^{ab+ac} = p^{b+c} \varepsilon^{a(b+c)} \quad (\text{nach 502}_1)$$

$$= p^{b+c} \cdot \varepsilon^{a(b+c)} = (p\varepsilon^\alpha)^{b+c} \quad (\text{nach 501})$$

$$= a^{b+c}$$

503. **Satz.** Wenn a eine beliebige ZahlgröÙe ungleich Null, b und c Zahlen (reell) find, fo ist $a^{b-c} = a^b : a^c$.

Beweis. $a^{b-c} = a^{b-c} \cdot a^c : a^c = a^{b-c+c} : a^c = a^b : a^c$

(nach 502).

Es muss hier bemerkt werden, dass die weiteren Gefetze des Höhens für Richtgrößen in der Bafe und für gebrochne Stufen (Exponenten) nur dann gelten, wenn $(ab)^c$ die Summe der Winkel $\alpha + \beta$, und bei a^b der Winkel a^b ein echter Winkel ist; nur in diesem Falle ist $(ab)^c = a^c \cdot b^c$ und $(a^b)^c = a^{bc}$ auch für gebrochne Stufen (Exponenten).

504. **Satz.** $\epsilon^\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$; $\epsilon^{-\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$.

Beweis. Unmittelbar aus 500, wenn $a = 1$ gefetzt wird und aus 440.

505. **Satz.** $\cos \alpha = \frac{\epsilon^\alpha + \epsilon^{-\alpha}}{2}$; $\sin \alpha = \frac{\epsilon^\alpha - \epsilon^{-\alpha}}{2i}$.

Beweis. Es ist $\epsilon^\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$$\epsilon^{-\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

(nach 504)

daraus folgt durch Zufügen beider der erste, durch Abziehen des zweiten der zweite Teil des Satzes.

Es ist $\epsilon^{\alpha+\beta} = \epsilon^\alpha \cdot \epsilon^\beta$ nach 502, mithin ist nach 504

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

d. h. es ist $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Es folgt also hieraus der bekannte Satz der Trigonometrie.

506. **Satz.** Es ist $\epsilon^\alpha = \epsilon^{2n\pi + \alpha}$.

Beweis. $\epsilon^\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha = \cos(2n\pi + \alpha) + i \sin(2n\pi + \alpha)$

(nach 504)

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) \quad (\text{nach 451})$$

$$= \epsilon^\alpha \cdot \epsilon^{2n\pi} \quad (\text{nach 504})$$

$$= \epsilon^{2n\pi + \alpha} \quad (\text{nach 502})$$

507. **Satz.** Wenn a, b, c, \dots beliebige Zahlgrößen (auch Richtgrößen) und q eine Zahl (reell) ist, fo ist $a^q \cdot b^q \cdot c^q \dots = (abc \dots)^q \cdot \epsilon^{2n\pi q}$, wo α, β, γ die echten Winkel der Größen a, b, c, \dots , und $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2n\pi + p$, auch p echt ist.

Beweis. Es sei $a = a_1 \cdot \epsilon^\alpha$, $b = b_1 \epsilon^\beta$, $c = c_1 \epsilon^\gamma \dots$, wo $a_1 b_1 c_1 \dots$ Plusgrößen und $\alpha, \beta, \gamma \dots$ echte Winkel, und sei $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2n\pi + p$, wo p ein echter Winkel, fo ist

$$\begin{aligned}
a^q \cdot b^q \cdot c^q \dots &= (a_1 \epsilon^\alpha)^q \cdot (b_1 \epsilon^\beta)^q \cdot (c_1 \epsilon^{\gamma'})^q \dots \\
&= a_1^q \epsilon^{\alpha q} \cdot b_1 \epsilon^{\beta q} \cdot c_1 \epsilon^{\gamma' q} \dots && \text{(nach 501)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot \epsilon^{\alpha q + \beta q + \gamma' q + \dots} && \text{(nach 502)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot \epsilon^{(\alpha + \beta + \gamma' + \dots)q} && \text{(nach 90)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot \epsilon^{(2n\pi + p)q} && \text{(nach Annahme)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot \epsilon^{pq} \cdot \epsilon^{2n\pi q} && \text{(nach 500)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot (\epsilon^p)^q \cdot \epsilon^{2n\pi q} && \text{(nach 501)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \cdot (\epsilon^{2n\pi + p})^q \cdot \epsilon^{2n\pi q} && \text{(nach 506)} \\
&= (a_1 b_1 c_1 \dots)^q \epsilon^{(\alpha + \beta + \gamma' \dots)q} \cdot \epsilon^{2n\pi q} \\
&= [(a_1 b_1 c_1 \dots) \epsilon^{(\alpha + \beta + \gamma' \dots)}]^q \cdot \epsilon^{2n\pi q} && \text{(nach 501)} \\
&= (a_1 \epsilon^\alpha \cdot b_1 \epsilon^\beta \cdot c_1 \epsilon^{\gamma'} \dots)^q \epsilon^{2n\pi q} && \text{(nach 502)} \\
&= (a \cdot b \cdot c \dots)^q \cdot \epsilon^{2n\pi q}
\end{aligned}$$

Satz. Wenn a eine beliebige Zahlgröße (auch Richtgröße $= a_1 \epsilon^\alpha$), 508.
 wo α ein echter Winkel, und b und c Zahlen (reell) find, so ist

$a^{bc} = (a^b)^c \epsilon^{2n\pi c}$, wo $ab = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel ist.

$$\begin{aligned}
\text{Beweis. Es ist } a^{bc} &= (a_1 \epsilon^\alpha)^{bc} = a_1^{bc} \cdot \epsilon^{\alpha bc} && \text{(nach 501)} \\
&= a_1^{bc} \epsilon^{(2n\pi + p)c} && \text{(nach Annahme)} \\
&= a_1^{bc} \epsilon^{pc} \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach 502)} \\
&= a_1^{bc} (\epsilon^p)^c \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach 501)} \\
&= a_1^{bc} (\epsilon^{2n\pi + p})^c \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach 506)} \\
&= a_1^{bc} (\epsilon^{\alpha b})^c \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach Annahme)} \\
&= (a_1^b)^c \cdot (\epsilon^\alpha)^b)^c \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach 501)} \\
&= ((a_1 \cdot \epsilon^\alpha)^b)^c \cdot \epsilon^{2n\pi c} && \text{(nach 499)} \\
&= (a^b)^c \cdot \epsilon^{2n\pi c}
\end{aligned}$$

Satz. Wenn a eine beliebige Zahlgröße (reine Zahl oder Richt- 509.
 größe) $= a_1 \epsilon^\alpha$ (wo a_1 ein Pluswert und α ein echter Winkel) und
 $\beta, \gamma, \delta, \zeta$ Zahlen (reell) find, so ist

$$a^{\beta\gamma\delta\zeta} = (((a^\beta)^{\gamma'})^{\delta'})^{\zeta} \epsilon^{2\pi(m'\delta' + n\delta + 0)\zeta}$$

wo $\alpha\beta = 2m\pi + r_1$, $r_1\gamma = 2n\pi + r_2$ und $r_2\delta = 2o\pi + r_3$ und die
 Winkel r_1, r_2 und r_3 echt find.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } a^{\beta\gamma\delta\zeta} &= (a^{\beta\gamma\delta\zeta}) = (a^\beta)^{\gamma\delta\zeta} \epsilon^{2m\pi\gamma\delta\zeta} && \text{wo } \alpha\beta = 2m\pi + r_1 \\
&= (a^\beta)^{\gamma\delta\zeta} \epsilon^{2m\pi\gamma\delta\zeta} \cdot \epsilon^{2n\pi\delta\zeta} && \text{wo } r_1\gamma = 2n\pi + r_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left((a^\beta)^\gamma \right)^\delta \right)^\zeta \cdot e^{2m\pi\gamma\delta\zeta} \cdot e^{2n\pi\delta\zeta} \cdot e^{20\pi\zeta} \quad \text{wo } r_2\delta = 20\pi + r_3 \\
&= \left((a^\beta)^\gamma \right)^\delta \cdot e^{2\pi\zeta(m\gamma\delta + n\delta + 0)}.
\end{aligned}$$

2. Die Richtgröße in der Stufe (im Exponenten).

Um die Richtgröße in der Stufe zu erklären, hat man $\varepsilon = e^i$ gesetzt. Man ist zu dieser Setzung durch die folgende Betrachtung gekommen. In der Folgelehre oder Funktionenlehre werden wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ ist, und dass} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \text{ dass} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Es ist einleuchtend, dass beide Formeln sich auf einander zurückführen lassen, wenn wir entweder 1, in e^x die Größe ix für x einführen oder 2, in $\cos x$ und $\sin x$ die Größe ix für x einführen.

Im ersten Falle wird dann

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Setzen wir hier $x = 1$, so erhalten wir nach 499

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1 = \varepsilon, \text{ d. h. } e^i = \varepsilon.$$

Im zweiten Falle wird dann

$$\begin{aligned}
\cos ix &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
-i \sin ix &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\text{d. h. } e^x &= \cos ix - i \sin ix.
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir auf die Sätze über.

510. **Erklärung.** Um die Höhe (Potenz) mit einer Richtgröße (komplexen Größe) in der Stufe zu erklären, setzen wir

$$1, \varepsilon = e^i \quad \varepsilon^\alpha = (e^\alpha)^i$$

$$2, (a\varepsilon^\alpha)^{i\beta} = a^{i\beta}(\varepsilon^\alpha)^{i\beta} \quad \text{und } a^{i\beta} = (a^\beta)^i \quad (\varepsilon^\alpha)^{i\beta} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha\beta},$$

wo a eine Plusgröße, β eine Zahl (reell) und α eine echte Zahl ist.

3, $a^{\alpha + i\beta} = a^\alpha \cdot a^{i\beta}$, wo a eine Richtgröße, α und β Zahlen (reell) sind.

511. **Satz.** $(e^\alpha)^i = (e^i)^\alpha = e^{i\alpha} = \varepsilon^\alpha.$

Beweis. $(e^\alpha)^i = \varepsilon^\alpha = (e^i)^\alpha = e^{i\alpha} = \varepsilon^\alpha$ (nach 510).

512. **Satz.** $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$

Beweis. Es ist $\cos \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$, $\sin \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ (nach 505)

$$= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \quad (\text{nach 511}).$$

Satz. $2^n (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cos(n-4)\alpha + \dots$ 513.
 $= 8n^2 \cos(n-2\alpha)\alpha$ wo n eine ganze Pluszahl

Und zwar für gerades n

$$2^{n-1} (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha + \dots$$

$$+ n^{\cdot(1/2n-1)} \cos 2\alpha + \dots n^{\cdot(1/2n)}$$

und für ungerades n

$$2^{n-1} (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha + \dots$$

$$+ n^{\cdot 1/2(n-3)} \cos 3\alpha + n^{\cdot 1/2(n-1)} \cos \alpha.$$

Beweis. Aus 512 folgt unmittelbar $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$, mithin
 $2^n (\cos \alpha)^n = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})^n = e^{i n \alpha} + n e^{i\alpha(n-2)} + n^2 e^{i\alpha(n-4)} + \dots$
 $+ n^{n-2} e^{i\alpha(4-n)} + n^{n-1} e^{i\alpha(2-n)} + e^{i\alpha(-n)}.$

Und wenn man hier jedes Glied $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ entwickelt und nach 426 die Glieder ohne i auf beiden Seiten gleich setzt

$$2^n (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cos(n-2)\alpha + n^2 \cos(n-4)\alpha + \dots$$

$$+ n^{n-2} \cos(4-n)\alpha + n^{n-1} \cos(2-n)\alpha + \cos(-n)\alpha$$

$$= 8 n^2 \cos(n-2\alpha)\alpha$$

$0, n$

mithin der erste Teil des Satzes bewiesen.

Beachtet man nun, dass $\cos(-\alpha)\alpha = \cos \alpha\alpha$, so kann man je zwei Glieder zusammenfassen. Bei geradem n bleibt dann in der Mitte ein unpares Glied $n^{\cdot 1/2n} \cos(n-n)\alpha = n^{\cdot 1/2n}$ und erhält man mithin für gerades n , und für ungerades n die im Satze aufgestellten Formeln.

Satz. Für gerades n ist, wenn n eine ganze Pluszahl 514.

$$2^{n-1} (-1)^{1/2n} (\sin \alpha)^n = \cos n\alpha - n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha - \dots$$

$$+ (-1)^{(1/2n-1)} n^{\cdot(1/2n-1)} \cos 2\alpha + (-1)^{(1/2n)} \cdot \frac{1}{2} n^{\cdot(1/2n)}$$

und für ungerades n

$$2^{n-1} (-1)^{1/2(n-1)} (\sin \alpha)^n = \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + n^2 \sin(n-4)\alpha - \dots$$

$$+ (-1)^{1/2(n-3)} n^{\cdot 1/2(n-3)} \sin 3\alpha + (-1)^{1/2(n-1)} n^{\cdot 1/2(n-1)} \cdot \sin \alpha.$$

Beweis. Aus 512 folgt unmittelbar $2 \cdot i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$, mithin
 $2^n i^n (\sin \alpha)^n = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})^n = e^{i n \alpha} - n e^{i\alpha(n-2)} + n^2 e^{i\alpha(n-4)} - \dots$
 $+ (-1)^{(n-2)} n^{\cdot(n-2)} e^{i\alpha(4-n)} + (-1)^{n-1} n^{\cdot(n-1)} e^{i\alpha(2-n)} + (-1)^n e^{-i n \alpha}.$

Wenn man hier jedes Glied $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ entwickelt und nach 426 die Glieder ohne i auf beiden Seiten gleichsetzt und ebenso die mit i , so erhält man für gerades n $i^n = (-1)^{1/2n}$ also Glieder ohne i , und für ungerades n $i^n = i \cdot (-1)^{1/2(n-1)}$, mithin für gerades n die Glieder ohne i

$$2^n (-1)^{1/2n} \cdot (\sin \alpha)^n = \cos n\alpha - n \cos(n-2)\alpha + n^2 \cos(n-4)\alpha - \dots \\ + (-1)^{n-2} n^{n-2} \cos(4-n)\alpha + (-1)^{n-1} n^{n-1} \\ + (-1)^{n-1} n^{n-1} \cos(2-n)\alpha + (-1)^n \cos(-n)\alpha$$

und für ungerades n die Glieder mit i

$$i 2^n (-1)^{1/2(n-1)} (\sin \alpha)^n = i [\sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + n^2 \sin(n-4)\alpha - \dots \\ + (-1)^{n-2} n^{n-2} \sin(4-n)\alpha + (-1)^{n-1} n^{n-1} \\ + (-1)^{n-1} n^{n-1} \sin(2-n)\alpha + (-1)^n \sin(-n)\alpha]$$

Beachtet man hier, dass $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ist, dass mithin für gerades n die \sin sich aufheben; dass aber für ungerades n auch die entsprechenden \sin entgegengesetztes Zeichen haben, und also $\sin \alpha - \sin(-\alpha) = 2 \sin \alpha$ ist, so kann man auch hier je zwei Glieder zusammenfassen und behält für gerades n ein unpares Glied $(-1)^{(1/2n)} n^{(1/2n)} \cos(n-n) = (-1)^{(1/2n)} \cdot n^{(1/2n)}$ und erhält mithin für gerades n , wie für ungerades n die im Satze aufgestellten Formeln.

Beispiele. Für gerades n

$$2(\cos \alpha)^2 = \cos 2\alpha + 1$$

$$8(\cos \alpha)^4 = \cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3$$

Für ungerades n

$$4(\cos \alpha)^3 = \cos 3\alpha + 3 \cos \alpha$$

$$16(\cos \alpha)^5 = \cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha +$$

$$10 \cos \alpha$$

Für gerades n

$$-2(\sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha - 1$$

$$8(\sin \alpha)^4 = \cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3$$

Für ungerades n

$$-4(\sin \alpha)^3 = \sin 3\alpha - 3 \sin \alpha$$

$$16(\sin \alpha)^5 = \sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha +$$

$$10 \sin \alpha.$$

515. **Satz.** $\epsilon^i = \frac{1}{e}.$

Beweis. $\epsilon^i = e^{ii} = \frac{1}{e}$ (nach 510).

516. **Satz.** $e = \cos i - i \sin i.$

Beweis. Es ist nach 510 $\epsilon = e^i$, also $e = \epsilon^{-i} = \cos i - i \sin i$ (nach 504)

517. **Satz.** Jede reine Pluszahl a zu einer reinen JgröÙe (reinen imaginären GröÙe) ib erhöht, giebt eine Richteinheit.

Beweis. Sei a eine PlusgröÙe $= e^\alpha$ wo $\alpha = \frac{a}{e},$

fo ist $a^{ib} = (a^b)^i$ (nach 510)

$$a^{ib} = (a^b)^i = (e^{\alpha})^b)^i = (e^{\alpha b})^i = e^{\alpha b} \quad (\text{nach 511})$$

und $e^{\alpha b} = \cos \alpha b + i \sin \alpha b$ oder

$$a^{ib} = \cos b + i \sin b \cos \frac{a}{e} + i \sin b \frac{a}{e} \quad (\text{nach 504}).$$

Satz. Jede Richteinheit zu einer reinen JgröÙe (reinen imaginären GröÙe) ib erhöht (potenziert), giebt eine Pluszahl.

Beweis. $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{\alpha}$ giebt zur ib erhöht nach 510

$$(e^{\alpha})^{bi} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha b}.$$

Satz. $e^{2n\pi i} = 1.$ 519.

Beweis. $e^{2n\pi i} = (e^i)^{2n\pi} = e^{2n\pi} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1.$

Satz. Eine RichtgröÙe (komplexe GröÙe) zu einer RichtgröÙe id erhöht (potenziert), giebt wieder eine RichtgröÙe und gelten also auch für diese Höhen (Potenzen) alle für Richtgrößen bewiesenen Sätze und zwar ist $(a + ib)^{c + id} = (e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta))^c \cdot e^{id} = (e^{\alpha} \cdot e^{\beta})^c \cdot e^{id} = e^{\alpha c - \beta d} \cdot e^{\beta c + \alpha d}$ wenn β ein echter Winkel.

Beweis. $(e^{\alpha} \cdot e^{\beta})^{c + id} = (e^{\alpha} e^{\beta})^c \cdot (e^{\alpha} \cdot e^{\beta})^{id} \quad (\text{nach 510})$

$$= (e^{\alpha})^c (e^{\beta})^c \cdot (e^{\alpha})^{di} (e^{\beta})^{id} \quad (\text{nach 501 u. 510})$$

$$= e^{\alpha c} \cdot (e^{\alpha d})^i e^{\beta c} \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta d} \quad (\text{nach 510})$$

$$= e^{\alpha c - \beta d} e^{\alpha d} \cdot e^{\beta c} \quad (\text{nach 511})$$

$$= e^{\alpha c - \beta d} e^{\alpha d + \beta c} \quad (\text{nach 502})$$

Satz. Jede RichtgröÙe (komplexe GröÙe) lässt sich als Höhe id (Potenz) darstellen, deren Base e und deren Stufe eine RichtgröÙe ist, in welcher die zweite Zahl ein echter Winkel ist.

Beweis. Sei die WinkelgröÙe $a + ib$, und e ihr Pluswert, α ihr echter Winkel und sei $c = e^{\beta}$, so ist $a + ib = c \cdot e^{\alpha} = e^{\beta} \cdot e^{\alpha}$ (nach 504) mithin $a + ib = e^{\beta} \cdot e^{\alpha} = e^{\beta} \cdot e^{i\alpha} = e^{\beta + i\alpha}$ (nach 511)

Satz. $(e^a + ib)^{c + id} = e^{(a + ib)(c + id)}$ wenn b ein echter Winkel. 522.

Beweis. $e^a + ib = e^a \cdot e^{ib} = e^a e^b \quad (\text{nach 510}), \text{ mithin}$

$$(e^a + ib)^{c + id} = e^{ac - bd} e^{bc + id} \quad (\text{nach 520})$$

$$= e^{ac - bd} (e^i)^{bc + id} \quad (\text{nach 510})$$

$$= e^{ac - bd} e^{ibc + iad} \quad (\text{nach 511})$$

$$= e^{ac - bd + ibc + iad} = e^{(a + ib)(c + id)}$$

Satz. $(e^a \cdot e^b)^{c + id} = e^{ac - bd} e^{bc + id} \cdot e^{-2n\pi(c + id)}$ wenn $b = 2n\pi + p$ 523.
wo p echt.

Beweis. Es sei $b = 2n\pi + p$ wo p echt oder zwischen $-\pi$ und π , so ist

$$\begin{aligned}\epsilon^b &= \cos(2n\pi + p) + i\sin(2n\pi + p) = \cos p + i\sin p = \epsilon^p, \text{ also} \\ (\epsilon^a \epsilon^b)^{c+id} &= (\epsilon^a \cdot \epsilon^p)^{c+id} = \epsilon^{ac - pd} \cdot \epsilon^{pc + ad} && \text{(nach 520)} \\ &= \epsilon^{ac - bd + 2n\pi d} \epsilon^{bc + ad - 2n\pi c} \\ &= \epsilon^{ac - bd} \epsilon^{bc + ad} \cdot \epsilon^{2n\pi d} \epsilon^{-2n\pi c} \\ &= \epsilon^{ac - bd} \epsilon^{bc + ad} \cdot \epsilon^{2n\pi(d - ic)} \\ &= \epsilon^{ac - bd} \epsilon^{bc + ad} \cdot \epsilon^{-2n\pi(c + id)}.\end{aligned}$$

524. **Satz.** $\epsilon^{(a+ib)(c+id)} = (\epsilon^a + i\epsilon^b)^{c+id} \cdot \epsilon^{-2n\pi(c+id)}$

wo $b = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel ist.

Beweis. Unmittelbar aus 521.

525. **Satz.** $\epsilon^a + i\epsilon^b \cdot \epsilon^{c+id} = \epsilon^{(a+c)} + i\epsilon^{(b+d)}$.

Beweis. $\epsilon^a + i\epsilon^b \cdot \epsilon^{c+id} = \epsilon^a \cdot \epsilon^b \cdot \epsilon^c \cdot \epsilon^d$
 $= \epsilon^a + c \cdot \epsilon^b + d$ (nach 502)
 $= \epsilon^a + c\epsilon^{i(b+d)}$ (nach 510)
 $= \epsilon^a + c + i(b+d)$ (nach 510)

526. **Satz.** $(a + ib)^{c+id} \cdot (a + ib)^{f+ig} = (a + ib)^{(c+f+i(d+g))}$.

Beweis. Es sei $a + ib = e^{\alpha + i\beta}$ wo β ein echter Winkel, so ist

$$\begin{aligned}(a + ib)^{c+id} \cdot (a + ib)^{f+ig} &= (e^{\alpha + i\beta})^{(c+id)} (e^{\alpha + i\beta})^{(f+ig)} \\ &= e^{(\alpha + i\beta)(c+id)} \cdot e^{(\alpha + i\beta)(f+ig)} && \text{(nach 522)} \\ &= e^{(\alpha + i\beta)(c+di) + (\alpha + i\beta)(f+ig)} && \text{(nach 525)} \\ &= e^{(\alpha + i\beta)(c+f+i(d+g))} \\ &= (e^{\alpha + i\beta})^{(c+f+i(d+g))} && \text{(nach 522)} \\ &= a + ib^{(c+f+i(d+g))}.\end{aligned}$$

527. **Satz.** $(a + ib)^{-(c+id)} = \left(\frac{1}{a + ib}\right)^{(c+id)}$.

Beweis.

$$(a + ib)^{(c+id)} \cdot (a + ib)^{-(c+id)} = (a + ib)^{c+id-(c+id)} = (a + ib)^0 = 1$$

(nach 526)

$$\text{also ist } (a + ib)^{-(c+id)} = \frac{1}{(a + ib)^{c+id}} \quad \text{(nach 332).}$$

528. **Satz.** $(a + ia_1)^{n+im} \cdot (b + ib_1)^{n+im} \dots$

$$= ((a + ia_1)(b + ib_1) \dots)^{n+im} \cdot \epsilon^{2p\pi(n+im)} \quad \text{wo die Summe von}$$

$\alpha_1 + \beta_1 + \dots = 2p\pi + r$, wo r ein echter Winkel, auch $a + ia_1$
 $= e^{\alpha + i\alpha_1}$ u. f. w.

Beweis. Es sei $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$, $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1} \dots$, wo $\alpha_1, \beta_1 \dots$ echt und die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \dots = 2p\pi + r$ und r ein echter Winkel, so ist

$$\begin{aligned} (a + ia_1)^{n+im} \cdot (b + ib_1)^{n+im} \dots &= (e^{\alpha + i\alpha_1})^{n+im} \cdot (e^{\beta + i\beta_1})^{n+im} \dots \\ &\quad \text{(nach Annahme)} \\ &= e^{(\alpha + i\alpha_1)(n+im)} \cdot e^{(\beta + i\beta_1)(n+im)} \dots \quad \text{(nach 522)} \\ &= e^{[(\alpha + i\alpha_1)(n+im) + (\beta + i\beta_1)(n+im) + \dots]} \quad \text{(nach 526)} \\ &= e^{(\alpha + i\alpha_1 + \beta + i\beta_1 + \dots)(n+im)} \quad \text{(nach 91)} \\ &= (e^{(\alpha + i\alpha_1 + \beta + i\beta_1 + \dots)})^{n+im} \cdot e^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach 524)} \\ &= (e^{\alpha + i\alpha_1} e^{\beta + i\beta_1} \dots)^{n+im} \cdot e^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach 526)} \\ &= ((a + ia_1)(b + ib_1) \dots)^{n+im} \cdot e^{2p\pi(n+im)} \quad \text{(nach Annahme).} \end{aligned}$$

Satz. $(a + ia_1)^{(m+im_1) \cdot (n+in_1)} = ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} \cdot e^{2p\pi(n+in_1)}$ 529.
wo α_1 echt und $\alpha_1(m + im_1) = 2p\pi + r$, und r echt, auch $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$.

Beweis. Es sei $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$ wo α_1 echt und sei $\alpha_1(m + im_1) = 2p\pi + r$ wo r ein echter Winkel, so ist

$$\begin{aligned} (a + ia_1)^{(m+im_1)(n+in_1)} &= (e^{\alpha + i\alpha_1})^{(m+im_1)(n+in_1)} \quad \text{(nach Annahme)} \\ &= e^{(\alpha + i\alpha_1)(m+im_1)(n+in_1)} \quad \text{(nach 522)} \\ &= [e^{(\alpha + i\alpha_1)(m+im_1)}]^{n+in_1} \cdot e^{2p\pi(n+in_1)} \quad \text{(nach 524)} \\ &= [(e^{\alpha + i\alpha_1})^{m+im_1}]^{n+in_1} \cdot e^{2p\pi(n+in_1)} \quad \text{(nach 522)} \\ &= ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} \cdot e^{2p\pi(n+in_1)} \\ &\quad \text{(nach Annahme).} \end{aligned}$$

Satz. Wenn $e^{a+ia_1} = e^{b+ib_1}$, so ist $a_1 = b_1 + 2a\pi$ und $a + ia_1 = b + ib_1 + 2a\pi i$.

Beweis. Es ist $e^{a+ia_1} = e^a e^{ia_1}$ und $e^{b+ib_1} = e^b e^{ib_1}$
mithin ist $e^a e^{ia_1} = e^b e^{ib_1}$, d. h. es muss $e^a = e^b$ und $e^{ia_1} = e^{ib_1}$ sein.
Da nun e eine Plusgröße und a und b reell, so muss auch $a = b$ sein (nach 333) und da $e^{ia_1} = e^{ib_1}$ ist, so muss auch der Winkel $a_1 = b_1 + 2a\pi$ sein, d. h. es muss $a + ia_1 = b + ib_1 + 2a\pi i$ sein.

Satz.

531.

Wenn $(a + ia_1)^x = b + ib_1$ ist, so ist $x = \frac{\beta + i\beta_1 + 2a\pi i}{\alpha + i\alpha_1}$

wo $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$.

Beweis. Man setze $a + ia_1 = e^{\alpha + ia_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$, so ist $e^{\beta + i\beta_1} = (e^{\alpha + ia_1})^x = e^{(\alpha + ia_1)x}$, also $(\alpha + ia_1)x = \beta + i\beta_1 + 2\pi i$, mithin $x = \frac{\beta + i\beta_1 + 2\pi i}{\alpha + ia_1}$.

3. Die RichtgröÙe im Loge (im Logarithmus).

Da wir bereits die RichtgröÙe im Exponenten oder in der Stufe kennen, so macht die RichtgröÙe im Logarithmus oder im Loge keine Schwierigkeiten und können wir sofort zu den Sätzen übergehen.

532. **Erklärung.** Unter dem allgemeinen oder mehrwertigen Loge

(Logarithmus) $\frac{b + ib_1}{a + ia_1}$ einer RichtgröÙe $b + ib_1$ in Bezug auf eine andere RichtgröÙe $a + ia_1 > 1$ als Base verstehen wir die gesammte Reihe der GröÙen x , zu welchen $a + ia_1$ erhöht (potenzirt), $b + ib_1$ liefert.

Unter dem einfachen oder einwertigen Loge (Logarithmus) $\frac{b + ib_1}{a + ia_1}$ einer RichtgröÙe $b + ib_1$ in Bezug auf eine andere RichtgröÙe $a + ia_1 > 1$ als Base verstehen wir den Ausdruck $\frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + ia_1}$, wo $a + ia_1 = e^{\alpha + ia_1}$ und $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$ und α_1 und β_1 echte Winkel find.

Den mehrwertigen Log bezeichnen wir durch \underline{a} wo die Punkte in der obersten Linie die mehren Werte bezeichnen. Zwei mehrwertige GröÙen dürfen immer nur entsprechend gleich (Zeichen \cong) gesetzt werden, d. h. so, dass jeder einfache einwertige Wert derselben dem entsprechenden Werte gleich gesetzt wird.

533. **Satz.** $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + ia_1}} \cong \frac{\beta + i\beta_1 + 2\pi i}{\alpha + ia_1}$.

Beweis. Unmittelbar aus 531 und 532.

534. **Satz.** $\frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \cong \beta + i\beta_1 + i2\pi$.

Beweis. Unmittelbar aus 533.

535. **Satz.** $\text{le}(a + ib) = \frac{1}{2}\text{le}(a^2 + b^2) + i\text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right)$ wo $\frac{b}{a}$ echter Winkel

$\text{le}(a + ib) \cong \frac{1}{2}\text{le}(a^2 + b^2) + i\left[\text{arc}\left(\tan = \frac{b}{a}\right) \pm \pi\right]$ wo $\frac{b}{a}$ echter Winkel und zwar ist, wenn a eine PlusgröÙe

$$\mathfrak{I}_e(a + ib) \cong \frac{1}{2} \mathfrak{I}_e(a^2 + b^2) + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm 2a\pi \right],$$

dagegen wenn a eine Strichgröße

$$\mathfrak{I}_e(a + ib) \cong \frac{1}{2} \mathfrak{I}_e(a^2 + b^2) + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm (2a - 1)\pi \right].$$

Beweis. Es ist nach 521 $a + ib = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)$, wo β echt. Hier ist $a = e^{\alpha} \cos \beta$, $b = e^{\alpha} \sin \beta$ und $e^{\alpha} = (a^2 + b^2)^{1/2}$ (nach 426), mithin ist $\cos \beta = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$, $\sin \beta = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$, $\tan \beta = \frac{b}{a}$ und $\beta = \arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm \pi$, da β zwischen $+\pi$ und $-\pi$, dagegen \arctan zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen ist, mithin ist nach 534

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_e(a + ib) &\cong (a + i\beta \pm 2a\pi) \\ &\cong \mathfrak{I}_e(a^2 + b^2)^{1/2} + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm a\pi \right], \end{aligned}$$

mithin ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wenn nun $a = e^{\alpha} \cos \beta$ eine Plusgröße ist, so muss, da auch $e^{\alpha} = (a^2 + b^2)^{1/2}$ nach 271 eine Plusgröße ist, wenn wir $b = 0$, also $\sin \beta = 0$, $\cos \beta = \pm 1$ setzen, $\cos \beta$ eine Plusgröße $= +1$ sein. Wenn dagegen a eine Strichgröße, d. h. negativ, so muss $\cos \beta$ eine Strichgröße $= -1$ sein. Mit andern Worten, wenn a eine Plusgröße, so ist der echte Winkel $\beta = 0$, wenn a eine Strichgröße, so ist der echte Winkel $\beta = -\pi$; daraus folgt der zweite Teil des Satzes.

Beispiele. Sei z. B. $a = +1$, so ist $\mathfrak{I}_e(+1) \cong i \cdot 2a\pi$, sei dagegen $a = -1$, so ist $\mathfrak{I}_e(-1) \cong i(2a + 1)\pi$, da dann $b = 0$, also $\arctan(\tan = 0) = 0$ ist.

$$\text{Satz. } \mathfrak{I}_e \frac{a + ia_1}{a - ia_1} = 2i \arctan \frac{a_1}{a} \text{ wo } \frac{a_1}{a} \text{ echter Winkel; } \quad 536.$$

$$\mathfrak{I}_e \left(\frac{a + ia_1}{a - ia_1} \right) \cong 2i \left[\arctan \left(\tan = \frac{a_1}{a} \right) \pm a\pi \right].$$

$$\text{Satz. } \frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha}} \cong \frac{\beta + 2a\pi}{a}. \quad 537.$$

$$\text{Beweis. } \frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha}} \cong \frac{e^{i\beta}}{e^{i\alpha}} \cong \frac{i\beta + 2ia\pi}{ia} = \frac{\beta + 2a\pi}{a}.$$

$$\text{Satz. } \frac{b + ib_1}{a + ia_1} \cong \frac{b + ib_1}{a + ia_1} + 2ia\pi \frac{e}{a + ia_1}. \quad 538.$$

Beweis. Es sei $b + ib_1 = e^{\beta + i\beta_1}$ und $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$, wo α_1 und β_1 echt, so ist

$$\frac{b + ib_1}{a + ia_1} \cong \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \cong \frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + ia_1} + 2ia\pi \frac{1}{\alpha + ia_1} \quad (\text{nach 532})$$

$$\cong \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} + 2ia\pi \frac{e}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \quad (\text{nach 533})$$

$$\cong \frac{b + ib_1}{a + ia_1} + 2ia\pi \frac{e}{a + ia_1} \quad (\text{nach Annahme}).$$

539. Satz. $\frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ wenn β und α ächte Winkel find.

540. Lehratz für Richtloge (komplexe Logarithmen). Es ist allgemein

$$\begin{aligned} (a + ia_1) \frac{e^{\alpha + i\alpha_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + (b + ib_1) \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + \dots \\ = \frac{(e^{\alpha + i\alpha_1})^{a + ia_1} \cdot (e^{\beta + i\beta_1})^{b + ib_1} \dots}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + 2in\pi \frac{e}{e^{\varrho + i\varrho_1}}, \end{aligned}$$

wo α_1, β_1, \dots und p echte Winkel und $a\alpha_1 + a\alpha_1 + b\beta_1 + \beta b_1 + \dots = 2n\pi + p$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(e^{\alpha + i\alpha_1})^{a + ia_1} \cdot (e^{\beta + i\beta_1})^{b + ib_1} \dots}{e^{\varrho + i\varrho_1}} &= \frac{e^{(\alpha + i\alpha_1)(a + ia_1)} \cdot e^{(\beta + i\beta_1)(b + ib_1)} \dots}{e^{\varrho + i\varrho_1}} \\ &= \frac{e[(\alpha + i\alpha_1)(a + ia_1) + (\beta + i\beta_1)(b + ib_1) + \dots]}{e^{\varrho + i\varrho_1}} \quad (\text{nach 522}) \\ &= \dots \quad (\text{nach 526}). \end{aligned}$$

Hier ist die Gröse $e[(\alpha + i\alpha_1)(a + ia_1) + (\beta + i\beta_1)(b + ib_1) + \dots]$ (nach 517) eine Winkeleinheit ε^m wo $m = 2n\pi + p$ und p ein echter Winkel, und $\varepsilon^m = e^{im} = e^{2in\pi + ip}$ also ist

$$\begin{aligned} \frac{(e^{\alpha + i\alpha_1})^{a + ia_1} \cdot (e^{\beta + i\beta_1})^{b + ib_1} \dots}{e^{\varrho + i\varrho_1}} &= \frac{e^{2in\pi + ip}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} = \frac{e^{ip}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} = \frac{ip}{\varrho + i\varrho_1} \\ &= \frac{(\alpha + i\alpha_1)(a + ia_1) + (\beta + i\beta_1)(b + ib_1) + \dots}{\varrho + i\varrho_1} - 2in\pi \frac{1}{\varrho + i\varrho_1} \\ &= (a + ia_1) \frac{\alpha + i\alpha_1}{\varrho + i\varrho_1} + (b + ib_1) \frac{\beta + i\beta_1}{\varrho + i\varrho_1} + \dots - 2in\pi \frac{1}{\varrho + i\varrho_1} \\ &= (a + ia_1) \frac{e^{\alpha + i\alpha_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + (b + ib_1) \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + \dots - 2in\pi \frac{e}{e^{\varrho + i\varrho_1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \quad 541.$$

$$= \frac{(a + ia_1)(b + ib_1)}{r + ir_1} \dots + \frac{2in\pi e}{r + ir_1},$$

wo $a + ia_1 = e^{\alpha + ia_1}$, $b + ib_1 = e^{\beta + ib_1}$ und $\alpha + \beta_1 + \dots = 2n\pi + p$,
wo p echt ist.

$$\text{Satz. } (a + ia_1) \frac{e^{\alpha + ia_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} = \frac{(e^{\alpha + ia_1})^{a + ia_1}}{e^{\varrho + i\varrho_1}} + \frac{2in\pi e}{e^{\varrho + i\varrho_1}}, \quad 542.$$

wo $aa_1 + a, \alpha = 2n\pi + p$ und wo α_1 und p echt sind.

Beweis. Unmittelbar aus 540.

$$\text{Satz. } \frac{a + ia_1}{(e^{\varrho + i\varrho_1})^{b + ib_1}} = \frac{a + ia_1}{e^{\varrho + i\varrho_1}} : (b + ib_1), \text{ wenn } \varrho b_1 + b\varrho_1 = c, \quad 543.$$

wo c ein echter Winkel.

Beweis. Sei $a + ia_1 = e^{\alpha + ia_1}$, so ist nach 522

$$\frac{a + ia_1}{(e^{\varrho + i\varrho_1})^{b + ib_1}} = \frac{e^{\alpha + ia_1}}{e^{(\varrho + i\varrho_1)(b + ib_1)}} = \frac{\alpha + ia_1}{(\varrho + i\varrho_1)(b + ib_1)}$$

$$= \frac{\alpha + ia_1}{\varrho + i\varrho_1} : (b + ib_1) = \frac{a + ia_1}{e^{\varrho + i\varrho_1}} : (b + ib_1).$$

Satz. Es ist 544.

$$\alpha \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \beta \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \cong \frac{(a + ia_1)^\alpha \cdot (b + ib_1)^\beta \dots}{r + ir_1}$$

dann und nur dann, wenn $\alpha, \beta \dots$ sämtlich ganze Zahlen sind und es irgend zwei unter ihnen giebt, welche Eins zum grössten gemeinschaftlichen Masse haben.

Beweis. Um zu untersuchen, in welchem Falle die obige Formel gelte, prüfen wir die Ausdrücke.

$$(\alpha + ia_1) \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + (\beta + ib_1) \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \cong$$

$$\cong (\alpha + ia_1) \left(\frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{2ia\pi e}{r + ir_1} \right)$$

$$+ (\beta + ib_1) \left(\frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \frac{2ib\pi e}{r + ir_1} \right) + \dots, \text{ wo } a, b \dots \text{ jede beliebige ganze Zahl} \quad (\text{nach 538})$$

$$\cong (\alpha + ia_1) \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + (\beta + ib_1) \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots$$

$$+ \frac{2i\pi e}{r + ir_1} (a(\alpha + ia_1) + b(\beta + ib_1) + \dots)$$

$$\cong \frac{(a + ia_1)^{\alpha + ia_1} \cdot (b + ib_1)^{\beta + i\beta_1} \dots}{r + ir_1} + 2i\pi \frac{e}{r + ir_1} (\nu + a(\alpha + ia_1) + b(\beta + i\beta_1) + \dots) \quad (\text{nach 540}),$$

wo $a + ia_1 = e^{\alpha' + ia_1'}$, $b + ib_1 = e^{\beta' + i\beta_1'}$... und $(a + ia_1)(\alpha' + ia_1') + (\beta + i\beta_1)(\beta' + i\beta_1') + \dots = 2i\pi\nu + in$, wo n ein echter Winkel.

Andrerseits ist

$$\frac{(a + ia_1)^{\alpha + ia_1} \cdot (b + ib_1)^{\beta + i\beta_1} \dots}{r + ir_1} \cong \frac{(a + ia_1)^{\alpha + ia_1} \cdot (b + ib_1)^{\beta + i\beta_1} \dots}{r + ir_1} + 2i\pi \frac{e}{r + ir_1} \cdot n \quad (\text{nach 538}),$$

wo n jede beliebige ganze Zahl darstellt. Somit sind die beiden obigen Ausdrücke dann und nur dann gleich, wenn auch

$\nu + a(\alpha + ia_1) + b(\beta + i\beta_1) + \dots = n$ jede beliebige ganze Zahl und keine andere als eine ganze Zahl darstellt, d. h. wenn die Größen $\alpha + ia_1$, $\beta + i\beta_1$ ganze Zahlen sind, und entweder eine von ihnen oder eine durch Zufügen oder Abziehen abgeleitete GröÙe gleich Eins ist.

545. **Satz.** $\frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \cong \frac{(a + ia_1)(b + ib_1) \dots}{r + ir_1}.$

Beweis. Unmittelbar aus 544.

4. Die RichtgröÙe im Winkel.

Nach den Vorbemerkungen zu Nummer 510 haben wir bereits gesehen, dass wenn man die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ auch für ix statt x anwendet, dass dann

$e^x = e^{-ix} = \cos ix - i \sin ix$ und $e^{-x} = e^{ix} = \cos ix + i \sin ix$ ist, dies führt uns bereits auf die Bedeutung der RichtgröÙe im Winkel; es ist hienach

$$\begin{aligned} \cos ix &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = i \frac{e^{-ix} - e^x}{2} \end{aligned}$$

und kann man hienach leicht die RichtgröÙe im Winkel erklären.

546. **Erklärung.** Unter den RichtgröÙen $\sin(a + ib)$ und $\cos(a + ib)$ verstehen wir die RichtgröÙen, für welche

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ \cos(x + iy) &= \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \text{ ist.}\end{aligned}$$

Da nach 530, wenn $e^{y-ix} = e^{c-id}$ ist, auch $x = d + 2a\pi$ sein muss, so folgt, dass wenn $\sin(x+iy) = \sin(c+id)$, und zugleich $\cos(x+iy) = \cos(c+id)$ sein soll, dann auch $x = d + 2a\pi$ sein muss, d. h. die Formel, welche wir bereits für die Sinus und Cosinus reeller Winkel kennen gelernt haben.

$$\text{Satz. } \sin iy = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \quad 547.$$

Beweis. Unmittelbar aus 545, wenn man $x = 0$ setzt.

Man nennt die Formel $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$ gewöhnlich den hyperbolischen

Cosinus (Zeichen chpy) und die Formel $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sin iy$ den hyperbolischen Sinus (Zeichen shpy). Viel besser ist es $\sin iy$ und $\cos iy$ einzuführen, dann behalten die Formeln ihre harmonische Gestalt, so bleibt $(\sin iy)^2 + (\cos iy)^2 = 1$, dagegen wird $(\text{chpy})^2 - (\text{shpy})^2 = 1$ und so in vielen Fällen; man tut daher besser, diese unnütze neue Bezeichnung des hyperbolischen Sinus und Cosinus wieder abzuschaffen.

$$\begin{aligned}\text{Satz. } \sin(x + iy) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x \\ &= (\sin x) \cos iy + (\cos x) \sin iy \\ \cos(x + iy) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \\ &= (\cos x) \cos iy - (\sin x) \sin iy.\end{aligned} \quad 548.$$

Beweis. Nach 545 ist

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = i \frac{e^y \cdot e^{-ix} - e^{-y} \cdot e^{+ix}}{2} \\ &= i \frac{e^y (\cos x - i \sin x) - e^{-y} (\cos x + i \sin x)}{2} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x \\ &= (\sin x) \cos iy + (\cos x) \sin iy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(x + iy) &= \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^y \cdot e^{-ix} + e^{-y} \cdot e^{ix}}{2} \\
 &= \frac{e^y(\cos x - i \sin x) + e^{-y}(\cos x + i \sin x)}{2} \\
 &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \\
 &= (\cos x) \cosh y - (i \sin x) \sinh y.
 \end{aligned}$$

549. **Satz.**

$$\begin{aligned}
 \tan(x + iy) &= \frac{2 \sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + 2 \cos 2x + e^{-2y}} = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \\
 \cot(x + iy) &= -\frac{\sin 2x - i \sinh 2y}{\cos 2x - \cosh 2y}.
 \end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\tan(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{(e^y + e^{-y}) \sin x + i(e^y - e^{-y}) \cos x}{(e^y + e^{-y}) \cos x - i(e^y - e^{-y}) \sin x}.$$

Und wenn man hier Zähler und Nenner mit

$(e^y + e^{-y}) \cos x + i(e^y - e^{-y}) \sin x$
vervielfacht, so wird der Nenner reell und

$$\tan(x + iy) = \frac{2 \sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + 2 \cos 2x + e^{-2y}} = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

Ebenso folgt $\cot(x + iy) = -\frac{\sin 2x - i \sinh 2y}{\cos 2x - \cosh 2y}.$

550. **Satz.** $\arctan(x) = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix}.$

Beweis. Unmittelbar aus 536.

551. **Satz.** $\arcsin(x) = \frac{1}{2i} \log \frac{(1 - x^2)^{1/2} + ix}{(1 - x^2)^{1/2} - ix}.$

Beweis. Es ist $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}\right)$

(nach 491)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \frac{ix}{(1 - x^2)^{1/2}}}{1 - \frac{ix}{(1 - x^2)^{1/2}}} \\
 &= \frac{1}{2i} \log \frac{(1 - x^2)^{1/2} + ix}{(1 - x^2)^{1/2} - ix}.
 \end{aligned}$$

Satz.

552.

$$\arcsin(a + ib) = x + iy; \quad \arccos(a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

Beweis.

$$\sin(x + iy) = (\sin x) \cos iy + (\cos x) \sin iy \quad (\text{nach 548})$$

$$= (\sin x) \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i(\cos x) \frac{e^y - e^{-y}}{2} = a + ib$$

(nach 547)

$$\text{wo } a = (\sin x) \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad b = (\cos x) \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Es ist aber auch

$$a + ib = \sin(x + iy) = [\cos(90^\circ - x)] \cos iy + [\sin(90^\circ - x)] \sin iy \quad (\text{nach 452})$$

$$= \cos((90^\circ - x) - y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right)$$

(nach 547).

Daraus ergiebt sich unmittelbar der Satz

$$\arcsin(a + ib) = x + iy, \quad \arccos(a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

$$\text{Satz. } \arcsin(a + ib) + \arccos(a + ib) = \frac{\pi}{2}. \quad 553.$$

Unmittelbar aus 552 durch Zufügung.

$$\text{Satz. } \arctan(c + id) = x + iy; \quad 554.$$

$$\operatorname{arccot}(c + id) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

$$\text{Satz. } \arctan(c + id) + \operatorname{arccot}(c + id) = \frac{\pi}{2}. \quad 555.$$

Unmittelbar aus 554.

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die erweiternde Zahlenlehre oder die Lehre von den Gleichungen.

Die Lehre von den Gleichungen bildet den höchsten Zweig der Zahlenlehre, sie setzt die andern Zweige derselben bereits voraus, namentlich setzt sie den Zweigliederatz oder binomischen Lehratz 393 aus dem zweiten Abschnitte und die Lehre von den Richtgrößen voraus.

Aus der Lehre von den Richtgrößen oder komplexen Größen gebraucht man namentlich die Sätze, dass $a + ia_1 = b + ib_1$ dann und nur dann, wenn $a = b$, und $a_1 = b_1$ und wo $i = (-1)^{1/2}$, ferner dass, wenn $(a^2 + b^2)^{1/2} = c$, oder wenn $a^2 + b^2 = c^2$, d. h. wenn a und b die Katheten und c die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreiecke sind, dass dann

$a + ib = c \left(\frac{a}{c} + i \frac{b}{c} \right) = c(\cos \beta + i \sin \beta)$ ist, dass $c = \cos 1 + i \sin 1$

und dass

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = (\cos \alpha) \cdot \cos \beta - (\sin \alpha) \cdot \sin \beta + i[(\sin \alpha) \cdot \cos \beta + (\cos \alpha) \cdot \sin \beta] \\ = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

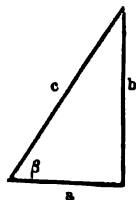
nach einem bekannten Satze der Trigonometrie,

mithin $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$ und

$\epsilon^\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\epsilon^{\alpha + \beta} = \epsilon^\alpha \cdot \epsilon^\beta$, auch $(\epsilon^\alpha)^c = \epsilon^c \cdot \epsilon^{\alpha c}$, wenn α zwischen $-\pi$ und $+\pi$, d. h. ein echter Winkel ist.

Will man nicht den dritten Abschnitt durchnehmen, so muss man wenigstens diese Sätze vollkommen anschaulich machen und beweisen.

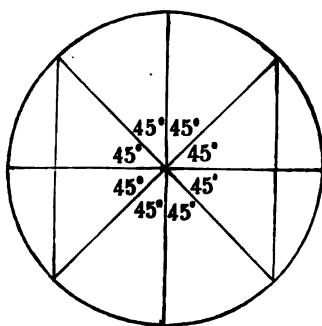
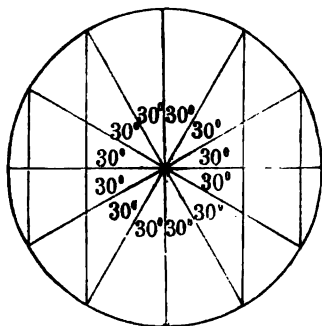
Hieraus hat sich der Satz 498 ergeben, der für die Lehre von den höhern Gleichungen die Einleitung bildet.



Wenn $x^n = 1$, wo n eine ganze Zahl, so ist

$$\sqrt[n]{x^n} \cong x_a \cong \cos \frac{2a\pi}{n} + i \sin \frac{2a\pi}{n} = \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}},$$

wo a alle ganzen Werte von 0 bis $n-1$ haben kann, und $2\pi = 360^\circ$.



Beispiele. Es sei

$$x^8 = 1, \text{ so ist } \frac{2a\pi}{8} = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ.$$

Es sei $x^{12} = 1$, so ist

$$\frac{2a\pi}{12} = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ.$$

Für die höhern Gleichungen pflegt man gewöhnlich die Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

zu Grunde zu legen; aber diese Form muss verworfen werden, da sie nicht mit der Form der Reihen übereinstimmt und daher leicht zu Verwirrungen Anlass giebt. Bei den Reihen giebt man dem Gliede x^n die Vorzahl a_n , ebenso muss man es daher auch bei den Gleichungen machen, ich lege daher die Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

auch für die Gleichungen zu Grunde.

Die Lehre von den Gleichungen ist im Jahre 1847 von meinem Bruder und mir gemeinschaftlich ausgearbeitet worden, damals mit Benutzung der Ausdehnungslehre und der äussern Produkte. Die Sätze sind bereits damals im Wesentlichen in der jetzigen Form abgeleitet. Die Gleichungen dritten und vierten Grades sind jedoch damals nicht von uns behandelt worden, ebenso nicht die neuern Lösungswege für höhere Gleichungen.

Die Sätze über die Gleichungen ersten Grades sind bereits in Satz 302 bis 314 aufgestellt; ich erlaube mir aber im Folgenden diese Sätze hier zu wiederholen, um alle Gleichungssätze hier beisammen zu haben.

Die Lehre von den quadratischen Gleichungen ist so gehalten, dass man dieselben auch sofort nach Satz 393 durchnehmen kann.

Die Lehre von den kubischen Gleichungen und von den biquadratischen Gleichungen ist so gehalten, dass die Lösung darnach leicht zu finden ist.

Das Buch schliesst mit der Lösung der höhern Gleichungen durch Näherung.

13. Die allgemeinen Sätze über die Gleichungen.

556. **Erklärung.** Die Unbekannte heist die GröÙe x einer Gleichung, deren Wert gesucht werden soll.

Eine Wurzel der Gleichung heist der bestimmte Wert, welcher, statt der Unbekannten eingeführt, der Gleichung genügt. Hat man die Wurzel gefunden, so sagt man, die Gleichung sei aufgelöst.

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so heist die Reihe von n bestimmten Werten, welche den n Gleichungen genügt, die Wurzelreihe der n Gleichungen.

Aus zwei Gleichungen mit einer Unbekannten eine neue Gleichung ableiten, welche diese Unbekannte nicht enthält, heist die Unbekannte entfernen (eliminiren).

557. **Satz.** Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung mit gleichen GröÙen auf gleiche Weise knüpft, namentlich wenn man auf beiden Seiten Gleiches fügt, bei trennbarer Fügung Gleiches abzieht, mit Gleichem webt und bei trennbarer Webung durch Gleiches (ungleich Null) teilt.

Beweis. Aus Satz 17 oder aus 303.

558. **Satz.** Statt auf einer Seite der Gleichung ein Stück zuzufügen oder einen Abzug abzuziehen, kann man auf der andern Seite das Stück abziehen, oder den Abzug zufügen, und

Statt eine Seite mit einem Fache zu vervielfachen oder durch einen Nenner zu teilen, kann man die andere Seite durch das Fach teilen, oder mit dem Nenner vervielfachen, d. h.

$$\text{wenn } a + c = b, \text{ so } a = b - c,$$

$$\text{wenn } a - c = b, \text{ so } a = b + c,$$

$$\text{wenn } ac = b, \text{ so } a = \frac{b}{c},$$

$$\text{wenn } \frac{a}{c} = b, \text{ so } a = bc.$$

Beweis. Unmittelbar aus 303.

559. **Satz.** Ein Glied schafft man von einer Seite weg, indem man es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite der Gleichung stellt.

Ein Fach oder einen Nenner eines Gliedes schafft man weg, indem man alle andern Glieder durch das Fach teilt, oder mit dem Nenner vervielfacht.

Beweis. Unmittelbar aus 304.

Satz. Statt die eine Seite einer Gleichung zu einer Stufe zu 560. erhöhen oder zu einer Senke zu tiefen, kann man die andere Seite der Gleichung zu der Stufe tiefen oder zu der Senke erhöhen, und

Statt eine Seite der Gleichung mit einer Base a zu erhöhen oder nach einer Base b zu logen, kann man die andere Seite nach der Base a logen oder mit der Base b erhöhen, d. h.

$$\begin{array}{ll} \text{wenn } a^n = b, \text{ so } a = b^{\frac{1}{n}}, & \text{wenn } a^{\frac{1}{n}} = b, \text{ so } a = b^n, \\ \text{wenn } n^a = b, \text{ so } a = \frac{b}{n}, & \text{wenn } \frac{a}{n} = b, \text{ so } a = n^b. \end{array}$$

Beweis. Unmittelbar aus 343 und 344.

Satz. Man kann die Vorzeichen aller Glieder einer Gleichung 561. entgegengesetzt nehmen.

Beweis. Man kann beide Seiten der Gleichung mit -1 vervielfachen, dann aber werden alle Zeichen entgegengesetzt (nach 158).

Beispiele. $a - x = b - c, \quad x - a = c - b.$

Satz. Wenn beide Seiten der Gleichung Brüche find, deren 562. Zähler ungleich Null, so kann man beide Brüche umkehren.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $1 : \frac{a}{b} = 1 : \frac{c}{d}$ (nach 303),

d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (nach 181), was zu beweisen war.

Erklärung. Eine Gleichung heist eingerichtet, wenn sie 563. die Form einer Höhenreihe hat, in welcher die höchste Höhe das Fach 1 hat, die Glieder mit Höhen von x auf der linken Seite und das Glied ohne x auf der rechten Seite der Gleichung steht (sie heist auf Null gebracht, wenn alle Glieder auf der einen Seite und 0 auf der andern Seite der Gleichung steht).

Die Gleichung heist n ten Grades, wenn x^n die höchste Höhe (Potenz) von x ist, sie heist ersten Grades, wenn die linke Seite der eingerichteten Gleichung nur x enthält.

Aufgabe. Eine Gleichung mit einer Unbekannten x einzurichten. 564.

Auflösung. Man schafft alle Nenner weg (nach Satz 559), löst die Klammern auf, welche x enthalten, schafft die Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die ohne x auf die rechte Seite, fasst in jedem Gliede die Fache oder Faktoren x zu einer Höhe zusammen, fügt die Glieder, welche gleiche Höhen von x enthalten, in ein Glied, ordnet die Glieder so, dass die höchste Höhe von x beginnt und die jedesmal niedere folgt. Ist dann die Vorzahl des ersten Gliedes Null,

so lasse man dies fort, ist sie nicht Null, so teile man jedes Glied durch dieselbe, so ist die Gleichung eingerichtet.

Beweis. Unmittelbar aus den vorhergehenden Sätzen.

565. **Satz. Eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten ist aufgelöst, wenn sie eingerichtet ist.**

Die Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten ist in den Sätzen 309 bis 314 gelehrt.

Einen weitem Weg der Auflösung lehrt die Ausdehnungslehre.

Die folgenden Sätze dieser Nummer können, wenn man nur die Gleichungen zweiten Grades durchnehmen will, weggelassen werden; dagegen werden sie für die Gleichungen höhern Grades gebraucht.

566. **Satz. Die Wurzeln der Gleichung $x^n = a$ sind**

$x_a = a^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$, wo a alle ganzen Werte von 0 bis $n - 1$ haben kann.

Beweis. $x^n = a = a \cdot 1$, mithin $x_a = a^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{1} = a^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$.

567. **Satz. Jede Gleichung n ten Grades hat mindestens eine Wurzel.**

Beweis. Es sei $A = 0$ diese Gleichung, wo A eine Gleichung n ten Grades von x ist; es ist zu zeigen, dass es allemal einen Wert von x giebt, welcher der Gleichung genügt.

Man kann zuerst zeigen, dass man, wenn für irgend einen Wert x der Ausdruck A , also auch sein Pluswert noch nicht Null ist, stets x so ändern kann, dass der Pluswert von A , welcher mit a bezeichnet sein mag, kleiner wird als er war. Hieraus folgt dann, dass der kleinste Wert von a nicht von Null verschieden sein kann, dass er also Null sein muss, und da unter allen Werten, welche a bei beliebigem x annehmen kann, doch einer der kleinste sein muss, so wird dann bewiesen sein, dass es Werte von x geben muss, für welche a , und also auch A gleich Null wird. Man setze also in A überall $x + y$ statt x , und gehe dadurch der Ausdruck A in B über. Jedes Glied von B lässt sich dann nach dem Zweigliederfatze (binomischen Lehrfatze 393) in einer nach y steigenden Höhenreihe entwickeln, deren erstes Glied gleich dem entsprechenden Gliede von A ist; zieht man daher A von B ab, so erhält man eine nach y steigende Höhenreihe, in welcher notwendig das erste Glied (d. h. die Vorzahl von y^0) Null ist, übrigens auch eines oder mehrere der folgenden Glieder Null sein können. Das erste Glied, was nicht Null ist, sei Cy^p , wo p also > 0 , und die folgenden Glieder höhere Höhen von y enthalten, also

$$B - A = Cy^p + \dots$$

Setzen wir, um die Pluswerte einzuführen,

$$A = a\epsilon^\alpha, B = b\epsilon^\beta, C = c\epsilon^\gamma, y = u\epsilon^\zeta,$$

wo a, b, c, u die Pluswerte, und wo $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ die echten Winkel der Winkelgrößen A, B, C, y sind, so geht die vorige Gleichung über in

$$b\epsilon^\beta - a\epsilon^\alpha = c\epsilon^\gamma(u\epsilon^\zeta)^p + \dots, \text{ d. h.}$$

$$b\epsilon^\beta = a\epsilon^\alpha + cu^p\epsilon^{\gamma+p\zeta} + \dots$$

$$= a(\cos\alpha + i\sin\alpha) + cu^p[\cos(\gamma + p\zeta) + i\sin(\gamma + p\zeta)] + \dots$$

(nach 500)

$$= a\cos\alpha + cu^p\cos(\gamma + p\zeta) + \dots + i[a\sin\alpha + cu^p\sin(\gamma + p\zeta) + \dots],$$

also (nach 426)

$$b^2 = [a\cos\alpha + cu^p\cos(\gamma + p\zeta) + \dots]^2 + [a\sin\alpha + cu^p\sin(\gamma + p\zeta) + \dots]^2,$$

$$= a^2((\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2) + 2acu^p[(\cos\alpha)\cos(\gamma + p\zeta)$$

$$+ (\sin\alpha)\sin(\gamma + p\zeta)] + \dots,$$

wo die folgenden Glieder schon höhere Höhen von u , als die p te, enthalten; also nach bekannten Sätzen der Trigonometrie

$$= a^2 + 2acu^p\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) + \dots, \text{ oder}$$

$$b^2 - a^2 = 2acu^p\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) + \dots$$

Da nun $y = u\epsilon^\zeta$ ein beliebig zu wählender Zuwachs von x ist, also u und ζ willkürlich gewählt werden können, so können wir ζ so wählen, dass $\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) = -1$ sei. Dies wird der Fall sein,

wenn wir $\zeta = \frac{\pi + \alpha - \gamma}{p}$ setzen, was immer möglich ist, da $p \geq 0$.

Dann wird in der Tat $\cos(\gamma + p\zeta - \alpha) = \cos\pi = -1$ und die obige Gleichung wird $b^2 - a^2 = -2acu^p + \dots$.

So lange a (der Pluswert von A) nicht Null ist, und auch u von Null verschieden, also als Plusgröße angenommen wird, bleibt acu^p Plusgröße. Nun können wir u stets so klein annehmen, dass $2acu^p$ größer wird als der Pluswert der Summe aller folgenden Glieder mit höhern Höhen von u . Dann wird also $-2acu^p + \dots$ eine Strichzahl, also auch $b^2 - a^2$ eine Strichzahl, d. h. $b^2 < a^2$, also auch $b < a$ (nach 377), d. h. der Pluswert von B ist kleiner als der von A . Also, wenn A noch nicht Null ist, so kann man x stets so ändern, dass der Pluswert a von A kleiner wird als vorher. Nun muss es aber Werte von x geben, für die a kleiner wird als für alle übrigen Werte von x . Für jene Werte kann, wie eben gezeigt, a nicht von Null verschieden sein, d. h. muss a Null sein. Also giebt es Werte von x , für die a , d. h. der Pluswert von A Null ist, also auch A selbst Null ist.

568. **Satz.** Es ist $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$
 $= a_0 + (a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1})(x - \alpha).$

wo $a_0 = a_0 + \alpha a_1$ und $a_\alpha = a_\alpha + \alpha a_{\alpha+1}$ und $a_{n-1} = a_{n-1} + \alpha$ ist.

Beweis. Führt man die Vervielfachung auf der rechten Seite aus, so erhält man

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$x - \alpha$$

$$\begin{array}{r} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \\ - \alpha a_1 - \alpha a_2x - \alpha a_3x^2 - \alpha a_4x^3 - \dots - \alpha x^{n-1}. \end{array}$$

Es ist aber $a_0 - \alpha a_1 = a_0$, $a_1 - \alpha a_2 = a_1$, $a_2 - \alpha a_3 = a_2$, ...

$a_{n-1} - \alpha = a_{n-1}$, also ist

$$(x - \alpha)(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}) + a_0$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

569. **Satz.** Wenn $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0$ ist, so ist diese Gleichung gleich $(x - \alpha)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + x^{n-1}) = 0$, wo $a_{\alpha-1} = a_\alpha + \alpha a_\alpha$ ist

oder

Es lässt sich dann die Gleichung $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilen und der Bruch (der Quotient) ist ein Ausdruck $(n - 1)$ ten Grades.

Beweis. Wenn man die in Satz 568 angegebenen Werte von a_1, a_2, \dots, a_n einführt, so erhält man

$$a_0 = a_0 + \alpha a_1, \quad a_\alpha = a_\alpha + \alpha a_{\alpha+1}, \quad \text{also} \quad a_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2,$$

$$a_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3 \quad \text{und endlich} \quad a_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3 + \dots + \alpha^{n-1} a_{n-1} + a^n.$$

Und da nun α statt x nach der Annahme der Gleichung genügt, so ist diese Gleichung $= 0$, d. h. $a_0 = 0$, mithin ist nach 568

$$a_0 + a_1x + \dots + x^n = (x - \alpha)(a_1 + a_2x + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}).$$

570. **Satz.** Jede Gleichung n ten Grades von der Form

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = 0$ lässt sich als ein Zeug (Produkt) von n Größen der Form $x - \alpha$ darstellen.

Beweis. Aus 567 und 569, wenn man diese Sätze wiederholt anwendet.

571. **Satz.** Jede Gleichung n ten Grades hat n Wurzeln, von denen aber mehr einander gleich werden können und

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, die Wurzeln einer Gleichung n ten Grades sind, so ist das Zeug der Größen $x - \alpha_1 \dots x - \alpha_n$ der Gleichung gleich, oder

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n).$$

Beweis. Nach 570 lässt sich, wenn $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = 0$ die gegebene Gleichung ist, die linke Seite als Zeug (Produkt) von n Größen der Form $x - \alpha$ darstellen. Es seien dies $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \dots, x - \alpha_n$, so hat man

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) = 0.$$

Jedes Zeug (Produkt) ist nach 175 dann und nur dann Null, wenn eines seiner Fache (Faktoren) Null ist, also ist entweder $x - \alpha_1 = 0$, oder $x - \alpha_2 = 0$ u. f. w., d. h. es ist entweder $x = \alpha_1$ oder $x = \alpha_2$ u. f. w. oder $x = \alpha_n$ oder es sind diese n Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung. Und umgekehrt, wenn dies n Wurzeln der Gleichung sind, so folgt nach 569 die Gleichung

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) = 0.$$

Satz. In einer Gleichung n ten Grades

572.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = 0$ ist die Summe der n Wurzeln gleich $-\alpha_{n-1}$, die Summe der Zeuge oder Produkte von je zweien derselben $= \alpha_{n-2}$, die Summe der Zeuge von je dreien derselben $= -\alpha_{n-3}$ u. f. w., die Summe der Zeuge von je r derselben $= \alpha_{n-r} \cdot (-1)^r$.

Beweis. Denn wenn die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sind, so ist (nach 571)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Entwickelt man nun die rechte Seite nach Höhen von x , so erfolgt der zu erweisende Satz.

Satz. Wenn in einer Gleichung n ten Grades mit Vorzahlen (reellen 573. Koeffizienten) $a + ib$ eine Wurzel ist, so ist auch $a - ib$ eine solche.

Beweis. Es sei $A = 0$ die gegebene Gleichung n ten Grades für x . Setzt man nun $a + ib$ statt x , so verwandelt sich A (nach 426) in einen Ausdruck der Form $B + iC$, und wenn man $a - ib$ statt x setzt, in $B - iC$. Wenn nun $a + ib$ eine Wurzel der Gleichung ist, so muss $B + iC = 0$ sein, d. h. (nach 426), $B = 0$, $C = 0$; dann ist also auch $B - iC = 0$, d. h. auch $a - ib$ ist dann eine Wurzel der Gleichung $A = 0$.

Satz. Wenn man in einer Gleichung n ten Grades

574.

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ statt der Unbekannten x eine neue y einführt, welche mit x durch die Gleichung

$$x = y - \frac{a_{n-1}}{n}$$

verbunden ist, d. h. welche gegen x um den n ten Teil der zweiten Vorzahl (der Vorzahl von x^{n-1}) vermehrt ist und dann die Gleichung

nach y einrichtet, so ist die Vorzahl des zweiten Gliedes in der so erhaltenen Gleichung Null.

Beweis.

$$\begin{aligned} x^n &= \left(y - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^n = y^n - ny^{n-1} \frac{a_{n-1}}{n} + \dots \\ &= y^n - a_{n-1}y^{n-1} + \dots a_{n-1}x^{n-1} = a_{n-1} \left(y - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} \\ &= a_{n-1}(y^{n-1} - \dots) = a_{n-1}y^{n-1} - \dots, \\ \text{also } x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots &= y^n + 0 \cdot y^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

14: Die Gleichungen zweiten Grades oder die quadratischen Gleichungen.

Die quadratischen Gleichungen werden in den Schulen stets vor der Lehre von den Jgrößen (den komplexen Größen) durchgenommen, wissenschaftlich gehören sie erst in den letzten Abschnitt nach der Lehre von den Jgrößen (komplexen Größen), in diesem Buche müssen sie also an dieser Stelle ihre Behandlung finden. Um sie aber auch Jedem verständlich zu machen, der jene schwierige Lehre nicht durchgenommen hat, füge ich die folgende Erklärung in elementarer Form hier auf.

575. **Erklärung.** Jede GröÙe x , welche einer Gleichung von x Genüge tut, heist eine Wurzel dieser Gleichung. Das Zeichen der zweiten Wurzel ist \sqrt{x} , gelesen 2te Wurzel aus Formel von x .

Die Gleichung zweiten Grades hat zwei Werte; man darf also nicht allgemein setzen $\sqrt{x} = \sqrt{x}$, kurz die Wurzel ist keine einwertige GröÙe, mit welcher man rechnen dürfte, so z. B. hat $\sqrt{a^2}$ die beiden Werte $+a$ und $-a$, wollte man also $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$ setzen, so wäre damit auch $+a = -a$ gesetzt. Es ist vielmehr nur $\sqrt{a^2} \cong \sqrt{a^2}$, d. h. es sind nur die entsprechenden Wurzeln aus a^2 einander gleich.

576. **Erklärung.** Die Gleichung zweiten Grades wird auch eine quadratische Gleichung genannt. Dieselbe ist eine reine, wenn das Glied erster Stufe fehlt, eine gemischte, wenn es vorhanden ist.

Das Zeichen der zweiten Wurzel ist kurz $\sqrt{}$.

Die zweite Tiefe aus $-a$ heist eine reine JgröÙe (imaginäre GröÙe), die zweite Tiefe aus -1 heist das J (die imaginäre Eins) Zeichen i .

Beispiele. $x^2 = a$ ist eine reine, $x^2 + ax = b$ ist eine gemischte quadratische Gleichung. Jede Gleichung zweiten Grades hat zwei Wurzeln, z. B. die Gleichung $x^2 = a^2$ hat die Wurzeln $+a$ und $-a$, die Gleichung $x^2 = -a^2$ hat, wie wir später sehen werden, die Wurzeln $+ia$ und $-ia$.

Satz. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 577.

Das Quader der Summe zweier Größen erhält man, indem man zu der Summe der beiden Quader der Größen das doppelte Zeug (Produkt) dieser Größen zufügt (addirt).

Beweis. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ (nach 318)
 $= a^2 + 2ab + b^2$ (nach 180)

Beispiele. $(3 + 5)^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 64$
 $(7 + 3)^2 = 49 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 9 = 100$.

Satz. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. 578.

Das Quader des Unterschiedes zweier Größen erhält man, indem man von der Summe der beiden Quader der Größen das doppelte Zeug (Produkt) der beiden Größen abzieht.

Beweis. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ (nach 318)
 $= a^2 - 2ab + b^2$ (nach 180).

Beispiele. $(5 - 3)^2 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot 3 + 9 = 4$
 $(7 - 3)^2 = 49 - 2 \cdot 7 \cdot 3 + 9 = 16$.

Satz. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. 579.

Das Zeug oder Produkt der Summe und des Unterschiedes zweier Zahlen ist gleich dem Unterschiede der beiden Quader der Zahlen oder

Der Unterschied der Quader zweier Zahlen ist gleich dem Zeuge (Produkte) aus der Summe und dem Unterschiede der beiden Zahlen.

Beweis. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (nach 180).

Beispiele. $(7 + 3)(7 - 3) = 49 - 9 = 40$
 $(8 + 5)(8 - 5) = 64 - 25 = 39$.

Satz der reinen quadratischen Gleichung. Die reine 580.
 Gleichung zweiten Grades $x^2 = a^2$ hat, wenn a^2 eine Plusgröße $+ a^2$ ist, zwei Zahlwurzeln (reelle Wurzeln) $+ a$ und $- a$, welche entgegengesetzt sind, wenn a^2 eine Strichgröße $- b^2$ ist, so hat sie zwei Jwurzeln (imaginäre Wurzeln).

Beweis. a. Wenn a^2 eine Plusgröße ist, so folgt aus $x^2 = a^2$ sofort $x^2 - a^2 = 0$, mithin nach 578 $(x + a)(x - a) = 0$.

Wenn aber ein Zeug (Produkt) Null ist, so ist nach 114 notwendig einer der beiden Factie (Factoren) Null, also ist entweder $x + a = 0$, oder $x - a = 0$, d. h. x ist entweder $- a$ oder $+ a$.

b. Wenn a^2 eine Strichgröße, so ist die Wurzel derselben eine Jgröße nach 425.

Satz der gemischten quadratischen Gleichung. Eine 581.
 gemischte quadratische Gleichung löst man auf, indem man sie einrichtet, dann auf beiden Seiten das Quader der halben Vorzahl (des

halben Koeffizienten) des Gliedes erster Stufe zuzügt, auf beiden Seiten die Wurzel zieht und der rechten Seite das Zeichen \mp vorsetzt, oder

Wenn $x^2 + ax = b$ ist, so ist

$$x + \frac{a}{2} \cong \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \text{ und } x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis. 1. Man füge zu $x^2 + ax = b$ auf beiden Seiten $\left(\frac{a}{2} \right)^2$, so ist $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = b + \left(\frac{a}{2} \right)^2$. Hier ist die linke

Seite nach 576 das Quader von $x + \frac{a}{2}$, also ist

$$\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 = b + \left(\frac{a}{2} \right)^2, \text{ mithin nach 340}$$

$$x + \frac{a}{2} \cong \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \text{ also } x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis. 2. Man vervielfache die Gleichung mit 4, also $4x^2 + 4ax = 4b$ und betrachte $2x$ als Unbekannte, dann ist

$(2x)^2 + 2a \cdot (2x) = 4b$, man füge nun auf beiden Seiten a^2 , so ist $(2x)^2 + 2a \cdot (2x) + a^2 = (2x + a)^2 = 4b + a^2$, dann ist nach 340 die Wurzel

$$2x + a \cong \mp (4b + a^2)^{1/2}, \text{ mithin } x \cong -\frac{a}{2} \mp \frac{(4b + a^2)^{1/2}}{2}.$$

Beispiele. $x^2 + 5x = 6$, mithin $x \cong -\frac{5}{2} \mp \left(6 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right)^{1/2}$, d. h. entweder $x = -6$ oder $x = +1$

$$x^2 + 3x = 7, \text{ mithin } x \cong -\frac{3}{2} \mp \left(7 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)^{1/2}, \text{ d. h. } x = -\frac{3}{2} \mp \frac{6,082763}{2}.$$

582. **Satz.** Wenn $x^2 - ax = b$ ist, so ist

$$x - \frac{a}{2} = \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad x = \frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis. Unmittelbar aus 581, wenn man $-a$ statt a setzt.

Beispiele. $x^2 - 3x = 4$, mithin $x = \frac{3}{2} \mp \left(4 + \frac{9}{4} \right)^{1/2}$, d. h. $x = -1$, oder $x = +4$

$$x^2 - 4x = 12, \text{ mithin } x = 2 \mp (12 + 4)^{1/2}, \text{ d. h. } x = -2, \text{ oder } x = +6.$$

583. **Satz der Lösung durch Winkelgrößen.**

Wenn $x^2 + ax = +b$, und b eine PlusgröÙe, so ist

$$\left. \begin{aligned} x &= b^{1/2} \tan^{1/2} \varphi \text{ oder} \\ x &= -b^{1/2} \cot^{1/2} \varphi \end{aligned} \right\} \text{ wo } \tan \varphi = \frac{2 \cdot b^{1/2}}{a}.$$

Beweis. Man hat $x \cong -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$, oder

$$x \cong \frac{a}{2} \left[-1 \mp \left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)^{1/2} \right].$$

Da hier b eine Plusgröße ist, so setze man

$$(\tan \varphi)^2 = \frac{4b}{a^2}, \quad \text{oder } \tan \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}, \quad \text{dann hat man}$$

$$x \cong \frac{a}{2} \left[-1 \mp (1 + (\tan \varphi)^2)^{1/2} \right]$$

$$\text{und da } 1 + (\tan \varphi)^2 = 1 + \frac{(\sin \varphi)^2}{(\cos \varphi)^2} = \frac{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2}{(\cos \varphi)^2} = \frac{1}{(\cos \varphi)^2},$$

$$\text{so ist } x \cong \frac{a}{2} \left[-1 \mp \frac{1}{\cos \varphi} \right] \cong \frac{a}{2} \left(\frac{-\cos \varphi \mp 1}{\cos \varphi} \right)$$

$$\text{und da } \tan \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}, \text{ so ist } \frac{a}{2} = \frac{b^{1/2}}{\tan \varphi} \text{ und da } (\cos \varphi) \tan \varphi = \sin \varphi,$$

$$\text{so ist } x \cong b^{1/2} \left(\frac{-\cos \varphi \mp 1}{\sin \varphi} \right).$$

Nun ist aber nach 472

$$\tan^{1/2} \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \text{ und } \cot^{1/2} \varphi = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}, \text{ mithin ist}$$

$$\text{entweder } x = b^{1/2} \tan^{1/2} \varphi, \quad \text{oder } x = -b^{1/2} \cot^{1/2} \varphi.$$

Beispiele.

$$x^2 + 7x = 12$$

$$\log \tan \varphi = \log \frac{2 \cdot (12)^{1/2}}{7} = 9,99552 \quad \varphi = 44^\circ 42' 17''$$

$$\log \tan^{1/2} \varphi = 9,61405 \quad {}^{1/2} \varphi = 22^\circ 21' 8''$$

$$\log b^{1/2} = 0,53959$$

$$\log x = 0,15364 \quad x = 1,4243.$$

Satz. Wenn $x^2 + ax = -b$, und b eine Plusgröße, so ist 584.

$$x = -a(\sin^{1/2} \varphi)^2 \text{ oder } \left\{ \begin{array}{l} x = -a(\sin^{1/2} \varphi)^2 \\ x = -a(\cos^{1/2} \varphi)^2 \end{array} \right\} \text{ wo } \sin \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}.$$

Beweis. Man hat in obiger Formel $-b$ statt b zu setzen, dann ist

$$x \cong \frac{a}{2} \left(-1 \mp \left(1 - \frac{4b}{a^2}\right)^{1/2} \right).$$

Da hier b eine Plusgröße ist, so setze man

$$(\sin \varphi)^2 = \frac{4b}{a^2}, \quad \text{oder } \sin \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a},$$

dann ist $x \cong \frac{a}{2}(-1 \mp (1 - (\sin \varphi)^2)^{1/2}) = \frac{a}{2}(-1 \mp \cos \varphi)$ (nach 441).

Nun aber ist nach 455

$$(\sin \frac{1}{2} \varphi)^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{2}, \quad (\cos \frac{1}{2} \varphi)^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{2}, \text{ mithin ist}$$

entweder $x = -a(\sin \frac{1}{2} \varphi)^2$, oder $x = -a(\cos \frac{1}{2} \varphi)^2$.

Beispiele.

$$x^2 + 11x = -25$$

$$\log \sin \varphi = \log \frac{2 \cdot (25)^{1/2}}{11} = 9,95861 \quad \varphi = 65^\circ 22' 50''$$

$$\log(\sin \frac{1}{2} \varphi)^2 = 9,46494 \quad \frac{1}{2} \varphi = 32^\circ 41' 25''$$

$$\log(-x) = 0,50633 \quad x = -3,2087$$

Bemerkt möge hier werden, dass die beiden trigonometrischen Lösungen nur wenig Vorteile bieten, die gewöhnliche Lösung ist, wenn man Loge oder Logarithmen anwendet, ebenso bequem.

15. Die Gleichungen dritten Grades oder die kubischen Gleichungen.

Um die Gleichungen dritten Grades lösen zu können, muss man zunächst das zweite Glied der Gleichung nach Satz 574 entfernen. Es kann dies leicht geschehen, auch ohne auf einen früheren Satz zurückzugehen.

Die vollständige Gleichung dritten Grades hat die Form

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Setzen wir hier $x = y - \frac{1}{3} a_2$, so wird daraus

$$\left. \begin{aligned} y^3 - a_2 y^2 + \frac{1}{3} a_2^2 y - \frac{1}{27} a_2^3 \\ + a_1 y^2 - \frac{2}{3} a_1 a_2 y + \frac{1}{9} a_1^2 \\ + a_1 y - \frac{1}{3} a_1 a_2 \\ + a_0 \end{aligned} \right\} = 0$$

$$y^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right)y + a_0 + \frac{2}{27} a_2^3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 = 0,$$

oder kurz $y^3 - \mathfrak{A} \cdot y + \mathfrak{B} = 0$.

Wir bringen die Gleichung auf die Form

$$y^3 + 3py = 2q, \quad \text{wo } p = \frac{1}{3} \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right) \text{ und } q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a_2 a_1 - a_0 - \frac{2}{27} a_2^3\right).$$

585. **Satz.** Die Gleichungen dritten Grades bringt man auf die Form

$$x^3 + 3px = 2q.$$

Wenn q das entgegengesetzte Zeichen erhält, so erhält auch die Wurzel das entgegengesetzte Zeichen.

Es empfiehlt sich, für die Auflösung dieser Gleichungen demnach drei Fälle zu unterscheiden: 1, wo p eine Pluszahl ist, 2, wo p eine Strichzahl und zugleich $q^2 > p^3$ ist, und 3, wo p eine Strichzahl und zugleich $p^3 > q^2$ ist.

Die Auflösung ist dann folgende:

Fall 1. Für $x^3 + 3px = 2q$ ist:

$$(\tan \varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \quad \tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3}, \quad x_1 = 2 \cdot p^{1/2} : \tan 2\psi,$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + i(3(p + \frac{1}{4}x_1^2))^{1/2}, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} - i(3(p + \frac{1}{4}x_1^2))^{1/2}$$

Fall 2. Für $x^3 - 3px = 2q$, wo $q^2 > p^3$ ist:

$$(\sin \varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}, \quad \tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3}, \quad x_1 = 2 \cdot p^{1/2} : \sin 2\psi,$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + (3(p - \frac{1}{4}x_1^2))^{1/2}, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} - (3(p - \frac{1}{4}x_1^2))^{1/2}$$

Fall 3. Für $x^3 - 3px = 2q$, wo $p^3 > q^2$ ist:

$$\sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3} \right)^{1/2}, \quad -x_1 = 2 \cdot p^{1/2} \cdot \sin \varphi,$$

$$-x_2 = 2 \cdot p^{1/2} \sin(60^\circ - \varphi), \quad +x_3 = 2 \cdot p^{1/2} \sin(60^\circ + \varphi).$$

Beweis. A. Wir beweisen zunächst, dass wenn q entgegengesetztes Zeichen erhält, dass dann auch jede Wurzel das entgegengesetzte Zeichen erhält.

Sei also $x = a_1$ eine Wurzel der Gleichung $x^3 + 3px = 2q$, wo die Zeichen von p und q beliebig seien, so setze $x = -y$ und führe dies ein, so erhalten wir $-y^3 - 3py = 2q$, mithin nach Umkehr der Zeichen $y^3 + 3py = -2q$ und hier ist $y = -x = -a_1$ eine Wurzel der Gleichung.

B. Um die kubische Gleichung $x^3 + 3px = 2q$ zu lösen, wo das Zeichen von p verschieden sein kann, setze* man $x = u + v$ und zugleich $uv + p = 0$ (durch welche beiden Gleichungen die Größen u und v bestimmt sind), dann erhält man

$$u^3 + v^3 + 3x(uv + p) = 2q \text{ und da } uv + p = 0, \text{ auch}$$

$$u^3 + v^3 = 2q,$$

$$\text{also } u^3 = 2q - v^3 \quad v^3 = 2q - u^3.$$

$$\text{Ferner } uv = -p, \text{ mithin } u^3 v^3 = -p^3, \text{ also}$$

$$u^3(2q - u^3) = -p^3 \quad v^3(2q - v^3) = -p^3$$

$$\text{oder } u^6 - 2qu^3 = p^3 \quad v^6 - 2qv^3 = p^3$$

und durch Auflösung dieser Gleichungen zweiten Grades

*Diese Lösung ist von Euler. Setzt man $x = u + v$, so ist

$$(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3, \text{ mithin}$$

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3. \text{ Also}$$

$$p = -3uv \text{ und } 2q = u^3 + v^3.$$

$$\begin{aligned}
 u^3 &= q + (q^2 + p^3)^{1/2} & v^3 &= q - (q^2 + p^3)^{1/2}, \text{ mithin} \\
 (7) \quad x &= u + v = \left(q + (q^2 + p^3)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(q - (q^2 + p^3)^{1/2} \right)^{1/3} \\
 &= q \cdot \left[\left(1 + \left(1 + \frac{p^3}{q^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(1 - \left(1 + \frac{p^3}{q^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right].
 \end{aligned}$$

Fall 1. Wenn p ein Pluszeichen hat, d. h. $x^3 + 3px = 2q$, so setze

$$\begin{aligned}
 (8) \quad (\tan \varphi)^2 &= \frac{p^3}{q^2}, \text{ mithin } q = \frac{p^{3/2}}{\tan \varphi} \text{ und } q^{1/3} = \frac{p^{1/2}}{(\tan \varphi)^{1/3}} \\
 \left(1 + \frac{p^3}{q^2} \right)^{1/2} &= (1 + (\tan \varphi)^2)^{1/2} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (\text{nach 467}).
 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{p^{1/2}}{(\tan \varphi)^{1/3}} \left[\left(\frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^{1/3} - \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \right)^{1/3} \right] \\
 x &= p^{1/2} \left(\left(\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{1/3} - \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)^{1/3} \right) \\
 &= p^{1/2} \left(\left(\cot \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3} - \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3} \right).
 \end{aligned}$$

$$(8^*) \text{ Man setze hier } \tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3},$$

so ist

$$\begin{aligned}
 x &= p^{1/2} (\cot \psi - \tan \psi) = p^{1/2} \left(\frac{(\cos \psi)^2 - (\sin \psi)^2}{(\sin \psi) \cos \psi} \right) \\
 &= p^{1/2} \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 2\psi} = 2 \cdot p^{1/2} \cdot \cot 2\psi = \frac{2 \cdot p^{1/2}}{\tan 2\psi}.
 \end{aligned}$$

Um die andern Wurzeln x_2 und x_3 zu finden, beachte man, dass die gegebene Gleichung für alle 3 Wurzeln gelten muss. Es ist also $x_1^3 + 3px_1 = 2q$ und $x_2^3 + 3px_2 = 2q$, mithin

$$x_2^3 - x_1^3 + 3p(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} + 3p = 0,$$

mithin, wenn man die Division oder Teilung ausführt

$$x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 3p = 0$$

und demnach, wenn man die Wurzel auszieht

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + i \left(3 \left(p + \frac{x_1^2}{4} \right) \right)^{1/2}$$

wo $i = (-1)^{1/2}$.

$$x_3 = -\frac{x_1}{2} - i \left(3 \left(p + \frac{x_1^2}{4} \right) \right)^{1/2}$$

Fall 2. Wenn p ein Strichzeichen hat, d. h. $x^3 - 3px = 2q$ und $q^2 > p^3$, so ist nach (o), da p ein Strichzeichen hat,

$$x = q^{1/3} \left[\left(1 + \left(1 - \frac{p^3}{q^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(1 - \left(1 - \frac{p^3}{q^2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right].$$

Man setze nun

$$(\sin \varphi)^3 = \frac{p^3}{q^2}, \text{ also } q = \frac{p^{3/2}}{\sin \varphi}, \quad q^{1/3} = \frac{p^{1/2}}{(\sin \varphi)^{1/3}} \quad \text{und} \quad (*)$$

$$x = \frac{p^{1/2}}{(\sin \varphi)^{1/3}} \left[(1 + \cos \varphi)^{1/3} + 1 - \cos \varphi \right]$$

$$= p^{1/2} \left[\left(\cot \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3} + \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3} \right].$$

$$\text{Hier setze man } \tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^{1/3}, \quad (**)$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= p^{1/2} (\tan \psi + \cot \psi) = p^{1/2} \frac{(\sin \psi)^2 + (\cos \psi)^2}{(\sin \psi) \cdot \cos \psi} \\ &= \frac{2 \cdot p^{1/2}}{\sin 2\psi}. \end{aligned}$$

Die andern Wurzeln finden sich ebenso wie im ersten Falle, sofern man dem p ein Strichzeichen giebt, es ist also

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} + \left(3 \left(p - \frac{x_1^2}{4} \right) \right)^{1/2}, \quad x_3 = -\frac{x_1}{2} - \left(3 \left(p - \frac{x_1^2}{4} \right) \right)^{1/2}.$$

Fall 3. Wenn p ein Strichzeichen hat, d. h. $x^3 - 3px = 2q$ und $p^3 > q^2$, so benutze man die Formel

$$\sin 3\varphi = 3\sin \varphi - 4(\sin \varphi)^3 \text{ (nach 464) und setze } \sin \varphi = -\frac{x}{r}, \text{ so ist}$$

$$\sin 3\varphi = -3 \cdot \frac{x}{r} + 4 \frac{x^3}{r^3}, \text{ mithin}$$

$$x^3 - \frac{3r^3}{4}x = + \frac{r^3}{4} \sin 3\varphi, \text{ also}$$

$$p = \frac{r^2}{4} \text{ und } \frac{r}{2} = p^{1/2}. \text{ Ferner } q = + \frac{r^3}{8} \sin 3\varphi = + p^{3/2} \sin 3\varphi.$$

$$\text{Also } \sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3} \right)^{1/2}.$$

$$\text{Dann ist } x = -r \cdot \sin \varphi = -2 \cdot p^{1/2} \cdot \sin \varphi.$$

Es ist aber ferner

$$\sin 3\varphi = \sin(180^\circ - 3\varphi) = -\sin(180^\circ + 3\varphi).$$

Daraus erhalten wir die drei Werte von x .

$$x_1 = -2 \cdot p^{1/2} \cdot \sin \varphi, \quad x_2 = -2 \cdot p^{1/2} \sin(60^\circ - \varphi),$$

$$x_3 = 2 \cdot p^{1/2} \sin(60^\circ + \varphi).$$

Beispiele. Fall 1. $x^3 + 39x = 152$

$$\log(\tan \varphi)^2 = \log \frac{13^3}{76^2} = 9,58020 \quad \varphi = 31^\circ 39' 50''$$

$$\log \tan \frac{1}{2} \varphi = 9,45267 \quad \frac{1}{2} \varphi = 15^\circ 49' 55''$$

$$\log \tan \psi = 9,81756 \quad \psi = 33^\circ 18' 17''$$

$$\log x_1 = \frac{1}{2} \log 13 + \log 2 - \log \tan 2\psi = 0,49403 \quad x_1 = 3,1191$$

$$\log \frac{1}{4} x_1^2 = 0,38600 \quad \frac{1}{4} x_1^2 = 2,4322$$

$$\log(3(p + \frac{1}{4} x_1^2)) = 1,66555 \quad 3(p + \frac{1}{4} x_1^2) = 46,2966$$

$$\log[3(p + \frac{1}{4} x_1^2)]^{1/2} = 0,83277 \quad \text{if } [3(p + \frac{1}{4} x_1^2)]^{1/2} = i 6,8042$$

$$x_2 = -1,5595 + i 6,8042 \quad x_3 = -1,5595 - i 6,8042.$$

Fall 2. $x^3 - 24x = 80$

$$900 > 512$$

$$\log(\sin \varphi)^2 = \log \frac{8^3}{30^2} = 9,75503 \quad \varphi = 48^\circ 57' 32''$$

$$\log \tan \psi = \frac{1}{3} \left(\log \tan \frac{\varphi}{2} \right) = 9,88609 \quad \psi = 37^\circ 34' 7''$$

$$\log x_1 = \log \left(2 \cdot p^{1/2} \right) - \log \sin 2\psi = 0,76735 \quad x_1 = 5,85263$$

$$\log \frac{1}{4} x_1^2 = 0,93266 \quad \frac{1}{4} x_1^2 = 8,5636$$

$$\log[3(p - \frac{1}{4} x_1^2)]^{1/2} = 0,11405 \quad [3(p - \frac{1}{4} x_1^2)]^{1/2} = -1,3003$$

$$x_2 = -4,25292 \quad x_3 = -1,65232.$$

Fall 3. $x^3 - 42x = 80$

$$2644 > 1600$$

$$\log \sin 3\varphi = \log \left(\frac{q^2}{p^3} \right)^{1/2} = 9,76573 \quad \varphi = 11^\circ 53' 21''$$

$$\log(-x_1) = \log \left(2 \cdot p^{1/2} \right) + \log \sin \varphi = 0,18800; \quad x_1 = -1,5417$$

$$\log(-x_2) = \log \left(2 \cdot p^{1/2} \right) + \log \sin(60^\circ - \varphi) = 0,74592; \quad x_2 = -5,5708$$

$$\log x_3 = \log \left(2 \cdot p^{1/2} \right) + \log \sin(60^\circ + \varphi) = 0,85202; \quad x_3 = 7,1125.$$

16. Die Gleichungen vierten Grades oder die biquadratischen Gleichungen.

Um die Gleichungen vierten Grades lösen zu können, schafft man das 2te Glied fort. Sei also die allgemeine Gleichung $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$, so setze man $x = y - \frac{1}{4} a_1$ und entwickle die Formel, so fällt das zweite Glied fort und die Formel wird $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

586. **Satz.** Die Gleichung vierten Grades bringt man auf die Form $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, dann ist

$$x = \pm \frac{1}{2} \cdot e^{1/2} \pm \left(\frac{1}{4}e \pm f \cdot e^{1/2} - d \right)^{1/2},$$

wo $e^2 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2$ und $d = \frac{1}{2}(a + e)$, $f = -\frac{b}{2e}$ ist.

Beweis. Die Gleichung $(x^2 + d)^2 - e(x + f)^2 = 0$ gibt entwickelt und nach Höhen von x geordnet

$$x^4 + (2d - e)x^2 - 2efx + d^2 - ef^2 = 0.$$

Wenn diese der obigen gleich sein soll, so müssen die Koeffizienten gleich sein, d. h. es muss

$$a = 2d - e, \quad b = -2ef, \quad c = d^2 - ef^2 \text{ sein.}$$

Letztere mit $4e$ vervielfacht giebt

$$4ec = 4ed^2 - 4e^2f^2 = e(e + a)^2 - b^2, \quad \text{da } 2d = a + e \text{ ist,}$$

mithin nach den Höhen von e geordnet

$$e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2, \quad d = \frac{1}{2}(a + e), \quad f = -\frac{b}{2e}.$$

Die Gleichung $(x^2 + d)^2 - e(x + f)^2 = 0$ ergibt aber ferner

$$x^2 + d = \pm (x + f) \cdot e^{1/2}, \quad \text{oder } x^2 \mp x \cdot e^{1/2} = -d \pm f \cdot e^{1/2},$$

mithin $x = \pm \frac{1}{2} \cdot e^{1/2} \pm \left(\frac{1}{4}e \pm f \cdot e^{1/2} - d \right)^{1/2}.$

Ein Zahlenbeispiel möge die Art der Lösung erläutern. Es sei gegeben

$$x^4 + 312x^3 + 23337x^2 - 14874x + 2360 = 0.$$

Man setze $x = y - \frac{312}{4} = y - 78$, so giebt sich

$$y^4 - 13167y^2 + 140970y + 32'099'672 = 0,$$

mithin

$$e^3 - 26334e^2 + 44'971'201e - 19'872'540'900 = 0.$$

Hier setze man $e = z + \frac{26334}{3} = z + 8778$, so giebt sich

$$z^3 - 186'188'651z - 977'858'792'426 = 0.$$

Vergleichen wir dies mit $z^3 - 3pz = 2q$, so ist $p^3 > q^2$ und liegt also der Fall 3 der kubischen Gleichung vor. Es ist

$$\log q^2 = 23,3784922$$

$$\log p^3 = 23,3784960$$

$$\log(\sin 3\varphi)^2 = 9,9999962$$

$$\log \sin 3\varphi = 9,9999981$$

$$3\varphi = 89^\circ 49' 50''$$

$$\varphi = 29^\circ 56' 36\frac{2}{3}'' \quad 60^\circ - \varphi = 30^\circ 3' 23\frac{1}{3}'' \quad 60^\circ + \varphi = 89^\circ 56' 36\frac{2}{3}''$$

mithin $z_1 = -2(p)^{1/2} \sin \varphi$ $z_2 = -2(p)^{1/2} \sin(60^\circ - \varphi)$ $z_3 = 2(p)^{1/2} \sin(60^\circ + \varphi)$

$$z_1 = -7864,545 \quad z_2 = -7891,447 \quad + z_3 = 15756,$$

$$\text{also } e_1 = z_1 + 8778 = 913,455 \quad e_2 = z_2 + 8778 = 886,553$$

$$e_3 = z_3 + 8778 = 24534 \quad \text{und } e_1 + e_2 + e_3 = 26334.$$

Daraus giebt sich $x_1 = 0,31666$, $x_2 = 0,31666$, $x_3 = -126,31666$.

$$x_4 = -186,31666 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -312.$$

d. h. die zweite Vorzahl der Gleichung negativ genommen.

17. Die Gleichungen höhern Grades und ihre Lösung durch Näherung.

587. **Satz.** Zu jeder Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

lässt sich eine andere finden, deren n Wurzeln die Quadern von den n Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Beweis. Es sei y die Unbekannte der zu findenden Gleichung, so hat man $y = x^{\frac{1}{2}}$, also $x = y^{\frac{1}{2}}$. Führt man diesen Wert von x in die gegebene Gleichung ein, so erhält man

$$y^{\frac{n}{2}} + a_{n-1}y^{\frac{n-1}{2}} + a_{n-2}y^{\frac{n-2}{2}} + \dots + a_0 = 0,$$

$$\text{oder } y^{\frac{n}{2}} + a_{n-2}y^{\frac{n-2}{2}} + \dots = -a_{n-1}y^{\frac{n-1}{2}} - a_{n-3}y^{\frac{n-3}{2}} - \dots.$$

Erhebt man beide Seiten dieser letztern Gleichung aufs Quader, um die gebrochnen Stufen (Exponenten) wegzuschaffen, so erhält man

$$\begin{array}{l} y^n + 2a_{n-2}y^{n-1} + a_{n-2}^2 y^{n-2} + 2a_{n-2}a_{n-4} y^{n-3} + a_{n-4}^2 y^{n-4} + \dots \\ \quad + 2a_{n-4} y^{n-2} + 2a_{n-6} y^{n-3} + 2a_{n-2}a_{n-6} y^{n-4} + \dots \\ \hline = a_{n-1}^2 y^{n-1} + 2a_{n-1}a_{n-3} y^{n-2} + a_{n-3}^2 y^{n-3} + 2a_{n-3}a_{n-5} y^{n-4} + \dots \\ \quad + 2a_{n-1}a_{n-5} y^{n-3} + 2a_{n-1}a_{n-7} y^{n-4} + \dots \end{array}$$

Also ist die zu findende Gleichung folgende:

$$\begin{array}{l} 0 = y^n - a_{n-1}^2 y^{n-1} + a_{n-2}^2 y^{n-2} - 2a_{n-2}a_{n-4} y^{n-3} + a_{n-4}^2 y^{n-4} + \dots \\ \quad + 2a_{n-4} y^{n-2} - 2a_{n-1}a_{n-3} y^{n-2} + 2a_{n-2}a_{n-4} y^{n-3} - 2a_{n-3}a_{n-5} y^{n-4} + \dots \\ \quad + 2a_{n-4} y^{n-2} - 2a_{n-1}a_{n-5} y^{n-3} + 2a_{n-2}a_{n-6} y^{n-4} - 2a_{n-3}a_{n-7} y^{n-5} + \dots \\ \quad + 2a_{n-6} y^{n-3} + 2a_{n-8} y^{n-4} + \dots \end{array}$$

588. **Aufgabe.** Den Näherungswert einer Wurzel einer höhern Gleichung zu verbessern (Weg von Newton *arithmetica universalis* 1707).

Auflösung. Es sei

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

die gegebene Gleichung und c der Näherungswert einer Wurzel. Man setze $x = c + z$, so wird

$$0 = (c + z)^n + a_{n-1}(c + z)^{n-1} + a_{n-2}(c + z)^{n-2} + \dots + a_1(c + z) + a_0$$

$$= c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \dots + a_0$$

$$+ z[n c^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \dots + a_1] + \dots$$

$$= f_c + z f'_c \quad (\text{nach 393})$$

wo die folgenden Glieder höhere Höhen von z enthalten. Wenn nun z so klein ist, dass die Glieder mit diesen höhern Höhen gegen das Glied mit der ersten Höhe zu vernachlässigen sind, so kann man als nächste Annäherung

$$0 = c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \dots + a_0 + z[nc^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \dots + a_1]$$

setzen und also

$$z = - \frac{c^n + a_{n-1}c^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \dots + a_0}{nc^{n-1} + (n-1)a_{n-1}c^{n-2} + (n-2)a_{n-2}c^{n-3} + \dots + a_1}.$$

Dann ist die nächste Annäherung $c + z$; und man hat dann die Probe zu machen, ob $c + z$, statt x gesetzt, den Ausdruck $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ der Null näher führt, als der Wert c . Ist dies der Fall, so kann man denselben Weg aufs Neue anwenden, indem man jetzt den gefundenen Wert $c + z$ statt c setzt und ihn aufs Neue verbessert. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man den Wert so genau finden, als man will.

Beispiel. Es sei gegeben

$$f_0x = x^5 - 6x - 10 = 0$$

$$f_0'x = 5x^4 - 6$$

$$\text{und } c = 1,8.$$

$$\text{Dann ist } f_0(c_1 + z_1) = f_0c_1 + z_1f_0'c_1 = 0,$$

$$\text{also } z_1 = - \frac{f_0c_1}{f_0'c_1} = - \frac{-1,904}{+46,488} = +0,04, \text{ also } c_2 = 1,8 + 0,04 = 1,84.$$

$$\text{Nun ist } f_0c_2 + z_2f_0'c_2, \text{ also } z_2 = - \frac{f_0c_2}{f_0'c_2} = - \frac{0,0506}{51,3114} = -0,00099,$$

$$\text{also } c_3 = 1,84 - 0,00099 = 1,83901.$$

$$\text{Nun ist } z_3 = - \frac{f_0c_3}{f_0'c_3} = - \frac{-0,00013}{+51,18820} = +0,0000025,$$

$$\text{also } c_4 = 1,8390125.$$

Wenn es zwei Wurzeln der Gleichung giebt, für welche der Näherungswert c gleich oder fast gleich nahe liegt, so lassen sich die höhern Höhen von z nicht vernachlässigen. In diesem Falle muss man die Gleichung in z weiter entwickeln und zunächst einen Näherungswert von z zu bestimmen suchen, welcher dieser Gleichung genügt.

Satz. Wenn man eine höhere Gleichung von x für zwei Werte 589. x und c aufstellt und die eine von der andern abzieht, so ist der Unterschied der Gleichungen ohne Rest teilbar durch $x - c$ und das Ergebniss der Teilung eine Gleichung nächst niederen Grades.

$$\text{Beweis. Es sei } f_0x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$$\text{so ist } f_0x - f_0c = a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \dots,$$

mithin ist

$$\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = a_1 + a_2 \frac{x^2 - c^2}{x - c} + a_3 \frac{x^3 - c^3}{x - c} + \dots,$$

d. h. wenn wir diese Teilung ausführen

$$\begin{aligned} \frac{f_0x - f_0c}{x - c} &= a_1 + a_2(x + c) + a_3(x^2 + xc + c^2) + \dots \\ &\quad + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1}) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}. \end{aligned}$$

590. **Satz.** Wenn man eine höhere Gleichung f_0x von x durch den Unterschied zweier Werte $x - c$ teilt, so ist das Ergebniss eine Gleichung von x nächst niedern Grades und ein Rest f_0c , welcher den befondern Wert von f_0x für x gleich c darstellt und ist, wenn $a_n, a_{n-1} \dots a_0$ die Vorkzahlen für die gegebene Gleichung

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \text{ und } b_{n-1}, b_{n-2} \dots b_0$$

die entsprechenden Vorkzahlen der Gleichung nächst niederen Grades $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$ bezeichnen

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c, \quad b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}c, \dots$$

$$b_0 = a_1 + b_1c, \quad f_0c = a_0 + b_0c,$$

oder es ist jede Vorkzahl b_n der zweiten Reihe gleich der Summe aus der vorhergehenden Vorkzahl a_{n+1} der ersten und dem Zeuge von c mit der vorhergehenden Vorkzahl b_{n+1} der zweiten Gleichung und die letzte Summe ist der Wert f_0c .

Beweis. Es sei die gegebene Gleichung

$$f_0x = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \quad \text{so ist nach 589}$$

$$\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0,$$

mithin

$$\frac{f_0x}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 + \frac{f_0c}{x - c}$$

und vervielfachte man diese Gleichung mit $x - c$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f_0x &= b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + b_{n-3}x^{n-2} + \dots + b_0x \\ &\quad - b_{n-1}cx^{n-1} - b_{n-2}cx^{n-2} - \dots - b_1cx - b_0c + f_0c. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese mit der gegebenen Gleichung, so folgt

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}c, \quad b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}c, \dots$$

$$b_0 = a_1 + b_1c \text{ und } f_0c = a_0 + b_0c.$$

Es bietet dies einen Weg für eine höchst bequeme Berechnung eines Näherungswertes der Gleichung, wie das folgende Beispiel zeigt. Es sei gegeben $x^3 - 7x^2 + 63x^2 - 27x - 160 = 0$ und sei der Näherungswert $c = 3$.

sei $a_3 = 1, a_4 = -7, a_3 = 0, a_2 = 63, a_1 = -27, a_0 = -160$

und es ist $b_4 = a_3 = 1, b_3 = a_4 + b_4 \cdot 3 = -4, b_2 = a_3 + b_3 \cdot 3 = -12$.

$$b_1 = +27, b_0 = +54$$

und $f_03 = a_0 + b_0 \cdot 3 = +2.$

Es ergibt sich hieraus die folgende bequeme Rechenregel:

Man schreibt die Vorzahlen der gegebenen Gleichung a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 mit ihren Vorzeichen in eine Reihe, vervielfacht die erste Vorzahl a_n mit dem Näherungswerte c der Wurzel, setzt das Zeug oder Produkt unter die nächste Vorzahl a_{n-1} und fügt beide zu; die Summe vervielfacht man wieder mit c , schreibt das Zeug unter die nun nächste Vorzahl a_{n-2} und nimmt die Summe u. f. w. Die gewonnenen Summen sind die Vorzahlen b_{n-2}, b_{n-3} u. f. w., die letzte Summe ist der Wert der Gleichung $f.c.$

Beispiel. $f.x = x^5 - 13x^4 - 52x^3 + 15x + 5$.

Näherungswert $x = 4$ Die Rechnung ergibt

$$\begin{array}{r} +1 \quad 0 \quad -13 \quad 0 \quad -52 \quad +15 \quad +5 \\ \quad +4 \quad +16 \quad +12 \quad +48 \quad -16 \quad -4 \\ \hline +1 \quad +4 \quad +3 \quad +12 \quad -4 \quad -1 \quad +1 \end{array}$$

Man hat demnach

$$\frac{f.x}{x-4} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 12x - 4x - 1 + \frac{1}{x-4} \text{ und } f.4 = +1.$$

Aufgabe. Aus einer gegebenen Gleichung eine zweite Gleichung 591. abzuleiten, deren Wurzeln um c kleiner sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Auflösung. Es sei die gegebene Gleichung

$$f.x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Die gefuchte Gleichung sei

$$b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \dots + b_1 y + b_0 = 0.$$

Es soll die Wurzel der letzteren $y = x - c$ sein, daraus folgt

$$b_n (x - c)^n + b_{n-1} (x - c)^{n-1} + b_{n-2} (x - c)^{n-2} + \dots + b_1 (x - c) + b_0 = f.x.$$

Hieraus folgt für $x = c$ die Formel $b_0 = f.c.$

Zieht man diese von der vorigen ab und teilt man nach 590 durch $x - c$, so erhält man eine ganze Gleichung, welche wir φx nennen wollen

$$b_n (x - c)^{n-1} + b_{n-1} (x - c)^{n-2} + b_{n-2} (x - c)^{n-3} + \dots + b_2 (x - c) + b_1 = \varphi x.$$

Diese Gleichung giebt für $x = c$ wieder $b_1 = \varphi c$.

Man kann nun dieselbe Handlung mehrfach wiederholen und erhält hiebei die einzelnen Vorzahlen als Funktionen von c . Die gefuchten Vorzahlen b_0, b_1, b_2, \dots sind also die Reste, welche entstehen, wenn $f.x$ durch $x - c$, das Ergebniss der Teilung wieder durch $x - c$, das demnächst folgende Ergebniss nochmals durch $x - c$ geteilt wird und so fort, bis alle Vorzahlen gewonnen sind.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei

$$x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 9x + 108 = 0.$$

Die Wurzeln sollen um 3 kleiner sein, d. h. $c = 3$. Man hat.

$$\begin{array}{r}
 +1 \quad -9 \quad +5 \quad +9 \quad +108 \quad c=3 \\
 \quad \quad +3 \quad -18 \quad -39 \quad -90 \\
 \hline
 +1 \quad -6 \quad -13 \quad -30 \quad +18 = b_0 \\
 \quad \quad +3 \quad -9 \quad -66 \\
 \hline
 +1 \quad -3 \quad -22 \quad -96 = b_1 \\
 \quad \quad +3 \quad 0 \\
 \hline
 +1 \quad +0 \quad -22 = b_2 \\
 \quad \quad +3 \\
 \hline
 +1 \quad +3 = b_3,
 \end{array}$$

mithin ist die gefuchte Gleichung

$$y^4 + 3y^3 - 22y^2 - 96y + 18 = 0.$$

Nach demselben Verfahren kann man die Sache auch so einrichten, dass $b_{n-1} = 0$ wird, setzt man nämlich $y = x - c$ und entwickelt $x = y + c$, so wird $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots = a_n y^n + (a_{n-1} + n a_n c) y^{n-1} + \dots$, mithin $b_n = a_n$ und $b_{n-1} = a_{n-1} + n a_n c$, soll also $b_{n-1} = 0$ sein, so muss

$$c = -\frac{a_{n-1}}{n a_n} \text{ gesetzt werden.}$$

Wenn c eine mehrziffrige Zahl ist, so kann man die Verminderung der Wurzel jedesmal mit nur einer Ziffer ausführen.

592. Aufgabe. Die weiteren Näherungswerte einer Wurzel zu finden. Weg nach Horner Abhandlung in Philosophical transactions vom Jahre 1819.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

und sei nach dem Wege von Newton der erste Näherungswert

$$x_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$$

gefunden, während der genaue Wert $x = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$

sei, so ist $y = x - x_1 = \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$ und ist $y < \frac{1}{10}$. Nach

(*) 591 ist nun $y^n + b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \dots + b_1 y + b_0 = 0$

Hier kann man für den nächsten Näherungswert von x die höhern Höhen von y (da $y < \frac{1}{10}$ ist) vernachlässigen und hat also als

nächsten Näherungswert für $y = \frac{\alpha_2}{10^2}$ die Gleichung

$$b_1 y + b_0 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha_2}{10^2} = y = -\frac{b_0}{b_1}.$$

Der nächste Näherungswert von x ist dann

$$x_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}.$$

Um zu prüfen, ob der wahre Wert über oder unter α_2 ist, führt man in die Gleichung (*) den Wert

$$x_2' = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2 + 1}{10^2}$$

ein, liegt dann der Wert der Wurzel in der 2ten Bruchstelle zwischen α_2 und $\alpha_2 + 1$, so muss f_x bei Einführung von x_2 und x_2' , verschiedene Werte erhalten.

In der Gleichung (*) vermindert man nun y um $\frac{\alpha_2}{10^2}$ und erhält

dann $z = y - \frac{\alpha_2}{10^2} = \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \dots$, wo $z < 1/100$. Nach 591 ist

$$\text{dann} \quad z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1z + c_0 = 0 \quad (**)$$

Hier kann man wieder für den nächsten Näherungswert $z = \frac{\alpha_3}{10^3}$ die höhern Höhen von z vernachlässigen und behält also

$$c_1z + c_0 = 0, \quad \text{oder} \quad z = \frac{\alpha_3}{10^3} = -\frac{c_0}{c_1}$$

und dadurch den nächsten Näherungswert von x

$$x_3 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3}.$$

Man prüft nun wieder, ob der wahre Wert von x in der dritten Bruchstelle zwischen α_3 und $\alpha_3 + 1$ liegt und geht dann ganz in gleicher Weise zu den folgenden Stellen über.

Wenn es sich um die Bestimmungen von Strichwurzeln (negativen Wurzeln) handelt, so gibt man den Vorzahlen $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ kurz den Vorzahlen α_{2i+1} entgegengesetztes Zeichen und verwandelt sie dadurch in Pluswurzeln (positive Wurzeln).

Wenn zwei Wurzeln sehr nahe bei einander liegen, z. B.

$$x_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots \quad x_2 = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \dots,$$

so genügt der Gleichung (*) sowohl

$$y = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots, \text{ als auch } y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \dots.$$

Die Gleichung * erleidet mithin sowohl zwischen

$$y = \frac{\alpha_1}{10} \text{ und } y = \frac{\alpha_1 + 1}{10} \text{ als auch zwischen } y = \frac{\beta_1}{10} \text{ und } y = \frac{\beta_1 + 1}{10}$$

einen Zeichenwechsel, ausserdem ändert das letzte Glied der Gleichung (**) nämlich c_0 sein Zeichen, wenn β_1 für α_1 eingesetzt wird.

Beispiel. $x^3 + 8x^2 + 6x - 75,9 = 0$ $x_1 = 2,4$

$$\begin{array}{r}
 o_0 = 2; \quad 1 \quad 8 \quad 6 - 75,9 \\
 \quad \quad 2 \quad 20 \quad 52 \\
 1 \quad 10 \quad 26 - 23,9 \\
 \quad \quad 2 \quad 24 \\
 1 \quad 12 \quad 50 \\
 \quad \quad 2 \\
 1 \quad 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 o_1 = 0,4 \quad 1 \quad 14 \quad 50 \quad - 23,9 \\
 \quad \quad \quad 0,4 \quad 5,76 \quad 22,304 \\
 1 \quad 14,4 \quad 55,76 - 1,596 = b_0 \\
 \quad \quad \quad 0,4 \quad 5,92 \\
 1 \quad 14,8 \quad 61,68 = b_1 \\
 \quad \quad \quad 0,4 \\
 1 \quad 15,2 = b_2
 \end{array}$$

$y^3 + 15,2y^2 + 61,68y - 1,596 = 0$ Prüfung $\frac{-b_2}{b_2} = \frac{1,596}{61,68} = 0,02$

$$\begin{array}{r}
 c_2 = 0,02 \quad 1 \quad 15,2 \quad 61,68 \quad - 1,596 \\
 \quad \quad \quad 0,02 \quad 0,3044 \quad 1,239688 \\
 1. \quad 15,22 \quad 61,9844 - 0,356312 = c_0 \\
 \quad \quad \quad 0,02 \quad 0,3048 \\
 1. \quad 15,24 \quad 62,2892 = c_1 \\
 \quad \quad \quad 0,02 \\
 1. \quad 15,26 = c_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x_2 = 2,42
 \end{array}$$

$z^3 + 15,26z^2 + 62,2892z - 0,356312 = 0$ Prüfung $\frac{-c_3}{c_2} = \frac{0,356312}{62,2892} = 0,005$

$$\begin{array}{r}
 c_3 = 0,005 \quad 1. \quad 15,26 \quad 62,2892 \quad - 0,356312 \\
 \quad \quad \quad 0,005 \quad 0,076325 \quad 0,311827625 \\
 1. \quad 15,265 \quad 62,365525 - 0,044484375 = d_0 \\
 \quad \quad \quad 0,005 \quad 0,076350 \\
 1. \quad 15,270 \quad 62,441875 = d_1 \\
 \quad \quad \quad 0,005 \\
 1. \quad 15,275 = d_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x_3 = 2,425
 \end{array}$$

$u^3 + 15,275u^2 + 62,441875u - 0,044484375 = 0$

$$\begin{array}{r}
 d_3 \quad 0,044484375 \\
 - \frac{d_3}{d_2} = \frac{0,044484375}{62,441875} = 0,0007,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x_4 = 2,4257.
 \end{array}$$

593. **Aufgabe.** Die Pluswerte der Wurzeln einer Gleichung zu finden. (Weg von Graeffe. Auflösung der höhern numerischen Gleichungen Zürich 1837).

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung leite man (nach 587) eine neue Gleichung ab, deren Wurzeln die Quader von den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und auf diese Gleichung wende man wiederholt daselbe Verfahren an. Hat man dann z. B. das Verfahren 8 Mal angewandt, so gelangt man zu einer Gleichung, deren Wurzeln die 256ten Höhen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Angenommen nun, die gegebene Gleichung habe a Wurzeln, deren Pluswert α , b Wurzeln, deren Pluswert β sei, u. s. w., so dass also $a + b + \dots = n$, d. h. gleich dem Grade der Gleichung ist, und zwar sei $\alpha > \beta, \beta > \gamma, \dots$. Hat man dann eine Gleichung abgeleitet, deren Wurzeln die m ten Höhen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung

sind, so hat diese abgeleitete Gleichung a Wurzeln, deren Pluswert α^m , b Wurzeln, deren Pluswert β^m ist u. f. w. Nun wird man m stets so gros wählen können, dass die Brüche $\frac{\beta^m}{\alpha^m}, \frac{\gamma^m}{\beta^m}, \dots$ kleiner werden als eine verlangte Grenze, z. B. kleiner als 10^{-6} . Denn soll z. B. $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m < 10^{-6}$, d. h. $\frac{\alpha^m}{\beta^m} > 10^6$, so hat man $m(\log \alpha - \log \beta) > 6$,

d. h. $m > \frac{6}{\log \alpha - \log \beta}$. Haben wir also m hinlänglich gros gewählt, so kann in der beabsichtigten Annäherung β^m gegen α^m vernachlässigt werden, ebenso γ^m gegen β^m u. f. w. Nun ist (nach 572), wenn $0 = y^n - c_{n-1}y^{n-1} + c_{n-2}y^{n-2} - \dots$

die abgeleitete Gleichung ist, c_{n-r} die Summe der Zeuge oder Produkte von je r der Wurzeln, namentlich enthält c_{n-a} das Zeug der a Wurzeln, deren Pluswerte $= \alpha^m$ sind. Dies Zeug ist α^{am} , denn wenn $u + iv$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, deren Pluswert α ist, so ist auch (nach 573) $u - iv$ eine Wurzel der Gleichung; es ist aber dann $(u + iv)(u - iv) = \alpha^2$ (nach 432). Hieraus folgt also, dass das Zeug der a Wurzeln, deren Pluswerte $= \alpha$ sind, gleich $\mp \alpha^a$ ist. Aber das Zeug der m ten Höhen dieser Wurzeln ist (nach 323, 499) gleich der m ten Höhe des Zeuges dieser Wurzeln, d. h. gleich $(\mp \alpha^a)^m$; da aber m eine gerade Zahl ist, so ist $(-\alpha^a)^m = (\alpha^a)^m = \alpha^{am}$. Die übrigen Zeuge, aus denen c_{n-a} besteht, haben mindestens statt eines der Fache oder Faktoren, deren Pluswerte α^m sind, ein Fach, dessen Pluswert β^m oder noch kleiner als β^m ist, diese Glieder können also bei der erlangten Annäherung gegen das erste vernachlässigt werden und es wird also c_{n-a} sehr nahe $= \alpha^{am}$ sein. Aus gleichen Gründen wird $c_{n-(a+b)}$ sehr nahe $= \alpha^{am}\beta^{bm}$, d. h. $= c_{n-a}\beta^{bm}$, $c_{n-(a+b+c)}$ $= \alpha^{am}\beta^{bm}\gamma^{cm}$, d. h. $= c_{n-(a+b)}\gamma^{cm}$ sein u. f. w. Dann wird also in der

Annäherung $\alpha = c_{n-a}^{\frac{1}{m}}$, $\beta = \left(\frac{c_{n-(a+b)}}{c_{n-a}}\right)^{\frac{1}{bm}}$, $\gamma = \left(\frac{c_{n-(a+b+c)}}{c_{n-(a+b)}}\right)^{\frac{1}{cm}}$,

und kann man auf diese Weise die Pluswerte der Wurzeln einer Gleichung finden.

Aufgabe. Die Zahlwurzeln oder reellen Wurzeln einer Gleichung 594. zu finden.

Auflösung. Man sucht zunächst die Pluswerte aller Wurzeln der Gleichung. Jede Zahlwurzel ist einem solchen Pluswerte gleich oder entgegengesetzt. Ist der Grad der Gleichung ein ungerader, so

muss, da die Anzahl der Winkelwurzeln oder imaginären Wurzeln nach 573 stets eine gerade ist, eine Wurzel eine Zahl oder eine reelle Wurzel sein. Man muss nun durch unmittelbares Einsetzen der Pluswerte ermitteln, ob einer dieser Werte oder ob einer der entgegengesetzten Werte der Gleichung genügt. Hat man eine Zahlwurzel w gefunden, so kann man die Gleichung durch $x - w$ nach 569 teilen, sie wird dann um einen Grad niedriger. Jede so gewonnene Gleichung kann man dann ebenso behandeln, bis keine Zahlwurzel mehr bleibt. Die so gefundenen Näherungswerte der Zahlwurzeln kann man dann nach 588 verbessern, und erhält so die sämtlichen Zahlwurzeln der Gleichung.

595. **Aufgabe.** Zwei Gleichungen höherer Grade durch zwei andere zu ersetzen, von denen die erstere eine der Unbekannten nicht mehr enthält.

Auflösung (durch Teilung). Es seien

$$(a) A = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots = 0$$

$$(b) A_1 = x^m + a_1x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \dots = 0$$

die beiden Gleichungen, wo $a, b, \dots, a_1, b_1, \dots$ Ausdrücke sind, welche die übrigen Unbekannten, aber nicht mehr x enthalten, und zwar sei $n \geq m$. Man wende daselbe Verfahren wie bei der Auffuchung des grössten gemeinschaftlichen Mases zweier Zahlen an, nämlich man teile mit A_1 in A so lange, bis der Rest von niederm Grade wird als der Teiler, teile ebenso mit diesem Reste in den vorigen Teiler und so überhaupt mit dem jedesmaligen Reste in den vorigen Teiler, bis endlich der letzte Rest nicht mehr x enthält; der letzte Rest sei A_{r+1} , der letzte Teiler A_r , so sind

$$(c) A_r = 0$$

$$(d) A_{r+1} = 0$$

zwei Gleichungen, welche die ursprünglichen beiden ersetzen und von denen die letztere nicht mehr x enthält.

Beweis 1. Wenn die beiden Gleichungen (a) und (b) zugleich stattfinden sollen, so heisst das, es muss mindestens einen Wert von x geben, der beiden zugleich genügt. Es sei $x = \alpha$ ein solcher Wert, der den Gleichungen $A = 0$ und $A_1 = 0$ genügt, so müssen (nach 569) A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar sein. Nun hatte man mit A_1 in A geteilt. Der Bruch oder Quotient sei Q und der Rest A_2 , so ist $A - A_1Q = A_2$. Da nun A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar sind, so ist auch $A - A_1Q$ durch $x - \alpha$ teilbar, also auch A_2 . Folglich sind A_1 und A_2 durch $x - \alpha$ teilbar. Aus A_1 und A_2 gehen aber A_2 und A_3

auf gleiche Weise hervor wie jene aus A und A_1 , folglich sind auch A_2 und A_3 durch $x - \alpha$ teilbar u. f. w., also endlich auch A_r und A_{r+1} . Aber A_{r+1} enthält kein x mehr; soll es also $x - \alpha$ zum Fache oder Faktor haben, so muss der andere Fach Null, also auch

$$(d) A_{r+1} = 0$$

sein; und da ferner A_r der Fach $x - \alpha$ enthält, so ist $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung

$$(c) A_r = 0,$$

d. h. alle Werte für x , welche den Gleichungen (a) und (b) genügen, genügen auch der Gleichung (c). Also wenn die Gleichungen (a) und (b) erfüllt werden, so müssen auch die Gleichungen (c) und (d) erfüllt werden.

2. Aber auch umgekehrt folgen aus den Gleichungen (c) und (d) wieder die Gleichungen (a) und (b). Denn wenn $A_{r+1} = 0$ ist, und $x = \alpha$ ein Wert ist, der die Gleichung $A_r = 0$ erfüllt, so ist A_r durch $x - \alpha$ teilbar. Nun war aber nach der Auflösung

$$A_{r+1} = A_{r-1} - A_r Q_{r-1},$$

$$\text{also } A_{r-1} = A_{r+1} + A_r Q_{r-1},$$

oder da A_r durch $x - \alpha$ teilbar ist, und A_{r+1} Null ist, so ist auch A_{r-1} durch $x - \alpha$ teilbar; also A_r und A_{r-1} ; auf dieselbe Weise aber wie A_{r-1} aus A_r und A_{r+1} hervorging, geht auch A_{r-2} aus A_{r-1} und A_r hervor; also sind auch A_{r-2} und A_{r-1} durch $x - \alpha$ teilbar u. f. w., endlich auch A und A_1 durch $x - \alpha$ teilbar, d. h. $x = \alpha$ ist eine Wurzel der Gleichungen (a) und (b). Also wenn die Gleichungen (c) und (d) richtig sind, so sind auch die Gleichungen (a) und (b) richtig.

3. Also ersetzen sich das Gleichungspaar (a) und (b) und das Gleichungspaar (c) und (d) gegenseitig.

Es lassen sich hiernach also n höhere Gleichungen mit n Unbekannten schliesslich (wenn nicht die Unbekannten schon früher verschwinden) auf eine höhere Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen.

Aufgabe. Die Richtwurzeln oder komplexen Wurzeln einer Gleichung zu finden. (Weg von Encke in Crelles Journal der Mathematik Bd. 22 S. 193).

Auflösung. Jede Wurzel, deren Pluswert α ist, muss sich (nach 439) in der Form $\alpha(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ darstellen lassen. Es ist also nur φ zu suchen. Man setze statt x jenen Wert ein, so erhält man

$$\alpha^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + \alpha \alpha^{n-1} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n-1} + \dots = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach dem Zweigliederfatze (dem binomischen Satze), so erhält man eine Gleichung der Form

$$A + i \sin \varphi B = 0,$$

in welcher A und B nur Höhen von $\cos \varphi$ und gerade Höhen von $\sin \varphi$ enthalten, und zwar ist die Summe der Stufen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ in jedem Gliede von A gleich n, in jedem Gliede von B gleich $n - 1$. Aus diesen Ausdrücken kann man noch $\sin \varphi$ ganz wegschaffen. Denn jede Höhe von $\sin \varphi$ mit gerader Stufe, z. B. $(\sin \varphi)^{2m}$ lässt sich in der Form $(\sin \varphi)^{2m} = (1 - (\cos \varphi)^2)^m$ darstellen, und letzteres giebt, nach dem Zweigliederfatze entwickelt, nur Höhen von $\cos \varphi$. Somit werden A und B Ausdrücke, welche nur $\cos \varphi$ enthalten, und zwar wird A in Bezug auf $\cos \varphi$ vom n ten, B vom $(n - 1)$ ten Grade. Da nun nach dem obigen $A + i \sin \varphi B = 0$ war, so muss (nach 426) sowohl $A = 0$ sein, als auch $\sin \varphi B = 0$. Da ferner die Wurzel $\alpha(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine Winkelgröse sein soll, so kann $\sin \varphi$ nicht Null sein, also erhält man $B = 0$. Setzen wir noch $\cos \varphi = z$, so hat man 2 Gleichungen der Form

$$A = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots = 0 \text{ und}$$

$$B = z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} + \dots = 0.$$

Durch wiederholte Teilung erhält man hieraus auf dem Wege in 595 eine Gleichung, die im Allgemeinen vom ersten Grade sein wird, aber auch zu höhern Graden anwachsen kann, und deren Wurzeln die sämtlichen Werte z liefern, welche den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ genügen. Da $z = \cos \varphi$ nach der Annahme eine Zahl (reell) ist, so lassen sich diese Wurzeln (nach 593) sämtlich finden. Ist aber $\cos \varphi$ gefunden, so ist damit der echte Winkel $\mp \varphi$ gefunden, und damit sind auch die Winkelwurzeln oder imaginären Wurzeln $\alpha(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $\alpha(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ gefunden.



Die
Folgelehre oder Funktionenlehre

der
höhere Zweig der **Analyse.**



Zweiter Zweig
der
Formenlehre oder Mathematik.



Die

Folgelehre oder Funktionenlehre

streng wissenschaftlich in strenger Formel-

Entwicklung.

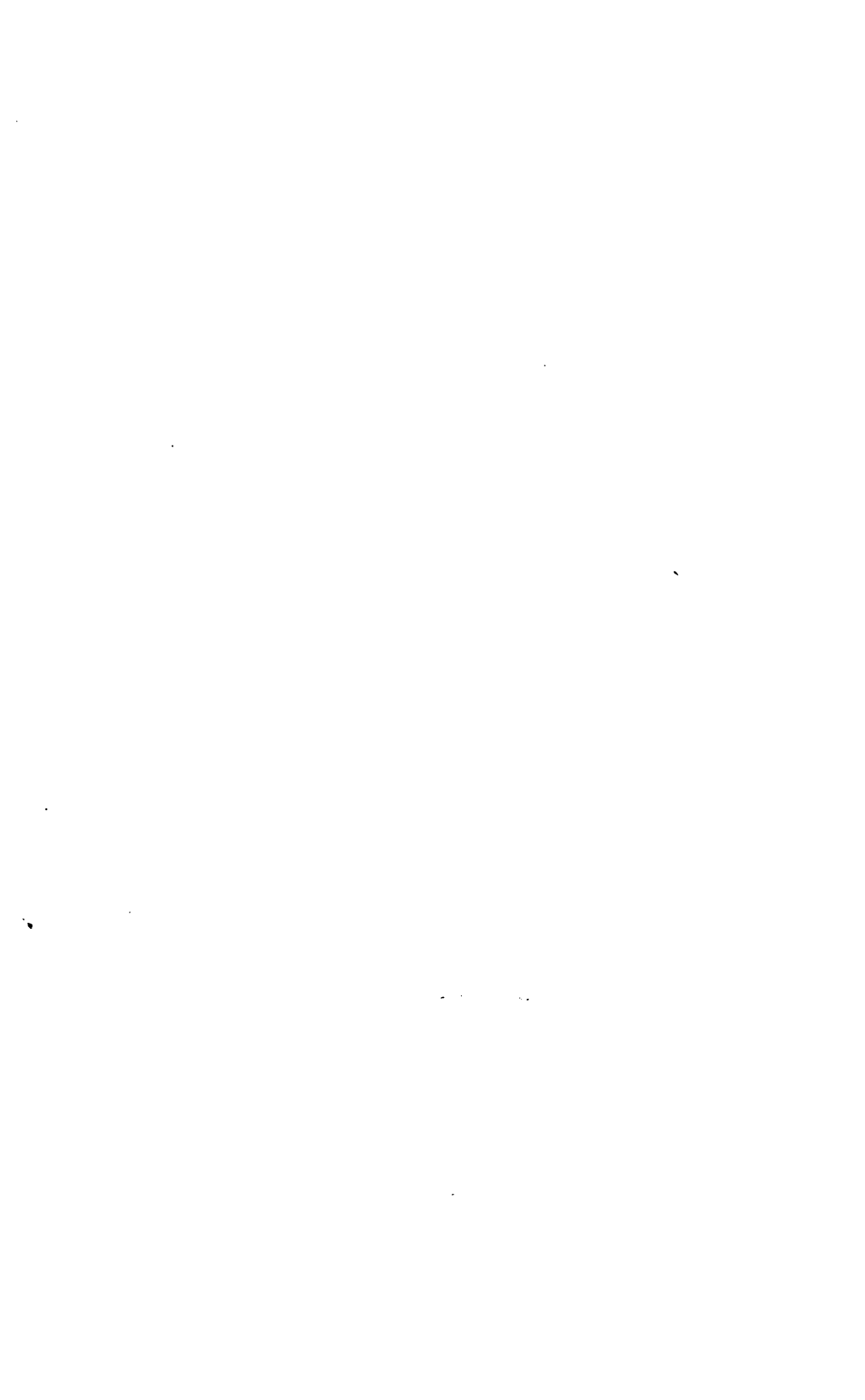
Von

Robert Grassmann.



Stettin 1895.

Druck und Verlag von R. Grassmann.



Vorwort.

Die Funktionenlehre, zu welcher der Verfasser auch die Differential- und Integralrechnung heranzieht, leidet zur Zeit noch an einer Reihe von Schwierigkeiten und Unklarheiten, welche die Erlernung dieser Wissenschaft erschweren und Unsicherheiten erzeugen, die einer strengen Wissenschaft nicht entsprechen und den sichern Fortgang wesentlich erschweren.

Wollte der Verfasser auch für diesen Zweig des Wissens zu streng wissenschaftlichem Fortschritte kommen, der jeden Zweifel und jede Unklarheit ausschließt, so musste er neue Wege einschlagen und jeden unklaren und Zweifel zulassenden Begriff, bez. jedes derartige Zeichen ausmerzen, bez. einwertig bestimmen. Der Verfasser hat dies, wie er glaubt, streng durchgeführt; ob es ihm gelungen ist, das überlässt er billiger Weise dem Urtheile seiner Leser.

Der Begriff der Funktion bedurfte zunächst einer Berichtigung, derselbe umfasst jetzt sowohl einwertige, wie mehrwertige Größen. Unter diesen Umständen ist es zweifelhaft und muss in jedem Falle erst unterfucht werden, ob man die Funktion sich selbst gleichsetzen darf. So z. B. ist $\sqrt{a^2} = \pm a$, setzt man nun $+a = \sqrt{a^2} = -a$, was nach den bisherigen Gesetzen der Mathematik zulässig ist, wenn überhaupt $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2}$ ist, so ergibt sich $+a = -a$ und damit jeder Trugschluss z. B. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Damit hört jede Strenge der Wissenschaft auf.

Der Verfasser trennt daher die Funktion, deutsch Folge, Zeichen f , F , \dots , als einwertige Formel von dem Funktional, deutsch Gefolge, Zeichen g , G , der mehrwertigen Formel. Nur die Funktionen darf man einander durch das Gleichheitszeichen $=$ gleich setzen, die Funk-

tionale darf man nur entsprechend gleich setzen durch das Entsprechungszeichen \cong , welches bezeichnet, dass je zwei einander entsprechende Werte gleich sind. So unterscheidet der Verfasser z. B. die einwertige

Funktion $(a^n)^{\frac{1}{n}} = +a$, von dem n wertigen Funktional $\sqrt[n]{a^n} \cong a e^{\frac{2a\pi}{n}}$ wo a eine ganze Zahl von 0 bis $n-1$ ist. So unterscheidet der Verfasser in der Integralrechnung die einwertige Integre

$\int x^{-n} ax = \frac{ax^{n+1}}{1.2.3 \dots n+1}$, wo alle willkürlichen Constanten gleich

Null gesetzt sind, von dem mehrdeutigen Integral

$\sum_x a^n \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_n x^n + \frac{ax^{n+1}}{1.2.3 \dots n+1}$,

wo n willkürliche Constante gesetzt werden.

Ebenso bedurfte die Klammerfetzung einer Umgestaltung. Nach der Zahlenlehre ist der klammerlose Ausdruck $abcde = (((ab)c)d)e$, entsprechend müsste nun $f_0 ax^n \sin x = ((f_0 a) x^n) \sin x$ sein, und müsste $df_0 ax^n = ((df_0 a) x^n)$ sein, ebenso $d \sin x = (d \sin) x$, $\sin x^2 = (\sin x)^2$ sein. Die Mathematiker weichen hiervon ab und lassen die Klammern fort, ohne dafür irgend ein Gesetz zu haben, sie werden dadurch unklar und mehrfach zweideutig. Hier musste Klarheit und Sicherheit geschafft werden. Diefelbe ist leicht erreicht und bietet bei Vermeidung unzähliger Klammern volle Sicherheit, wenn jedes Funktionszeichen ohne Klammer auf alle folgenden Größen desselben Gliedes bezogen wird, also $df_0 ax^n \sin x = d(f_0(ax^n \sin x))$ gesetzt wird. Dies Gesetz führt der Verfasser streng durch. Er schreibt deshalb $\sin(x+y) = (\sin x) \cos y + (\cos x) \sin y$, da nach jenem Gesetze $\sin x \cos y = \sin(x \cos y)$ sein würde. Er hat also in einzelnen Fällen Klammern nötig, wo man jetzt keine Klammer setzt (dies aber auch nur fehlerhafter Weise; denn nach dem jetzigen Gesetze müsste $\sin x \cos y = (\sin x \cos) y$ sein, dafür aber gebraucht man bei dieser Regel überaus wenig Klammern trotz voller Strenge und Sicherheit.

In der Funktionenlehre hat man es nun mit sich stetig verändernden Größen zu tun, während die Zahlen der Zahlenlehre durch Zufügen von Eins entstandene Diskrete oder sprungweise sich ändernde Größen sind. Diese sich stetig verändernden Größen hat man nun in den Bewegungen im Raume angeschaut und diese Anschauungen für die Funktionenlehre zu Grunde gelegt. Es ist dies, sofern man den Schülern die Sache recht anschaulich machen will, ein ganz praktischer Weg,

dagegen ist es ein ganz unbrauchbarer Weg, wenn man eine streng wissenschaftliche Base für die Funktionenlehre gewinnen will.

Die Funktionenlehre ist der höhere Zweig der Analyse, der einzig und allein auf den niedern Zweig der Analyse, d. h. auf die Zahlenlehre, gegründet werden kann. Alle bedeutenden Mathematiker seit Leibniz haben die Funktionenlehre oder Folgelehre stets als höhern Zweig der Rechenlehre oder Analysis angesehen und sie deshalb höhere Analysis genannt. Keinem dieser ausgezeichneten Gelehrten ist es eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Bewegungslehre oder Mechanik zu behandeln. Ebenso wenig ist es je einem derselben eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Raumlehre oder Geometrie zu betrachten, wenn sie auch zahlreiche Anwendungen der Funktionenlehre auf die Raumlehre gegeben, und dadurch die Gesetze der Analysis anschaulich und leichter begreiflich und anwendbar gemacht haben.

Nur in der Zahlenlehre haben wir streng einwertige Begriffe, und streng mathematische Beweise, nur in der Zahlenlehre haben wir durch die Dezimalbrüche mit unendlich vielen Stellen eine stetig wachsende Zahlreihe von Minusunendlich bis Plusunendlich, jede Zahl einwertig, jeder Zahl, in welcher auch nur eine Ziffer verschieden ist, ungleich, nur durch diese stetig wachsende Zahlenreihe einwertiger Zahlen können wir zu einwertigen, stetig wachsenden Funktionen gelangen.

Jede reelle Funktion ist nun eine einwertige Formel, in welcher nur Zahlen vorkommen, jede komplexe Funktion ist eine einwertige Formel, welche, wie in Satz 6 bewiesen wird, die Summe ist aus einer reellen Funktion und dem Produkt von $i = (-1)^{1/2}$ mit einer reellen Funktion, die ganze Funktionenlehre kann und muss also auf die stetig wachsende Zahlreihe gegründet werden. In Satz 15 wird nun streng bewiesen, dass jede reelle Funktion von x , welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die GröÙe x wächst, auch, sofern x stetig wächst, eine stetig wachsende bez. eine stetig abnehmende GröÙe ist, d. h. dass die reelle Funktion F_x von x , wenn x alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachsenden Zahlreihe von F_a bis F_b durchläuft oder, dass die reelle Funktion von x in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Funktion von x ist und in Satz 16 wird das Entsprechende für jede komplexe Funktion von x bewiesen. Hiermit ist eine streng wissenschaftliche Grundlage für die Funktionenlehre ge-

wonnen, wo jede Unklarheit und Zweideutigkeit beseitigt ist und die Entwicklung der Funktionenlehre beginnen kann.

Die erste Frucht dieser einwertigen sichern Grundlage bildet demnächst die Lehre von den echten oder konvergenten Reihen Satz 17 bis 30 und darauf gegründet die Ableitung der Gesetze für die Höhen oder Potenzen von Summen bei beliebiger Zahl im Exponenten oder in der Stufe Satz 31 bis 53 mit dem Binomischen und dem Polynomischen Lehrsatz.

Aus diesen Sätzen konnten nun die Formeln für die Berechnung der Logarithmen Satz 54 bis 59 abgeleitet und demnächst in Satz 60 bis 67 nachgewiesen werden, wie man die Logarithmentafel prüfen und berechnen kann. Jeder wissenschaftliche Mathematiker sollte nach Ansicht des Verfassers eine Reihe von Logarithmen selbst berechnet haben, um eine Sicherheit von der Richtigkeit der Logarithmen zu gewinnen.

Ebenso konnten nun in den Sätzen 68 bis 75 die Gesetze für die Berechnung der trigonometrischen Funktionen und in den Sätzen 76 bis 79 die Gesetze für die Berechnung der Logarithmen dieser Funktionen und für die Logarithmen der trigonometrischen Tafeln gegeben werden.*

Im zweiten Abschnitte der Funktionenlehre wird nun die Lehre von der Differential- und Integralrechnung bei einer Veränderlichen entwickelt. Hier zeigen sich sowohl bei den Zeichen, wie auch bei den üblichen Methoden bedenkliche Mängel.

Hier schreibt man den Differentialquotienten als wirklichen Quotienten $\frac{dy}{dx} = f \cdot x$. Aber da die Funktionen Zahlgrößen sind, für welche die Zahlgesetze gelten, so kann man nach Zahlenlehre 167 $\frac{d}{d}$ heben und erhält also $y = x f \cdot x$, kurz eine GröÙe, welche man gar nicht sucht. Man muss also dem Differentialquotienten ein Zeichen geben, wo sich nichts heben lässt; ich habe dafür das unzweideutige Zeichen $\frac{d}{x}$ gelesen „Diff x von“ eingeführt.

Die meisten Mathematiker auch neuester Zeit leiten den Differentialquotienten dadurch ab, dass sie von dem Quotienten der Differenzen

* Der Verfasser hat fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln Stettin 1895, Preis 50 Pf., herausgegeben, welche für die trigonometrischen Funktionen 9200 neue Logarithmen enthalten, die, obwohl sie für die genaue Berechnung unumgänglich nothwendig sind, doch in allen andern Tafeln fehlen.

$\frac{dy}{dx}$ ausgehen und diesen Quotienten in den Differentialquotienten übergehen lassen, wenn jede der beiden Differenzen Null wird; dann wird also $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, d. h. eine Gröse, welche jeder beliebigen Gröse gleich ist, da $0 \cdot b = 0$ für jede Gröse ist, es ist dann also $\frac{dy}{dx}$ nicht einer einwertigen Gröse, sondern einer Gröse von unendlich vielen Werten gleichgesetzt, also zweifellos keine einwertige Funktion, und wird auch nie einwertig, mag man auch noch so viel Redensarten und geometrische Zeichnungen vorführen, welche dies plausibel machen sollen. Wissenschaftlich lässt sich so nie ein einwertiger Diff nach x gewinnen.

Hier ist der einzig wissenschaftliche und auf die Zahlenlehre, wie auf die Grundlehren der Funktionenlehre zu gründende Weg der, dass man die $f_0(x + y)$ in einer steigenden Höhenreihe von y entwickelt, also $f_0(x + y) = f_0x + y f_0'x + \dots$ ableitet und den ersten Diff $x \frac{d}{dx}$ der ersten abgeleiteten Funktion von x d. h. $f_0'x$ gleichsetzt. Diese Form der Ableitung ist bereits von Leibniz gegeben, ist die einzige Form, in welcher der Diff x wissenschaftlich abgeleitet werden kann, und hat durch Lagrange *Théorie des fonctions analytiques* Paris 1797 (3. Aufl. 1847) die eleganteste Form erhalten, an welcher, nachdem die Gesetze der echten Reihen streng wissenschaftlich entwickelt sind, nichts auszufetzen ist. Nachdem diese Mängel verbessert sind, bietet die Ableitung sämtlicher Diffe nach x , bez. nach $x + iy$ Satz 83 bis 153 keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Die Sätze 154 bis 184 leiten aus den Diffe die Eigenschaften der ursprünglichen Funktionen mit ihren Beugungen, ihrem Maximum und Minimum und ihren Wurzelwerten ab.

Die Integralrechnung beginnt nun mit dem Satze 185. Hier mussten wieder neue Wege eingeschlagen werden. Jedes Integral hat nämlich eine oder mehrere willkürliche Constante. Schon das erste Integral z. B. $\int x^m \cong w_0 + \frac{x^{m+1}}{m+1}$ hat die eine willkürliche Constante w_0 , welche jeden beliebigen Wert annehmen kann. Jedes Integral ist demnach eine vielwertige Gröse, kurz ein Funktional. Das erste Integral kann man nun zwar einwertig machen, indem man x zwischen den Grenzen a und b nimmt, denn dann wird $\int_a^b x^m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ d. h. einwertig.

Aber bei den höhern Integralen konnte man hierdurch die Willkürlichen nicht fortschaffen; hier blieb also jedes Integral vielwertig. Die Mathematiker konnten daher nichts mit den höhern Integralen anfangen, sie haben daher auch keine höhern Integrale behandelt. Aber diese höhern Integrale haben doch eine wesentliche Bedeutung; und kann man dieselben leicht einwertig machen, indem man sämtliche willkürliche Constante gleich Null setzt. Ich nenne das einwertige Integral, dessen sämtliche willkürliche Constante gleich Null gesetzt sind, eine Integre. Diese Integre ist dann einwertig, als Zeichen derselben nehme ich $\frac{d}{x}^{-m} f_x$. Sei dies $\frac{d}{x}^{-m} = F_x$; dann ist

$$\frac{d}{x}^m f_x = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + F_x.$$

Die Ableitung der mten Integre ist dann nicht schwer; die Sätze 185 bis 231 zeigen uns diese Ableitung. Von 232 bis 256 werden dann die Integren zu den Diffgleichungen abgeleitet. Die höhere Funktionenlehre ist hiermit vollendet.

Den dritten Abschnitt der Funktionenlehre bilden nun die Sätze der Funktionen von zwei oder mehreren Veränderlichen. Für diese musste ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Hier hat man bisher fast nur das Integren von vollständigen Differential-Quotienten versucht, da aber fast nie ein vollständiger Differentialquotient mit allen feinen zu einander passenden Gliedern gegeben ist, so kann man gegenwärtig auch die Diffe mit zwei Veränderlichen fast nie integrieren. Ja die Diffe höherer Stufen erscheinen den Mathematikern noch ganz unlösbar; an diese hat man sich überhaupt noch nicht gewagt.

Soll hier ein besseres Ergebniss erzielt werden, so muss ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Ueberdies sind in den weitaus meisten Fällen uns Teildiffe (partielle Differentialquotienten) gegeben, für welche die Integre bez. das Integral gefunden werden soll. Auch dies zwingt uns, einen ganz neuen Weg zu versuchen.

Aber auch nicht jede zwei gegebenen Teildiffe lassen sich integrieren. Es kommt nicht selten vor, dass zwei gegebene Teildiffe gar nicht auf ein und dieselbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden können. Es muss also untersucht und festgestellt werden, in welchen Fällen zwei gegebene Teildiffe auf dieselbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden können, in welchen nicht.

Der Verfasser hat daher die für alle theoretischen Wissenschaften am meisten gebrauchten und vielfach ebenso leicht zu integrierenden Teil-

diffe (partiellen Differentialquotienten) wie die im zweiten Abschnitte behandelten einer einzigen Veränderlichen einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

Er nennt den m ten Diff einer Funktion mehrer Veränderlichen, in welcher zwar die Höhen verschiedener Veränderlicher vorkommen, in welcher aber der m te Diff nur nach einer Veränderlichen y $\frac{d^m}{dy}$ genommen ist, den m ten Eckdiff nach y . Dagegen eine Funktion, in welcher die Diffe nach zwei oder mehrn Veränderlichen $\frac{d^a}{dx} \frac{d^b}{dy} \dots$, wo $a + b + \dots = m$ ist, einen Mitteldiff.

Der m te Eckdiff nach x einer Funktion mehrer Veränderlichen ist dann gleich dem m ten Diffe nach x einer Funktion einer Veränderlichen, indem man alle andern Veränderlichen als Konstante behandelt (Satz 380).

Der Verfasser unterscheidet dann für das Integren dieser Eckdiffe die getrennten, die trennbaren, die ergänzenden und die ergänzbaren Eckdiffe, bei denen sich jede Differentialgleichung auf eine Integre zurückführen lässt, während bei den andern Eckdiffen und bei den Mitteldiffen das Integren nicht zulässig ist.

Es ergeben sich dann zahlreiche Anwendungen für die Versuche und für die auf Versuche gegründeten Wissenschaften.

Den vierten Abschnitt der Funktionenlehre, die Lehre von den erweiterten Funktionen, d. h. von den Fournierschen-, den Bernouillischen-, den Gamma-, den elliptischen Funktionen u. s. w., hat der Verfasser nicht herausgegeben, da er hier nicht zu neuen Methoden gelangt ist. Hier kann er nur auf die Arbeiten anderer Mathematiker verweisen.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung in die Folgelehre oder Funktionenlehre.

	Numer.	Seite.
1. Die allgemeinen Erklärungen der Folgelehre	1	1
2. Das stetige Wachsen bez. Abnehmen der Größen	9	4

Erster Abschnitt der Folgelehre: Die niedere Folgelehre oder die Lehre von den echten Reihen.

3. Die echten oder die konvergenten Reihen	17	10
4. Die Höhen einer Summe bei beliebiger Zahl in der Stufe	31	18
5. Die Reihe für Loge oder Logarithmen und die Berechnung der Logarithmentafel	54	31
6. Die Reihen für die Winkelfolgen und Bogen und die Berechnung der trigonometrischen Logarithmentafeln	68	45

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Die höhere Folgelehre oder die Lehre von den Diffe und von den Integren einer Veränderlichen.

7. Die allgemeinen Sätze über Diffe oder Differentialquotienten ...	80	60
8. Die Diffe (die Differentialquotienten) für die Formeln der Zahlen- lehre oder der niedern Analyse	104	72
9. Die Eigenschaften für die Folgen der Zahlen- und Folgelehre ..	154	86
10. Die Integrale und die Integren der Diffe oder der Differential- quotienten	185	106
11. Die Integren zu den Diffgleichungen	232	119
A. Das Integren durch Einführung einer neuen Veränderlichen	232	119
B. Das Integren durch Reihen	257	125
C. Das Integren der Brüche von Folgen	259	126
D. Die Integren von Stufen, Logen, von Winkel- und Logenfolgen	300	148

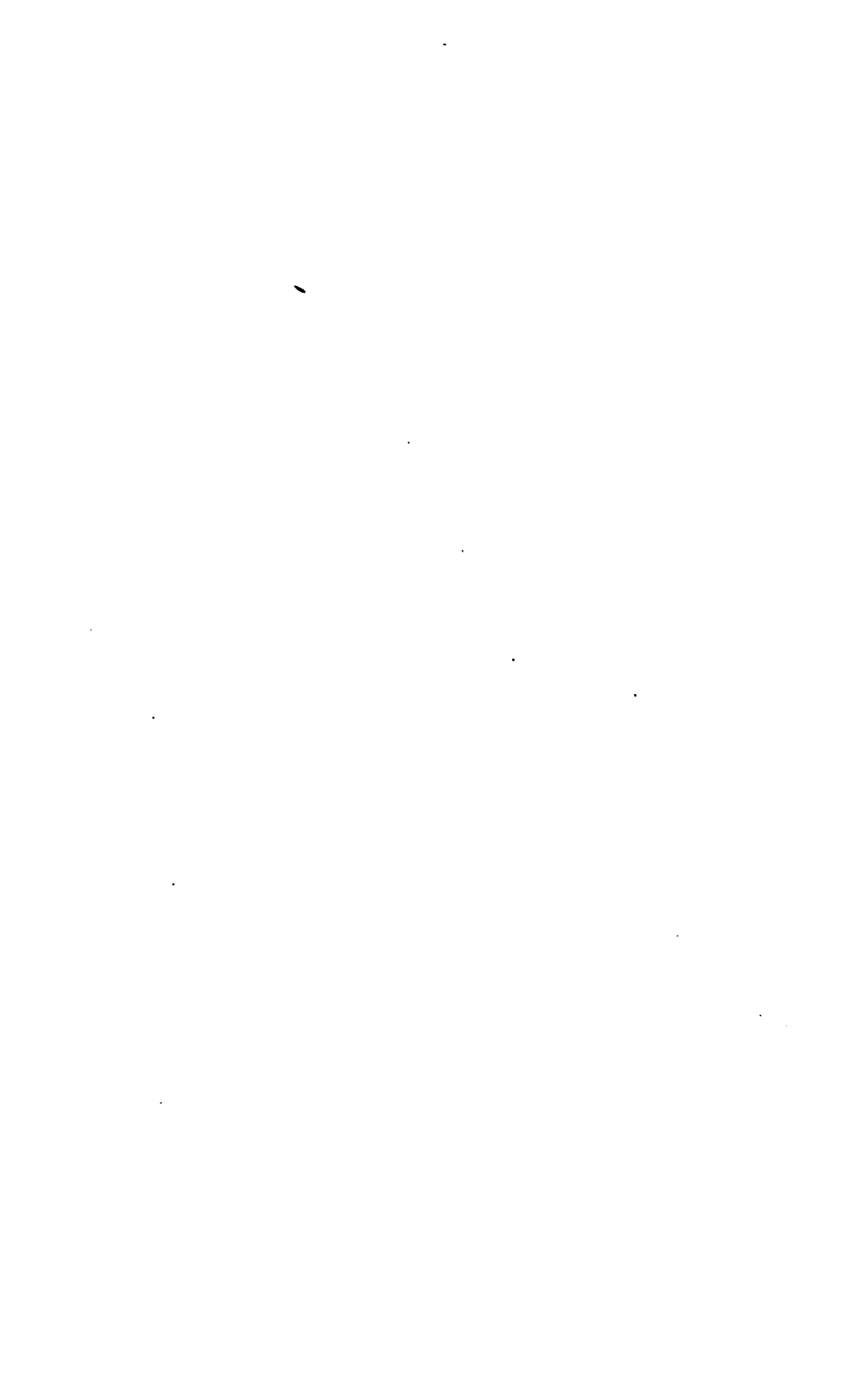
**Dritter Abschnitt der Folgelehre: Die dehnende Folgelehre
oder die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Ver-
änderlichen.**

	Nummer.	Seite.
12. Die allgemeinen Sätze über die Folgen zweier und mehrer Ver- änderlichen	361	167
13. Die Diffe (Differentialquotienten) von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen	369	169
14. Die Integren und Integrale von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen	382	174
15. Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen	392	181

**Vierter Abschnitt der Folgelehre: Die erweiternde Folgelehre
oder die Lehre von den erweiterten Folgen oder Funktionen.**

16. Die erweiterten Folgen	408	189
----------------------------------	-----	-----





1. Die allgemeinen Erklärungen der Folgelehre.

Erklärung. Die Folgelehre oder die Funktionenlehre 1.
ist der höhere Zweig der Rechenlehre oder Analysis und heist daher auch die höhere Analysis. Es behandelt dieser Zweig die Rechnungen mit Folgen oder Funktionen, welche aus den Rechnungen der Zahlenlehre oder der niedern Analysis hervorgegangen sind oder noch hervorgehen werden.

Erklärung. Die Folge oder Funktion von x heist eine 2.
einwertige Formel von x , welche durch Knüpfungen der Rechenlehre entstanden ist, und in welcher die Folge ihre Werte ändert, wenn x sie ändert.

Die Veränderliche (die Variable) heist die GröÙe x , welche ihren Wert in der Formel ändert. Die Beständige oder Konstante heist eine GröÙe, welche in der Formel ihren Wert unverändert beibehält.

Erklärung. Das Zeichen der Veränderlichen ist einer 3.
der letzten Buchstaben im Abeece: $x, y, z, u, v \dots$; das Zeichen der Beständigen ist einer der ersten Buchstaben im Abeece: a, b, c, \dots

Das Zeichen der Folgen oder Funktionen ist ein f mit einem kleinen o : $f_o, F_o, \varphi_o, \Phi_o, \psi_o, \Psi_o$. Jedes Folgezeichen bezieht sich stets auf die sämtlichen folgenden GröÙen desselben Gliedes.

Die Mathematiker wenden für die Folgen oder Funktionen meist ein f ohne ein kleines o an; dies aber ist fehlerhaft. Jeder Buchstabe ist in der Formenlehre oder Mathematik das Zeichen einer GröÙe, so auch f . Die Zeichen $fx, f \cdot x, f(x)$ bezeichnen demnach das Zeug oder Produkt f mal x , nicht aber eine Folge oder Funktion von x . Dagegen ist das Zeichen f noch nicht verwandt, es kann demnach verwandt werden um die Folge oder Funktion zu bezeichnen; ich führe es dafür in die Wissenschaft ein.

Jedes Folgezeichen bezeichnet in derselben Nummer der Folgelehre stets nur eine und dieselbe Formel und hat also nur einen Wert. Im Uebrigen kann jedes Folgezeichen jede beliebige Formel der Rechenlehre bezeichnen.

Jedes Folgezeichen bezieht sich auf das ganze demnächst folgende Glied.

So z. B. ist $F_0 x \cdot y = F_0 (x \cdot y)$ die Folge von $x \cdot y$, so ist $F_0 \frac{x}{y} = F_0 \left(\frac{x}{y} \right)$ die Folge von $\frac{x}{y}$, so ist $F a x^a = F (ax^a)$ die Folge von ax^a , so ist $F_0 a \cdot \sin x = F_0 (a \cdot \sin x)$ die Folge von $a \sin x$ u. f. w.; dagegen ist $F a \pm b = \pm b + F_0 a$, oder $\pm b$ plus der Folge von a und ganz verschieden von $F (a \pm b)$. Soll sich das Folgezeichen nur auf die nächstfolgenden Größen deselben Gliedes beziehen, so muss es mit diesen in eine Klammer eingeschlossen werden. So z. B. ist $(F x) a^x = a^x F_0 x$.

Es ist sehr wichtig, dass man auf diesen Gebrauch in der Mathematik oder Formenlehre achte, da man sonst in die größten Verwirrungen gerät. So ist $\sin ax = \sin (ax)$, $\sin \frac{x}{b} = \sin \left(\frac{x}{b} \right)$, $\sin x^a = \sin (x^a)$, dagegen $\sin a + b \neq \sin (a+b)$.

Das Folgezeichen bezieht sich also auf alle Größen des nächstfolgenden Gliedes und unterscheidet sich dadurch wesentlich von den Knüpfungszeichen der einfachen Größen, wo immer nur eine GröÙe an die nächst vorhergehenden angeknüpft wurde. Z. B. $F_0 \sin x^a = F_0 [\sin (x^a)]$, dagegen $abc d = [(ab)c] d$. Es ist dieser Unterschied aber nicht ein willkürlicher, sondern notwendig in der Sache begründet. Denn bei den Knüpfungen der einfachen Größen geht man von einer einfachen GröÙe aus und verknüpft diese mit einer GröÙe, das Gesamt wieder mit einer GröÙe und sofort. Dagegen bei der Funktion setzt man bereits die sämtlichen Knüpfungen der Zahlenlehre voraus, das Folgezeichen bezieht sich demnach auf die Gesamtheit der folgenden zu einem Gliede verknüpften Größen. Die obige Regel ist also in der Sache begründet. Beachtet man dieselbe nicht, so gebraucht man unzählige Klammern. Die Mathematiker, welche diese Regel nicht beachten, und also Klammern setzen müßten, finden nun aber diese Klammern grosenteils höchst unbequem, lassen sie daher möglichst weg und werden dadurch ungenau. Schon hierdurch entstehen mancherlei Schwierigkeiten und Dunkelheiten, welche sämtlich vermieden werden, wenn man die obige Regel befolgt. Uebrigens kann man, wenn man diese Regel stets beobachtet, nach den Folgezeichen die Klammern in den meisten Fällen entbehren.

4. **Erklärung.** Die Folge (die Funktion) einer Veränderlichen heist die Folge, wenn die Formel nur eine Veränderliche enthält.

Die Folge mehrer Veränderlichen heist die Folge wenn die Formel mehre Veränderliche enthält.

Da die Folgen einer Veränderlichen die einfachern sind, so werden wir uns im Folgenden zunächst vorzugsweise mit diesen beschäftigen.

5. **Erklärung.** Die Reinformel (die reelle Funktion) heist eine Folge, in deren Formel nur Zahlen vorkommen.

Die Richtfolge (die komplexe Funktion) heist eine Folge, in deren Formel Richtgrößen (komplexe Größen) vorkommen. Das Zeichen

der Richtfolge ist $f_0(x, i)$. Die Reinformen und die Richtfolgen heißen gemeinsam Zahlfolgen.

Die Richtgröße (komplexe Größe) heißt die Größe $a + ib$, wo a und b Zahlen sind, i aber gleich $(-1)^{1/2}$ ist.

Die Mathematiker teilen noch die Reihenfolgen in Basenfolgen (algebraische Funktionen), wo die Veränderliche nur in der Base (sei es in der Summe oder im Unterschiede, im Zeuge (Produkte) oder im Nenner, in der Base einer Höhe oder einer Tiefe) vorkommt und in Stufenfolgen (transcendente Funktionen), wo die Veränderliche in der Stufe einer Höhe a^x oder im Loge $\frac{x}{a}$, oder in der Winkelfolge $\sin x$, oder im Bogen $\arcsin(x)$ vorkommt. Diese Unterscheidung ist jedoch von untergeordnetem Werte.

Satz. $f_0(x, i) = \varphi_0 x + i \psi_0 x$.

6.

Jede Richtfolge (komplexe Funktion) von x ist gleich der Summe einer Reinforme und einer Jfolge von x , wo die Jfolge das Zeug oder Produkt von i und einer Reinforme von x ist.

Beweis; Jede Größe, welche ausser den Zahlen noch i enthält, lässt sich, wie wir in der Zahlenlehre sahen, auf die Form der Richtgröße (komplexen Größe) $a + ib$ bringen, wo a und b reine Zahlen sind, indem i^n , wenn n gerade ist, eine Zahl ± 1 , wenn n ungerade ist, i mal einer Zahl ergibt und zwei solche Richtgrößen $a + ib$ und $c + id$ sind nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.

Jede Folge $f_0(x, i)$, welche ausser der Veränderlichen x noch das i enthält, lässt sich also auf die Form bringen $\varphi_0 x + i \psi_0 x$ wo $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ nicht mehr i enthalten, sondern Reinformen (reelle Funktionen) von x sind und sie muss auf diese Form gebracht werden, da sich sonst gar nicht beurteilen lässt, ob sie einer andern Größe gleich ist oder nicht. Denn sei $F_{01}(x, i) = \varphi_{01} x + i \psi_{01} x$ und $f_{02}(x, i) = \varphi_{02} x + i \psi_{02} x$, so ist $f_{01}(x, i) = f_{02}(x, i)$ nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann, wenn sowohl $\varphi_{01} x = \varphi_{02} x$, als auch $\psi_{01} x = \psi_{02} x$ ist.

Erklärung. Das Gefolge oder das Funktional von x heißt 7. jede mehrwertige Formel von x , wo demselben Werte von x mehrere Werte der Formel entsprechen. Das Zeichen des Gefolges ist G_0 .

Satz. Zwei Gefolge können einander nur entsprechend gleich 8. gesetzt werden (Zeichen \cong gelesen entsprechend gleich), d. h. es darf nur ein Wert des einen Gefolges dem entsprechenden Werte des andern Gefolges gleich gesetzt werden. Dagegen darf nie ein Gefolge dem andern Gefolge gleich gesetzt werden.

Beweis: Das Gefolge von x habe für den Wert $x = a$ die

beiden verschiedenen Werte b und c , wo $b \geq c$. Setzt man nun $G_0 a = b$ und $G_0 a = c$, so erhält man $b = G_0 a = c$, d. $b = c$, da zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, auch einander gleich sind. Es wäre also gleichzeitig $b \geq c$ und auch $b = c$. Da nun eine Größe nach Zahlenlehre 10 nie einer andern ungleich und zugleich gleich sein kann, so ist dies unmöglich; man darf also nicht $G_0 a = G_0 a$ setzen, auch nicht $G_0 a = b$ oder $= c$, vielmehr muss man setzen $G_0 a \cong b, c$.

In der Mathematik hat man diese Vorschrift vernachlässigt. Man setzt $\sqrt{a^2} = +a$ und auch $\sqrt{a^2} = -a$, und müsste also auch $+a = \sqrt{a^2} = -a$ folgern; aber diese Folgerung lässt man nun fort, weil dies fehlerhaft wäre. Aber nicht diese Folgerung ist fehlerhaft; diese ist vielmehr streng richtig. Fehlerhaft ist nur, dass man die $\sqrt{a^2}$ wie eine einwertige Folge behandelt und einer Größe gleich setzt, während sie nur entsprechend gleich gesetzt werden darf. Richtig ist also $\sqrt{a^2} \cong \pm a$. Ebenso bei jedem andern Gefolge, z. B. bei den Integralen.

Die Gefolge haben in der Mathematik eine wichtige Bedeutung; aber man muss sie richtig behandeln, wenn man nicht in lauter Trugschlüsse fallen und Fehler machen will.

2. Das stetige Wachsen bez. Abnehmen der Größen.

Um die Aenderung der Veränderlichen und ihre Wirkung auf die Folge oder Funktion betrachten und den Begriff des stetigen Wachstums bez. Abnehmens richtig fassen zu können, betrachten wir zunächst die Zahlreihe und gehen, um auch unendlich kleine Aenderungen betrachten zu können, auf die unendlichen Zehntbrüche oder Dezimalbrüche zurück.

9. **Erklärung.** Ein unendlicher Zehntbruch oder Dezimalbruch heist ein Zehntbruch, welcher unendlich viele Stellen hat. Der Zehntbruch oder Dezimalbruch heist abgebrochen, wenn man ihn nur bis zu einer bestimmten Stelle hin nimmt. Die Summe aller folgenden Stellen heist der Rest des Zehntbruches.

Beispiel: $\frac{1}{9} = 0,11111 \dots$ ist ein unendlicher Dezimalbruch. Brechen wir denselben bei der zehnten Stelle, $0,111111111$ ab, so ist der Rest gleich $\left(\frac{1}{10}\right)^{10} \cdot 0,11111 \dots = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$.

10. **Satz.** Der Rest eines Zehntbruches oder Dezimalbruches ist stets kleiner oder gleich einer Einheit in der letzten Stelle, bei der abgebrochen ist.

Beweis: Sei der Zehntbruch bei $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ abgebrochen, so umfasst der Rest nur Ziffern der folgenden Stellen und ist also

$$a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+2} + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+3} + \dots = \\ \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \left[a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \right]$$

Hier ist jede der Zahlen $a_1, a_2 \dots$ eine ganze Zahl kleiner als 10, also höchstens 9 und ist mithin

$$a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \leq \\ 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \\ \leq 0,999 \dots$$

nun ist aber $0,999 \dots = 9 \cdot 0,111 \dots = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ mithin ist der Rest der Reihe

$$a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+2} + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+3} + \dots \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot 1.$$

was zu beweisen war.

Erklärung. Stetig wachsend heist eine Reihe von Zahlen, 11. wenn zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern der Reihe, deren Unterschied einer endlichen Zahl gleich ist, mag diese übrigens so klein sein, wie sie wolle, noch unendlich viele Glieder der Reihe liegen, von denen jede gröſser ist als die vorhergehenden und kleiner als die folgenden Glieder der Reihe.

Satz der Zahlreihe. Die Zahlreihe, d. h. die sämtlichen 12. Zehntzahlen mit den sämtlichen endlichen und unendlichen Zehntbrüchen (Decimalbrüchen), bildet eine stetig wachsende Reihe von Zahlen, welche von Strichunendlich bis zu Plusunendlich wachsen. Alle Zahlwerte beliebiger Gröſsen gehören dieser Reihe an und giebt es keinen Zahlwert ausser den Gliedern der Zahlreihe.

Beweis: 1. Die Zahlreihe bildet eine stetig wachsende Reihe. Denn nehmen wir zwei Glieder der Zahlreihe, deren Unterschied auch nur $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, z. B. $\left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$ betrage, so liegen doch zwischen diesen beiden Gliedern noch unendlich viele Glieder der Reihe, nämlich alle Glieder der unendlichen Reihe $\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \sum_{a_1}^9 \left(\frac{1}{10}\right)^a$, wo a_1 jeden der 10 Werte von 0 bis 9 haben kann. Brechen wir diese Reihe z. B. nach 100 Gliedern ab, so erhalten wir bereits 10^{100} Glieder der Reihe, die zwischen jenen beiden Gliedern liegen, lassen wir die Reihe sich aber

bis ins Unendliche fortsetzen, so erhalten wir auch unendlich viele Glieder der Reihe, die zwischen jenen beiden Gliedern liegen.

2. Wenn irgend ein Zahlwert gegeben ist, so muss er einwertig sein, mithin eine bestimmte GröÙe haben, er muss sich aber auch in Zahlen ausdrücken lassen, mithin muss er der Zahlreihe angehören. Gehörte er der Zahlreihe nicht an, so hätte er auch nicht einen bestimmten Zahlwert, wäre nicht gröÙer als bestimmte Zahlen, nicht kleiner als andere, und liese sich überhaupt nicht mit andern Zahlen vergleichen, kurz er wäre nicht ein bestimmter Zahlwert.

13. **Satz der Reihe der RichtgröÙen.** Die Reihe von RichtgröÙen $a + ib$, wo a und b jede alle Werte der Zahlenreihe von Strichunendlich bis Plusunendlich besitzen können, bildet eine unendliche Doppelreihe. Alle RichtgröÙen gehören dieser Reihe an und giebt es keine RichtgröÙe ausser den Gliedern dieser Reihe.

Beweis: Jede RichtgröÙe $a + ib$ ist eine GröÙe, in welcher a und b reine Zahlen sind. Was nun auch a und b für Zahlen sind, so umfasst die Reihe der RichtgröÙen alle GröÙen, wo a eine beliebige Zahl und ebenso b eine beliebige Zahl zwischen Strichunendlich und Plusunendlich ist und kann es keine RichtgröÙe ausser den Gliedern dieser Reihe geben.

14. **Erklärung.** Eine Zahl wächst stetig in den Grenzen von a bis b heist, sie nimmt der Reihe nach alle Zahlwerte der Zahlreihe von a bis b an, diese eingeschlossen. Zeichen $x = \text{Mitt. } [a, b]$.

Eine Zahl wächst stetig in den Grenzen zwischen a und b heist, sie nimmt der Reihe nach alle Zahlwerte der Zahlreihe zwischen a und b an, diese ausgeschlossen. Zeichen $x = \text{Mitt. } (a, b)$.

Es ist bei den Grenzbestimmungen überaus wichtig, dass man die Unterscheidung mache, ob die Grenzen selbst eingeschlossen oder ausgeschlossen sind; da sonst notwendig Verwirrung entstehen muss.

15. **Satz.** Jede Reinforme (reelle Funktion) von x , welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die GröÙe x wächst, ist sofern x stetig wächst, auch eine stetig wachsende bez. eine stetig abnehmende GröÙe, d. h. die Reinforme $F_0 x$ von x durchläuft, wenn x alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $F_0 a$ bis $F_0 b$ oder die Reinforme ist in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Reinforme von x .

Beweis: 1. Sei die Reinforme von x gleich $F_0 x$ und sei für jedes beliebige x in den Grenzen von a bis b , wenn $x + c > x$ ist,

auch $F_0(x + c) > F_0x$, auch sei x eine stetig wachsende Gröse, d. h. nach 13 und 11 eine Gröse, bei der zwischen je zwei Werten, deren Unterschied einer endlichen Gröse c gleich ist, mag diese so klein sein, wie sie wolle, noch unendlich viele Werte liegen, so soll bewiesen werden, dass auch F_0x eine stetig wachsende Gröse sei.

Sei also $F_0(x + c) - F_0x = A$ zunächst eine Gröse, welche noch gröser ist als c , so kann man, da x zwischen den Werten $x = a$ und $x + c = a + b$ nach 11 noch unendlich viele Werte $x_1, x_2 \dots$ hat, welche in der Weise steigen, dass jeder folgende Wert $x_{n+1} > x_n$ ist, auch unendlich viele Werte der F_0x zwischen jenen Werten einführen und muss auch hier nach der Voraussetzung des Satzes jeder folgende Wert $F_0x_{n+1} > F_0x_n$ sein. Der Unterschied A zerfällt also auch hier in unendlich viele Zwischenwerte, bei denen stets der folgende gröser als der nächst vorhergehende ist; man kann demnach stets F_0x_n und F_0x_m in der Art wählen, dass $F_0x_n - F_0x_m$ zwar grösser als Null, aber kleiner als die endliche Gröse c sei. Sei nun $x_n - x_m = u$, so gibt es nach 11 zwischen diesen beiden Werten von x noch unendlich viele Werte von x , bei denen jeder folgende wieder gröser als die vorhergehenden ist. Da aber jedem x eine Reinforme F_0x entspricht und diese bei gröserem x auch gröser wird, so gibt es auch zwischen den Werten F_0x_n und F_0x_m auch unendlich viele Werte von F_0x , bei denen gleichfalls jeder folgende Wert gröser als die vorhergehenden ist, d. h. F_0x ist innerhalb jener Grenzen eine stetig wachsende Gröse. !!!

Wenn nun x zwischen zwei endlichen Werten x_m und x_n alle unendlich vielen Werte der wachsenden Zahlreihe durchläuft, so durchläuft auch die Formel F_0x zwischen den Werten F_0x_m und F_0x_n die unendlich vielen Werte der wachsenden Zahlreihe zwischen diesen Grenzen und kann es nicht einen Wert von x_n geben, dem nicht ein Wert von F_0x_n entspreche, und nicht einen Wert von F_0x_n , dem nicht ein Wert von x_n entspreche.

2. Der Beweis ist ganz entsprechend, wenn F_0x stets abnimmt, während x wächst.

Es könnte Manchem, welcher die bisherigen Erklärungen und Beweise der Funktionenlehre gewohnt ist, so erscheinen, als sei der Beweis in n 15 nicht vollständig und fehle der Beweis, dass die Reinforme von x nur einen und nicht mehr Werte habe. Aber nach n 2 ist jede Folge oder Funktion nur einwertig, und bedurfte es also hierfür gar keines Beweises. Ebenso ist nach Zahlenlehre n 2 jede Gröse und nach Zahlenlehre n 5 auch jedes Ergebniss jeder Knüpfung, also auch jede Formel oder Folge nur einwertig und ist also auch aus diesem Grunde jeder Beweis unnöthig.

Ich bemerke hier nochmals, dass sich das Zeichen F_0 auf das ganze folgende Glied bezieht, auch wenn dies nicht in eine Klammer geschlossen ist. f_0 ist $F_0 \frac{x}{a}$ die Formel von $\frac{x}{a}$ also gleich $F_0 \left(\frac{x}{a} \right)$, f_0 ist $F_0 a x^n = F_0 (a x^n)$ oder Formel von $a x^n$; dagegen ist $F_0 a + b = b + F_0 a$ oder b plus der Formel von a und ganz verschieden von $F_0 (a + b)$ oder der Formel von $a + b$. Es ist notwendig, dass man genau auf diesen Gebrauch achte, damit man nicht in Verwirrung gerathe.

16. **Satz.** Die Richtfolge (die komplexe Funktion) von x , nämlich $F_0(x, i) = \varphi_0 x + i \psi_0 x$, in welcher die Reinformen $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ in den Grenzen des x von a bis b stets wachsen, bez. stets abnehmen, wenn die GröÙe x wächst, ist sofern x stetig wächst, auch eine RichtgröÙe, in welcher die beiden Reinformen $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ stetig wachsen oder stetig abnehmen, d. h. die Reinformen von x $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ durchlaufen, wenn x alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $\varphi_0 a$ bis $\varphi_0 b$ beständig von $\psi_0 a$ bis $\psi_0 b$ oder die Richtfolge ist in den Grenzen des x von a bis b eine stetige Richtfolge von x .

Beweis: Unmittelbar aus 15.

Die Folge oder Funktion wird in den meisten Lehrbüchern durch das Bild der Bewegung erklärt, und werden daraus die Begriffe der stetigen Veränderung, der Grenze, der unendlich kleinen Differenz genommen. Es ist dieses Bild der Bewegung nun auch ungemein geeignet, um die Vorgänge anschaulich zu machen und werde ich deshalb von diesem Bilde zur Veranschaulichung vielfach Gebrauch machen; aber die wissenschaftliche Entwicklung darf man darauf nicht gründen, wenn man nicht verworren, unklar und unwissenschaftlich werden will.

Die Formenlehre oder Mathematik namentlich die Zahlenlehre gewinnt ihre GröÙen durch Setzen von Einheiten und deren Verknüpfung; ihre GröÙen sind daher endlich verschieden, diskrete GröÙen, so alle ZahlgröÙen. Erst durch den unendlichen Reihenbruch, den unendlichen Dezimalbruch, gewinnt man in der Zahlenlehre GröÙen, welche sich von andern so wenig unterscheiden als man will, gewinnt man eine stetige Reihe von GröÙen, welche stetig in einander übergehen und jeden Wert annehmen können, der überhaupt nur möglich ist. Auf diese unendlichen Reihenbrüche muss man demnach den Begriff der stetigen GröÙe zurückführen und daraus den Begriff der stetigen Folge ableiten, wie dies in den Sätzen 9 bis 16 geschehen ist.

Alle bedeutenden Mathematiker haben daher auch seit Leibniz die Funktionenlehre oder Folgelehre stets als höhern Zweig der Rechenlehre oder Analysis angesehen und sie deshalb höhere Analysis genannt. Keinem dieser ausgezeichneten Gelehrten ist es eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Bewegungslehre oder Mechanik zu behandeln. Ebenso wenig ist es je einem derselben eingefallen, die Funktionenlehre als einen höhern Zweig der Raumlehre oder Geometrie zu betrachten, wenn sie auch zahlreiche Anwendungen der Funktionenlehre auf die Raumlehre gegeben, und dadurch die Gesetze der

Analysis anschaulich und leichter begreiflich und anwendbar gemacht haben.

Im Gegenfatze hiezu will nun Herr Paul Du Bois-Reymond „Die allgemeine Funktionentheorie. Erster Teil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: GröÙe, Grenze, Argument und Funktion“ Tübingen 1882 die Funktionenlehre nicht als höhern Zweig aus der niedern Analysis, sondern aus der geometrischen GröÙe und zwar speziell aus der lineären GröÙe ableiten, ganz wie er auch die Zahl aus dieser GröÙe ableiten will. Aber der Versuch, den er in dem genannten Buche hiefür macht, ist gänzlich verfehlt und unwissenschaftlich. Herr Paul Du Bois-Reymond ist unzweifelhaft ein sehr tüchtiger Mathematiker, der in der höhern Analysis sehr Bedeutendes geleistet hat, und den ich daher hoch schätze; aber das obige Buch hätte er nicht schreiben sollen, er zeigt sich darin als ungetübt im strengen Denken und schadet bei dem Ansehen, welches er genieÙt, der Wissenschaft selbst. Ich habe bereits in der Zahlenlehre 22 und 211 nachgewiesen, wie fehlerhaft und gänzlich unwissenschaftlich seine Erklärungen von „GröÙe“, von „gleich und ungleich“ sind und dass er damit auf strenge Beweisführung und reine Mathematik überhaupt verzichtet. Hier kann ich darauf verweisen. Aber eben wegen dieser fehlerhaften Grundbegriffe kommt er nun auch bei den Funktionenlehre betreffenden Fragen zu ganz unwissenschaftlichen und fehlerhaften Sätzen. So sagt er a. a. O., Seite 74 „Zwei endliche GröÙen, deren Unterschied unendlich klein ist, sind einander gleich“.

„Eine endliche GröÙe ändert sich nicht, wenn ihr Unendlichkleines hinzugefügt oder hinweggenommen wird“. Und gleich darauf a. a. O., Seite 76 „Das Unendlichkleine ist eine mathematische GröÙe und hat mit dem Endlichen dessen sämtliche Eigenschaften gemein“.

Da es nun eine Eigenschaft des Unendlichkleinen nach ihm ist, dass sich eine endliche GröÙe nicht ändert, wenn ihr Unendlichkleines hinzugefügt oder hinweggenommen wird, und das Endliche mit dem Unendlichen sämtliche Eigenschaften gemein hat, so folgt daraus, dass auch eine endliche GröÙe sich nicht ändert, wenn ihr Endliches hinzugefügt oder hinweggenommen wird. Ähnliche Fehler finden sich wiederholt in der Schrift.

Die Folgelehre zerfällt, wie die Zahlenlehre in vier Abschnitte. Dieselben sind: Die niedere Folgelehre, die höhere Folgelehre, die dehnende Folgelehre und die erweiternde Folgelehre. Die niedere Folgelehre behandelt die echten oder die konvergenten Reihen, die höhere Folgelehre behandelt die Differentialrechnung und Integralrechnung für alle Folgen einer Veränderlichen, die dehnende Folgelehre dehnt die Betrachtung auf mehrere Veränderliche aus und auf die dadurch entstehenden partiellen Differentialgleichungen, wie auf die Variationen, die erweiternde Folgelehre endlich behandelt die Lehre von den höhern Folgen, z. B. den Fourierschen, Bernoullischen, den Gamma und den elliptischen Funktionen.

Erster Abschnitt der Folgelehre: Die niedere Folgelehre oder die Lehre von den echten Reihen.

3. Die echten oder die konvergenten Reihen.

Die echten oder die konvergenten Reihen sind für die Folgelehre dasselbe, wie die Zahlreihen für die Zahlenlehre; auf ihnen beruht die ganze Folgelehre als auf ihrer Base.

Es kommt hier daher auf volle Schärfe an; denn ist man hier ungenau oder folgt man hier Trugschlüssen, so werden sich die Fehler bald geltend machen und die ganze Folgelehre verwirren. In früherer Zeit hatte man hier mancherlei Fehler begangen. Cauchy hat, um diesen Fehlern zu entgehen, die Berechnung des Restes der Reihe eingeführt; aber diese Berechnung ist gänzlich unnützlich, und zu verwerfen, da sie gar keine Vorteile gewährt. Viel richtiger ist es, man führt die echten oder konvergenten Reihen einfach auf die Dezimalbrüche, und damit auf die Reihenzahlen überhaupt zurück, in deren Gebiet sie allein Geltung haben sollen, und vermeidet einfach die Fehler, welche hier im Anfange der Lehre begangen sind; dann werden auch von selbst die daraus gefolgerten Fehler schwinden.

17. **Erklärung.** Eine unendliche Reihe heist die Summe von unendlich vielen Gliedern von denen jedes eine GröÙe ist, $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$. Das Glied u_n heist ihr n tes Glied, das Glied u_a , wo a eine beliebige Pluszahl ist, ihr allgemeines Glied, der Bruch $\frac{u_{a+1}}{u_a}$, sofern u_a ungleich Null ist, ihr Fortschreitungs-**fach** (Fortschreitungs-faktor).

Das Zeichen der Summe ist Su_a , wo a die ganzen Zahlen von Null bis Plusunendlich bezeichnet.

Die Reihe heist fortgesetzt bis zum n ten Gliede, wenn man die ersten Glieder bis zum n ten Gliede hin nimmt, alle folgenden aber fortlässt. Die Summe der folgenden Glieder $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ heist der n te Rest der Reihe, Zeichen r_n .

Das Summenzeichen bezieht sich, wie jedes Folgezeichen auf alle folgenden Grösen deselben Giedes, so ist $Su_n = S(u_n) = u_0 + u_1 + \dots$ so ist $Su_n x^a = S(u_n x^a) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$ so ist $S(\alpha + 1)x^a = S[(\alpha + 1)x^a]$ dagegen ist $Sa_n x^a + by = (Sa_n x^a) + by$. Es ist überaus wichtig, strenge auf diese Regel zu achten, welche von den meisten Mathematikern noch vernachlässigt wird, man kann darnach die grose Mehrzahl der Klammern vermeiden, in der Folgelehre oder Funktionenlehre vermeidet man dadurch $\frac{9}{10}$ bis $\frac{99}{100}$ der Klammern, welche erforderlich sind, wenn man ganz strenge verfährt. Die Formeln werden dadurch viel einfacher und wissenschaftlicher; man muss daher dies Gesetz strenge beobachten. Das Zeichen S_n bezeichnet, dass a alle ganzen Pluswerte von n an haben solle, also $S_n a = n + (n+1) + (n+2) + \dots$. Für $n=0$ kann man den Zeiger weglassen; es ist also $Su_n = S_{u_n}$.

Erklärung. Eine echte Reihe oder konvergente Reihe 18. heist die unendliche Reihe, wenn sie sich stets soweit fortsetzen lässt, dass der Pluswert des Restes kleiner ist als eine beliebige gegebene Pluszahl ϵ und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortsetzt. Wenn eine Reihe einem bestimmten endlichen Werte gleich gesetzt wird, so soll damit immer zugleich gesagt sein, dass die Reihe echt ist.

Eine Reihe, welche nicht echt ist, heist eine unechte Reihe oder eine divergente Reihe. Die unechte Reihe heist eine Uebergangsreihe, wenn sämtliche Glieder der Reihe endlich bleiben, dagegen eine fehlerhafte Reihe, wenn die Glieder der Reihe unendlich werden.

Satz. Jede echte oder konvergente Reihe ist eine Gröse, welche 19. nur einen und nicht mehr bestimmte Werte hat. Man kann sich derselben beliebig nähern, wenn man die Glieder derselben genügend weit zufigt.

Beweis: Nach n 17 ist die unendliche Reihe die Summe von unendlich vielen Gliedern, von denen jedes eine Gröse ist. Nach Zahlenlehre n 2 hat aber jede Gröse nur einen und nicht mehr Werte, also hat auch jedes der unendlich vielen Glieder der Reihe nur einen und nicht mehr Werte. Nach Zahlenlehre Satz 79 ist ferner das Zufügen eine Grösenknüpfung, d. h. nach Zahlenlehre Satz

5 eine Verbindung von Größen, deren Ergebniss nur einen und nicht mehrere Werte hat. Das Ergebniss des Zufügens ist aber die Summe; also hat die unendliche Reihe d. h. die Summe von unendlich vielen Gliedern auch nur einen und nicht mehrere Werte. Bei der echten oder konvergenten Reihe ist aber nach Satz 18 der Pluswert des Restes von einem bestimmten Gliede ab kleiner als eine beliebige gegebene Pluszahl c und bleibt auch kleiner, wenn man die Reihe noch weiter fortsetzt, und kann man sich mithin dem Werte der echten Reihe beliebig weit nähern.

Um der echten oder konvergenten Reihe den Wert der Summe, der aus m tes Glied folgenden n Glieder bestimmen, bez. mit dem m ten Gliede vergleichen zu können, gehen wir auf die Betrachtung dieser Summe ein.

20. **Satz.** Wenn in einer Reihe von Pluszahlen u_0, u_1, u_2, \dots jedes Glied gleich oder kleiner ist als das p fache des nächst vorhergehenden Gliedes und p eine Pluszahl kleiner als 1 ist, so ist die Summe aller Glieder bis zu einem beliebigen n ten Gliede u_n hin kleiner als ein Bruch, dessen Zähler das nullte Glied u_0 und dessen Nenner $1-p$ ist.

Beweis: Gegeben ist nach dem Satze

$$u_1 \leq u_0 p, \quad u_2 \leq u_1 p, \quad \dots \quad u_n \leq u_{n-1} p.$$

Hier sind alle Größen u_0, \dots, u_n Pluszahlen, also auch die Zeuge oder Produkte $u_0 p, u_1 p, \dots, u_{n-1} p$ Pluszahlen, da auch p eine Pluszahl ist. Also ist auch $0 < u_n p$, da u_n und p Pluszahlen sind nach Zahlenlehre 145. Fügt man nun die Größen jeder Seite zu, so erhält man nach Zahlenlehre 147

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + 0 < u_0 p + u_1 p + \dots + u_{n-1} p + u_n p$$

Setzen wir hier $s = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, so geht diese Vergleichung über in

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + 0 < sp$$

und fügt man auf beiden Seiten u_0 zu, so erhält man

$$s < sp + u_0 \quad \text{oder} \quad s(1-p) < u_0$$

mithin da $p < 1$ ist, so ist $1-p$ eine Pluszahl und ist nach Zahlenlehre 201

$$s < \frac{u_0}{1-p} \quad \text{oder} \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n < \frac{u_0}{1-p}$$

21. **Satz.** Wenn a eine Pluszahl > 1 ist und k eine beliebige Zahl, so lässt sich stets eine ganze Pluszahl n von der Art finden, dass
- wenn $a > 1$, auch $a^n > k$ sei, dagegen
 - wenn $a < 1$, auch $a^n < k$ sei,

und diese Vergleichenungen auch fortbestehen, wenn n noch grösser wird.

Beweis: 1. Es sei $a > 1$ so ist nach Zahlenlehre 379 $\log \cdot a$ eine Pluszahl, also auch > 0 . Dann kann man $n > \frac{\log \cdot k}{\log \cdot a}$ setzen, dann ist nach Zahlenlehre 201 auch $n \cdot \log a > \log k$, mithin nach Zahlenlehre 373 $\log \cdot a^n > \log k$ also nach Zahlenlehre 378 auch $10^{\log \cdot a^n} > 10^{\log k}$, d. h. es ist $a^n > k$ nach Zahlenlehre 362.

2. Es sei $a < 1$, so ist nach Zahlenlehre 206 $\frac{1}{a} > 1$. Dann kann man nach Beweis 1 die GröÙe n so setzen, dass $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{k}$ ist. Dann ist $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{k}$ mithin $a^n < k$ nach Zahlenlehre 206.

Satz. Jede unendliche Reihe, in welcher von irgend einem 22. Gliede an der Pluswert des Fortschreitungsgrades gleich oder kleiner als ein bestimmter echter Bruch p ist, ist eine echte Reihe.

Beweis: Seien $a_0, a_1 \dots$ die Glieder der Reihe und seien $u_0, u_1 \dots$ die Pluswerte dieser Glieder und sei die Bedingung des Satzes vom m ten Gliede a_m an erfüllt, so ist also

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \leq p, \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \leq p, \dots \text{ d. h. es ist}$$

$$u_{m+1} \leq u_m p, u_{m+2} \leq u_{m+1} p, \dots$$

dann ist der Pluswert r_m des Restes $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$

$$r_m = u_m p + u_{m+1} p + \dots, \text{ also nach Zahlenlehre 147}$$

$$r_m \leq u_m + u_{m+1} + \dots \quad \text{und da nach 20}$$

$$u_m + u_{m+1} + \dots < \frac{u_m}{1-p} \quad \text{so ist nach 17 auch}$$

$$r_m < \frac{u_m}{1-p} \quad \text{und ebenso } r_{m+n} < \frac{u_{m+n}}{1-p}$$

da diese Vergleichung auch bestehen bleibt, wenn man statt m eine grössere Zahl, z. B. $m + n$ setzt.

Da ferner nach der Bedingung des Satzes auch

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} \leq p, \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \leq p \dots \frac{u_{m+n}}{u_{m+n-1}} \leq p,$$

so ist nach Zahlenlehre 204 auch das Zeug oder Produkt dieser n GröÙen

$$\frac{u_{m+1} \cdot u_{m+2} \dots u_{m+n}}{u_m \cdot u_{m+1} \dots u_{m+n-1}} \leq p^n, \text{ also nach Zahlenlehre 182}$$

$\frac{u_{m+n}}{u_m} \leq p^n$, also nach Zahlenlehre 201 auch

$\frac{u_{m+n}}{1-p} \leq \frac{u_m p^n}{1-p}$ d. h. da $r_{m+n} < \frac{u_{m+n}}{1-p}$, so ist auch

$$r_{m+n} < \frac{u_m p^n}{1-p}$$

Die Reihe wird nun echt fein, wenn sie sich soweit fortsetzen lässt, dass der Pluswert des Restes d. h. r_{m+n} kleiner ist als eine beliebige gegebene Pluszahl c und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortsetzt. Da hier $p < 1$ ist, so kann man nach 21 n stets so bestimmen, dass $p^n < \frac{c(1-p)}{u_m}$ wird und auch bleibt, wenn n weiter wächst. Dann ist nach Zahlenlehre 201

$$\frac{u_m p^n}{1-p} < c \text{ und da } r_{m+n} < \frac{u_m p^n}{1-p}, \text{ so ist auch } r_{m+n} < c$$

und diese Vergleichung bleibt auch bestehen, wenn n wächst.

23. **Satz.** Wenn der Pluswert des n ten Restes einer unendlichen Reihe kleiner ist als c und auch kleiner bleibt, wenn man die Reihe noch weiter fortsetzt, so ist der Pluswert von jedem der auf das n te Glied noch folgenden Glieder kleiner als $2c$.

Beweis: Sei u_r eines der auf u_n folgenden Glieder und sei A die Summe der ganzen Reihe, und bezeichnet $P(u)$ den Pluswert von u , so ist nach der Annahme

$$P[u_0 + u_1 + \dots + u_r - A] < c$$

und ebenso

$$P[A - (u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1})] < c, \text{ also nach Zahlen-} \\ \text{lehre 149}$$

auch die Summe

$$P u_r < 2c,$$

Nachdem wir hiemit die allgemeinen Sätze über die echten oder konvergenten Reihen entwickelt haben, wenden wir uns nun zur Betrachtung der echten Höhenreihen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$. Wir führen zunächst die verschiedenen Arten der echten Höhenreihen, namentlich die fallende echte Höhenreihe und die echte Höhenreihe mit gebrochener Stufe auf die Form der steigenden echten Höhenreihe zurück, und entwickeln für letztere das Gesetz der Vorzeichen.

24. **Satz.** Die steigende Höhenreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum a_n x^n$$

ist stets echt, wenn x^2 kleiner als Eins, und zugleich keine der Vorzeichen unendlich ist.

Beweis: Unmittelbar aus 22.

Satz. Die fallende Höhenreihe

25.

$$a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots = S a_n x^{-n}$$

ist sofern die Vorrzahlen endlich bleiben, stets echt, wenn x^2 grösser als Eins ist.

Beweis: Setze $x = \frac{1}{z}$, so wird die Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

und ist $z = \frac{1}{x}$ kleiner als eins nach Zahlenlehre 206, also die Reihe echt nach 24.

Satz. Jede echte fallende Höhenreihe lässt sich in eine echte steigende Höhenreihe und jede echte Höhenreihe mit gebrochener Stufe lässt sich in eine echte Höhenreihe mit ganzer Stufe umwandeln. Jede echte Höhenreihe lässt sich demnach auf die Form der steigenden Höhenreihe zurückführen. 26.

Beweis: Für die fallende Höhenreihe folgt der Satz unmittelbar aus dem Beweise zu 25. Für die Höhenreihe mit gebrochener Stufe

z. B.
$$a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + \dots$$

setze $z = x^{\frac{1}{n}}$, so folgt der Satz unmittelbar. Kommen mehrere verschiedene Nenner vor, so bringe man diese auf den kleinsten Gemeinnenner etwa u und setze $z = x^{\frac{1}{u}}$.

Satz. Wenn eine steigende Höhenreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ gleich Null ist, für jeden Wert des x von 0 bis zu c hin, so sind die sämtlichen Vorrzahlen Null. 27.

Beweis: Wenn der Satz gilt für die ersten n Vorrzahlen, so soll bewiesen werden, dass er auch für die $n + 1$ te Vorrzahl gilt. Sei also $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots a_n = 0$ (Annahme) so sind die ersten Glieder $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots$ bis $a_n x^n$ sämtlich gleich Null nach Zahlenlehre 174 und wird die Reihe

$$a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots = 0.$$

Da diese Reihe für $x = c$ gelten soll, so kann man dieselbe durch $x^{n+1} = c^{n+1}$ teilen und erhält dann

$$a_{n+1} + a_{n+2} x + a_{n+3} x^2 + \dots = 0.$$

Da diese Reihe aber auch für $x = 0$ gelten soll, so werden alle die Glieder, welche x enthalten, nach Zahlenlehre 174 für $x = 0$ gleich Null und die Reihe wird $a_{n+1} = 0$.

Der Satz gilt mithin wenn er für die n ersten Vorzahlen gilt, auch für die $n + 1$ ersten Vorzahlen. Nun gilt er für a_0 , denn es ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = 0$$

und da diese Reihe für $x = 0$ gelten soll, so sind nach Zahlenlehre 174 alle Glieder, welche x enthalten, für $x = 0$ auch Null, also ist auch $a_0 = 0$, mithin gilt der Satz ganz allgemein.

28. **Satz.** Wenn zwei steigende Höhenreihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad \text{und}$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

für jeden Wert des x von Null bis c hin gleich sind, so sind die entsprechenden Vorzahlen gleich.

Beweis: Es ist

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

nach der Annahme

$$\text{mithin ist } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \dots = 0$$

$$\text{d. h. } a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots = 0$$

mithin ist nach 26

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0 \dots \text{d. h.}$$

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \dots$$

Die allgemeinen Sätze über die steigende echte Höhenreihe sind hienach entwickelt. Wir gehen nun dazu über die Reinformen (reellen Funktionen) von x und die Richtfolgen (komplexen Funktionen) von x mit den echten steigenden Höhenreihen von x zu vergleichen und nachzuweisen, wie weit man dieselben auf die Form einer echten steigenden Höhenreihe zurückführen kann.

Die Aufgabe ist für die Folgelehre oder Funktionenlehre ganz die entsprechende als die Zurückführung einer beliebigen Zahlformel auf einen unendlichen Zehntbruch (Dezimalbruch) in der Zahlenlehre. Wie dort in der Zahlenlehre ist auch hier das Ergebniss der Arbeit die Berechnung des Zahlwertes der Folge von x für einen bestimmten Zahlwert von x in einem Zehntbruche oder Dezimalbruche. Die Folgelehre führt uns dadurch zu der Berechnung von x^n , wo n eine beliebige Zahl, zur Berechnung von $\ln x$, wo n eine beliebige Pluszahl, zur Berechnung der Winkelfolgen und Bogenfolgen ($\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$) u. s. w. und zeigt sich auch hiedurch als der höhere Zweig der Rechenlehre oder Analysis.

29. **Satz.** Jede stetige Reinforme (stetige reelle Funktion) von x (d. h. jede Reinforme von x , welche in den Grenzen des x von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die GröÙe x wächst) kann, sofern $x^2 < 1$ ist, einer steigenden Höhenreihe von x gleichgesetzt werden und diese ist, sofern in ihr nicht eine der Vorzahlen unendlich wird, eine echte Reihe oder

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum a_n x^n, \quad \text{wo } x = M[a, b]$$

auch $x^2 < 1$ und jedes a_n endlich ist.

Beweis: Da $x^2 < 1$ ist, so ist die steigende Höhenreihe nach 21 stets echt, wenn keine Vorzahl unendlich ist, sie ist demnach auch nach 19 einwertig und einer bestimmten Gröse gleich, wenn alle ihre Vorzahlen endlich bestimmt und auch x einen bestimmten Wert hat. Da aber diese Reihe unendlich viele Vorzahlen hat, so kann man die Vorzahlen so bestimmen, dass die Reihe für jeden bestimmten Wert von x auch dem entsprechenden Werte der einwertigen Formel von x gleich ist.

Da die Reinform (die reelle Funktion) in den Grenzen des x von a bis b stetig ist, d. h. in diesen Grenzen stets wächst bez. stets abnimmt, wenn die Gröse x wächst, so durchläuft sie nach 15, wenn x nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von a bis b durchläuft, gleichfalls nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $f_0 a$ bis $f_0 b$. Ebenso durchläuft dann auch die echte stetige Höhenreihe von x nach der Reihe alle Werte der wachsenden Zahlreihe von $Sa_a a^a$ bis $Sa_a b^a$.

Es wird zweckmässig sein die Fälle zu untersuchen, in denen man nicht die $f_0 x$ einer steigenden Zahlreihe von x gleichsetzen kann, weil einzelne Vorzahlen unendlich werden.

Setzen wir zunächst $\frac{1}{x^n}$ oder x^{-n} einer echten steigenden Höhenreihe von x gleich. Setzen wir zunächst also $\frac{1}{x^n} = Sa_a x^a$, so ergibt sich, wenn wir $x=0$ setzen $\frac{1}{0^n} = a_0$ d. h. die Vorzahl a_0 wird unendlich, die Höhenreihe ist also nicht echt.

Setzen wir demnächst

$$x^{\frac{1}{n}} = Sa_a x^a, \text{ so folgt } x = (Sa_a x^a)^n = a_0^n + n a_0^{n-1} a_1 x + \dots$$

Hier muss, wenn die Reihe echt sein soll, nach 27

$$a_0^n = 0 \text{ d. h. } a_0 = 0 \text{ sein und } 1 = n a_0^{n-1} a_1, \text{ d. h. } a_1 = \frac{1}{n a_0^{n-1}} = \frac{1}{0}$$

sein, d. h. hier wird a_1 unendlich, also die Höhenreihe gleichfalls nicht echt.

Setzen wir ferner

$$1e x = Sa_a x^a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

so wird, wenn wir $x=0$ setzen $1e 0 = a_0$.

Es ist also $1e 0 = -\infty = \pm \frac{1}{0}$; also auch $a_0 = -\frac{1}{0}$, die Höhenreihe also wiederum nicht echt.

Setzen wir $0x = Sa_a x^a$, so erhalten wir, wenn wir $x=0$ und zugleich $c=0$ setzen $0a = a_0$ und da $0^n = 0^{n-n} = \frac{0}{0}$ ist, so wird die Vorzahl a_0 unendlich, die Höhenreihe ist also nicht echt.

In allen diesen Fällen kommt man aber zu echten Höhenreihen wenn man statt x , die Gröse $1 \pm x$, bezüglich im letzten Falle $1 \pm c$ einführt; so geben $\frac{1}{(1 \pm x)^n}$

$\frac{1}{(1+x)^n}$, $\log(1+x)$ wo $x^2 < 1$, $\log(1+c)^x$, wo $c^2 < 1$ ist, echte Reihen.
 So darf man ferner nicht setzen $\cot x = S_a x^a$, denn für $x=0$ wird $\cot 0 = a$,
 unendlich, ebenso ist es mit $\operatorname{cosec} x$; dagegen kann man in diesem Falle \cot
 $(90^\circ + x) = S_a x^a$ und ebenso $\operatorname{cosec}(90^\circ + x) = S_a x^a$ setzen.

30. **Satz.** Jede stetige Richtfolge (stetige komplexe Funktion) in den Grenzen des x von a bis b (d. h. jede Richtfolge $\varphi_0 x + i\psi_0 x$ von x , in welcher die beiden Reinformen $\varphi_0 x$ und $\psi_0 x$ in den Grenzen des x von a bis b stets wachsen, bez. stets abnehmen, wenn die GröÙe x wächst) kann, sofern $x^2 < 1$ ist, einer RichtgröÙe $a + ib$ gleichgesetzt werden, in welcher jede der beiden Zahlen a und b eine echte steigende Höhenreihe von x darstellt oder
 $\varphi_0 x + i\psi_0 x = S_a x^a + iS_b x^b$ * wo $x = M[a, b]$, auch $x^2 < 1$.
 Beweis: Unmittelbar aus 17 und 29.

4. Die Höhen einer Summe bei beliebiger Zahl in der Stufe.

Um die Sätze für die Höhen von Summen ableiten zu können, ist es notwendig, zunächst einige Hilfsätze über die Geschiedszahlen abzuleiten. In der Zahlenlehre 482 bis 486 haben wir bereits die Geschiedszahlen n^m behandelt, wo die Base n und die Stufe m ganze Zahlen sind; hier wollen wir sie auch für die Fälle behandeln, wo die Base n eine beliebige Zahl ist.

- Bemerkt wird, dass n im Folgenden immer eine ganze Pluszahl bezeichnen soll.
 31. **Erklärung.** Die Geschiedszahl a^n (gelesen a Punkt n oder Geschiedszahl von a zur n ten Stufe), wo n eine ganze Pluszahl sein soll, heist ein Bruch, dessen Zähler ein Zeug oder Produkt von n Zahlen ist, deren erste gleich a , und jede folgende um 1 kleiner ist als die nächstvorhergehende und dessen Nenner ein Zeug oder Produkt ist von den n ersten ganzen Zahlen 1 bis n .

$$a^n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

32. **Erklärung.** Die Tauschzahl (die facultas) von n heist das Zeug oder Produkt der n ersten ganzen Zahlen 1 bis n , wo n eine ganze Pluszahl ist. Zeichen $n!$ (gelesen n Tausche)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Beispiele:

$$5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10; \quad 8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56; \quad 9^7 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 36$$

$$\frac{1^3}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{16}; \quad \frac{1^4}{3} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{10}{243}$$

Tafel der Tauschzahlen von 1! bis 15!

1! = 1	2! = 2	3! = 6	4! = 24	5! = 120	6! = 720
7! = 5040	8! = 40320	9! = 362880			
10! = 3'628'800	11! = 39'916800	12! = 479'001600			
13! = 6227'020800	14! = 87'178'291200	15! = 1'307674'368000.			

Tafel der Brüche $\frac{1}{n!}$

$\frac{1}{2!} = 0,50000'00000$	$\frac{1}{6!} = 0,00138'88889$	$\frac{1}{10!} = 0,00000'02756$
$\frac{1}{3!} = 0,16666'66667$	$\frac{1}{7!} = 0,00019'84127$	$\frac{1}{11!} = 0,00000'00251$
$\frac{1}{4!} = 0,04166'66667$	$\frac{1}{8!} = 0,00002'48016$	$\frac{1}{12!} = 0,00000,00021$
$\frac{1}{5!} = 0,00833'33333$	$\frac{1}{9!} = 0,00000'27557$	$\frac{1}{13!} = 0,00000'00002$

Erklärung. Die Geschiedszahl a^n wird, wenn n Null ist, 33. gleich 1, wenn n eine Strichzahl ist, gleich 0 gesetzt. Die Tauschzahl wird wenn n Null ist gleich 1 gesetzt.

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = 0 \quad 0! = 1.$$

Satz. $a^1 = a$ $a^n = \frac{a!}{n!(n-a)!}$ * wo a ganze Pluszahl 34.

Die Geschiedszahl jeder Zahl zur ersten Stufe ist der Zahl gleich. Die Geschiedszahl jeder ganzen Pluszahl a zur n ten Stufe ist, sofern $a \geq n$ ist, gleich a Tausche geteilt durch das Zeug oder Produkt von n Tauschen und $(a - n)$ Tauschen.

Beweis: Nach 31 ist $a^1 = \frac{a}{1} = a$ und ebenso

$$a^n = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)(a-n) \cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (a-n)}.$$

Satz. Die Geschiedszahl (a^n) ist nur in den Fällen gleich 35. Null, wenn entweder die Stufe n eine Strichzahl (negativ) ist, oder wenn die Base (a) eine ganze Pluszahl und zugleich die Stufe (n) grösser als die Base ist.

Beweis: Die Stufe (n) kann nur entweder eine Strichzahl, oder Null oder eine Pluszahl sein. Im ersten Falle ist $a^n = 0$ nach 33. Im zweiten Falle ist $a^n = a^0 = 1$ nach 30, also nicht gleich Null. Im dritten Falle ist a^n nach 29 ein Bruch

$$a^n = \frac{a(a-1)(a-2) \cdots (a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

Dieser Bruch ist nach Zahlenlehre 175 nur gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist, der Zähler aber ist ein Zeug oder Produkt und dieses ist nach demselben Satze nur dann gleich Null, wenn eines der Fache oder Faktoren Null ist, d. h. wenn entweder $a = 0$, oder $a - 1 = 0$ u. f. w., d. h. wenn entweder $a = 0$ oder $a = 1$, oder $a = 2$ u. f. w. oder endlich $a = n - 1$, d. h. wenn a eine ganze Pluszahl und zugleich n grösser als a ist.

Es ist zweckmässig nach diesen Sätzen einige Uebungen mit Aufstellung von Geschiedszahlen vorzunehmen, zunächst für ganze Basen. Ich lasse daher eine kleine Tafel von Geschiedszahlen folgen, die jeder leicht berechnen kann.

Tafel der Geschiedszahlen für ganze Baten.

Date	Stufe n.										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	1	15	105	455	1365	3008	5005	6435	5005	3008	1365
14	1	14	91	364	910	1638	2184	2184	1638	910	364
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
11	1	11	55	165	390	462	462	330	165	55	11
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
-2	1	-2	+3	-4	+5	-6	+7	-8	+9	-10	+11
-3	1	-3	+6	-10	+15	-21	+28	-36	+45	-55	+66
-4	1	-4	+10	-20	+35	-56	+84	-120	+165	-220	+286
-5	1	-5	+15	-35	+70	-126	+210	-330	+495	-715	+1001
-6	1	-6	+21	-56	+126	-252	+462	-792	+1287	-2002	+3003
-7	1	-7	+28	-84	+210	-462	+924	-1716	+3003	-5005	+8008
-8	1	-8	+36	-120	+380	-792	+1716	-3132	+6435	-11440	+19448
-9	1	-9	+45	-165	+495	-1287	+3003	-6435	+12770	-24310	+43758
-10	1	-10	+55	-220	+715	-2002	+5005	-11440	+24310	-48620	+92378

Satz. Es ist $(-a)^n = (-1)^n (a + n - 1)^n$ 36.

$$= (-1)^n \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}{1. 2. 3 \cdots n}$$

Beweis: Es ist $(-a)^n$

$$= \frac{-a(-a-1)(-a-2) \cdots (-a-n+1)}{1. 2. 3 \cdots n} \quad (\text{nach 31})$$

$$= (-1)^n \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}{1. 2. 3 \cdots n}$$

$$= (-1)^n (a+n-1)^n. \quad (\text{nach 31})$$

Satz. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^{n-1} \frac{(a-1)(2a-1) \cdots ((n-1)a-1)}{2. 3. \cdots n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n$ 37.

Beweis: Es ist $\left(\frac{1}{a}\right)^n$

$$= \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{a} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{a} - (n-1)\right)}{1. 2. 3. \cdots n} \quad (\text{nach 31})$$

$$= \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1-a}{a}\right) \left(\frac{1-2a}{a}\right) \cdots \left(\frac{1-(n-1)a}{a}\right)}{1. 2. 3. \cdots n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(a-1)(2a-1) \cdots ((n-1)a-1)}{2. 3. \cdots n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Satz. 38.

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^n \frac{(a+1)(2a+1) \cdots ((n-1)a+1)}{2. 3. \cdots n} \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Beweis: Es ist $\left(-\frac{1}{a}\right)^n$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{a}\right) \left(-\frac{1}{a} - 1\right) \left(-\frac{1}{a} - 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{a} - (n-1)\right)}{1. 2. 3. \cdots n} \quad (\text{nach 31})$$

$$= (-1)^n \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1+a}{a}\right) \left(\frac{1+2a}{a}\right) \cdots \left(\frac{1+(n-1)a}{a}\right)}{1. 2. 3. \cdots n}$$

$$= (-1)^n \frac{(a+1)(2a+1) \cdots ((n-1)a+1)}{2. 3. \cdots n} \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Es wird wieder sehr zweckmässig sein, einige Beispiele abzuleiten, ich habe demnach die folgende Tafel berechnet, und möchte raten, einige Uebungen in

diesen Berechnungen vorzunehmen, um mit den Geschiedszahlen vertraut zu werden.

Tafel der Geschiedszahlen für Brüche.

Bafe a	Stufe n.							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{55}{1296}$	$\frac{935}{31104}$	$\frac{4301}{186624}$	$\frac{124729}{6718464}$	$\frac{623645}{40310784}$
$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{6}{125}$	$\frac{21}{625}$	$\frac{399}{15625}$	$\frac{1596}{78125}$	$\frac{6612}{390625}$
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{77}{2048}$	$\frac{231}{8192}$	$\frac{1463}{65536}$	$\frac{4807}{262144}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{81}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{22}{729}$	$\frac{154}{6561}$	$\frac{374}{19683}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$	$\frac{21}{1024}$	$\frac{83}{262144}$
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{21}{128}$	$-\frac{63}{256}$	$-\frac{232}{1024}$	$-\frac{429}{262144}$
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$-\frac{35}{243}$	$-\frac{91}{729}$	$-\frac{728}{6561}$	$-\frac{1976}{19683}$
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$-\frac{195}{2048}$	$-\frac{663}{8192}$	$-\frac{4641}{65536}$	$-\frac{17732}{262144}$
$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{25}$	$-\frac{11}{125}$	$-\frac{44}{625}$	$-\frac{924}{15625}$	$-\frac{3003}{78125}$	$-\frac{1612}{390625}$
$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{72}$	$-\frac{91}{1296}$	$-\frac{1729}{31104}$	$-\frac{8645}{186624}$	$-\frac{267995}{6718464}$	$-\frac{1416545}{40310784}$

39. Satz. $(a+1)^n = a^n + a^{n-1}$

Jede Geschiedszahl ist gleich der Summe zweier Geschiedszahlen, deren Basen um eins kleiner sind als die Base der gegebenen Geschiedszahl und von deren Stufe die eine ebenso gros, die andere um eins kleiner ist als die Stufe der gegebenen Geschiedszahl.

Beweis: Es ist nach 29, wenn n eine ganze Pluszahl grösser als 1 ist, $a^n + a^{n-1} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a(a-1) \cdots (a-n+2)(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} + \frac{a(a-1) \cdots (a-n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \\
 &= \frac{a(a-1) \cdots (a-n+2)(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} + \frac{a(a-1) \cdots (a-n+2) n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} \\
 &= \frac{a(a-1) \cdots (a-n+2)(a-n+1+n)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} \\
 &= \frac{(a+1) \cdot a(a-1) \cdots (a-n+2)}{1 \cdot 2 \cdots n} = (a+1)^n.
 \end{aligned}$$

Wenn $n=1$, so ist $a^n + a^{n-1} = a^1 + a^0 = a + 1 = (a+1)^1$.

Wenn $n=0$, so ist $a^n + a^{n-1} = a^0 + a^{-1} = 1 + 0 = (a+1)^0$.

Wenn n eine Strichzahl $= -m$, so ist $a^n + a^{n-1}$

$$= a^{-m} + a^{-m-1} = 0 = (a+1)^{-m}.$$

40. Satz. $(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots = \sum a^{n-a}b^a$.

Jede Geschiedszahl, deren Base die Summe zweier Stücke ist, ist gleich der Summe aller möglichen Zeuge oder Produkte von je zwei Geschiedszahlen, deren Basen gleich den Stücken jener Summe, und deren Stufen ganze Zahlen sind, die zur Summe die Stufe der gegebenen Geschiedszahl haben.

Beweis: Der Satz gilt, wenn n eine Strichzahl, da dann beide Seiten nach 33 gleich Null werden; er gilt für $n = 0$, da dann beide Seiten nach 33 gleich Eins werden; er gilt für $n = 1$, da dann

$$(a + b)^1 = a + b = a^1 + a^{1-1} b \quad (\text{nach 33 und 34})$$

$$= a^1 + a^{1-1} b + a^{1-2} b^2 + \dots \quad (\text{nach 33})$$

Der Satz gilt aber auch für $n > 1$; denn angenommen, er gelte für einen Wert n , so lässt sich beweisen, dass er auch für $n + 1$ gilt. Es ist dann

$$(a + b)^{n+1} = \frac{(a + b)(a + b - 1) \dots (a + b - n)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n + 1} \quad (\text{nach 31})$$

$$= \frac{a + b}{n + 1} (a + b - 1)^n \quad (\text{nach 31})$$

$$= \frac{a(a + b - 1)^n + b(a + b - 1)^n}{n + 1} \quad (*)$$

Es ist aber für $(a + b - 1)^n$ oder für $((a - 1) + b)^n$ die Formel der Annahme gültig, also ist, wenn man beachtet, dass $a^{-n} = 0$ ist, und also $a^{n-n} b^n = b^n$ das letzte Glied ist,

$$a(a + b - 1)^n$$

$$= a[(a - 1)^n + (a - 1)^{n-1} b + (a - 1)^{n-2} b^2 + \dots + b^n]$$

$$= a(a - 1)^n + a \cdot (a - 1)^{n-1} b + a(a - 1)^{n-2} b^2 + \dots + ab^n$$

$$= (n + 1)a^{n+1} + n \cdot a^n b + (n - 1)a^{n-1} b^2 + \dots + ab^n \quad (\text{nach 31}).$$

Das Zeug $b(a + b - 1)^n$ erhält man, wenn man hier a und b mit einander vertauscht also ist

$$b(a + b - 1)^n = (n + 1)b^{n+1} + n b^n a + (n - 1)b^{n-1} a^2 + \dots + ba^n.$$

Mithin wenn man beide gleich ordnet, so ist

$$a(a + b - 1)^n = (n + 1)a^{n+1} + n \cdot a^n b + (n - 1)a^{n-1} b^2 + \dots + ab^n$$

$$b(a + b - 1)^n = a^n b + 2a^{n-1} b^2 + \dots + nab^n + (n + 1)b^{n+1}$$

Fügt man diese Ausdrücke zu, so erhält man in jedem Gliede die Summe $n + 1$ und hat man also

$$a(a + b - 1)^n + b(a + b - 1)^n = (n + 1)[a^{n+1} + a^n b + a^{n-1} b^2 + \dots + b^{n+1}], \text{ also}$$

$$(a + b)^{n+1} = \frac{a(a + b - 1)^n + b(a + b - 1)^n}{n + 1} \quad (\text{nach } *)$$

$$= a^{n+1} + a^n b + a^{n-1} b^2 + \dots + b^{n+1}$$

d. h. der Satz gilt allgemein.

Nach diesen Hilfsätzen für die Geschiedszahlen wenden wir uns nun wieder zu den Höhen einer Summe, wo die Zahl in der Stufe eine beliebige Zahl sein kann.

41. **Erklärung. Die Reihe**

$$1 + ax + a^2x^2 + \dots = Sa^ax^a$$

heist eine Zweigliederreihe oder eine Binomialreihe, x ihre Base, a ihr Zeiger oder Index.

42. **Satz. Die Zweigliederreihe**

$$1 + nx + n^2x^2 + \dots$$

enthält, sofern die Base x ungleich Null, und der Zeiger n eine ganze Pluszahl oder Null ist, $n + 1$ von Null verschiedene Glieder, deren letztes x^n ist.

Beweis: Wenn n eine ganze Pluszahl oder Null ist, so ist nach 35 $n^m = 0$, sowie m grösser als n ist, mithin ist das letzte Glied $n^m x^n = x^n$ und ist die Anzahl der von Null verschiedenen Glieder $n + 1$.

43. **Satz. Die Zweigliederreihe**

$$1 + ax + a^2x^2 + \dots = Sa^ax^a$$

bildet, sofern die Base x ungleich Null ist und der Zeiger a eine Strichgröße oder ein Bruch ist, eine unendliche Reihe, und zwar eine echte, wenn der Pluswert der Base x kleiner als 1 ist.

Beweis: Nach 35 ist a^m von Null verschieden, wenn a nicht eine ganze Pluszahl und zugleich m eine Plusgröße ist, also sind, wenn a eine Strichzahl oder ein Bruch ist, alle Glieder $a^m x^m$ ungleich Null bis ins Unendliche hin.

Diese Reihe ist aber ferner nach 22 echt, wenn von irgend einem Gliede an der Pluswert des Fortschreitungs-faches gleich oder kleiner als ein echter Bruch p ist. Nun ist der Pluswert des Fortschreitungs-faches hier beim r ten Gliede, wo r bedeutend grösser als a genommen wird, wenn y den Pluswert von x bezeichnet und Pf_0x den Pluswert von f_0x bezeichnet

$$P\left(\frac{a^{r+1}x^{r+1}}{a^rx^r}\right) = P\left(\frac{a-r}{r+1}x\right) = \frac{r-a}{r+1}y$$

da r grösser als a gesetzt ist. Hier ist $\frac{r-a}{r+1} < 1$ wenn a eine Plus-

größe, also da auch $y < 1$, so ist $\frac{r-a}{r+1}y < 1$ u. die Reihe also echt.

Wenn a eine Strichgröße, so wird der Pluswert des Fortschreitungs-faches beim r ten Gliede $\frac{r+a}{r+1}y$. Hier kann man r leicht so wählen,

dass dieser Wert $\frac{r+a}{r+1} y < p$ wird, sofern man y kleiner als p setzt, was nach der Bedingung des Satzes stets möglich ist. Um dies zu zeigen, löse man die Vergleichung nach r auf, so wird

$$(r+a)y < p(r+1) \text{ oder } ay + ry < rp + p, \text{ also } ay - p < rp - ry$$

$$\text{d. h. } \frac{ay-p}{p-y} < r.$$

Da $p > y$, so ist der Nenner stets ungleich Null, und die Vergleichung also möglich. Dann ist also

$$\frac{r+a}{r+1} y < p$$

und die Reihe mithin echt.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier oder mehrer Binomialreihen von gleicher Base, (bei denen entweder der Zeiger 0 oder eine ganze Pluszahl ist, oder der Pluswert der Base kleiner als eins ist) ist wieder eine Binomialreihe derselben Base, und zwar ist der Zeiger der Zeugreihe die Summe aus den Zeigern der einzelnen Fachreihen, oder

$$(1 + ax + a^2 x^2 + \dots)(1 + bx + b^2 x^2 + \dots) \dots \\ = 1 + (a + b + \dots)x + (a + b + \dots)^2 x^2 + \dots$$

Beweis: 1. Für das Zeug zweier Reihen: Es ist

$$\begin{aligned} (1 + ax + a^2 x^2 + \dots) &= \begin{cases} 1 + ax + a^2 x^2 + \dots + a^r & x^r + \dots \\ + bx + abx^2 + \dots + a^{r-1}b & x^r + \dots \\ + b^2 x^2 + \dots + a^{r-2}b^2 & x^r + \dots \\ \vdots & \\ + b^r & x^r + \dots \end{cases} \\ \times (1 + bx + b^2 x^2 + \dots) & \\ = 1 + (a+b)x + (a+b)^2 x^2 + \dots + (a+b)^r x^r + \dots & \end{aligned}$$

(nach 40).

2. Für das Zeug mehrer Reihen: Es seien $A, B, C \dots$ Binomialreihen mit den Zeigern $a, b, c \dots$, so ist AB nach 44 Beweis 1 eine Binomialreihe mit dem Zeiger $a + b$, ferner nach demselben Beweise ABC eine Binomialreihe mit dem Zeiger $a + b + c$ u. f. w.

Satz. Die n te Höhe einer Binomialreihe $A = 1 + ax + a^2 x^2 + \dots$ (bei der entweder der Zeiger a gleich 0 oder eine ganze Pluszahl oder der Pluswert der Base kleiner als eins ist) ist, wenn n eine ganze Pluszahl ist, eine Binomialreihe mit dem Zeiger na oder $(8a^2 x^2)^n = 8(na)^a x^a$.

Beweis: Die n te Höhe ist hier ein Zeug oder Produkt von n Binomialreihen, deren jede den Zeiger a hat, der Zeiger dieser Zeugreihe ist nach 44 die Summe aus den Zeigern der einzelnen Fachreihen also na .

46. **Satz.** Für jede beliebige Zahlstufe (reelle Stufe) n ist

$$(1+x)^n = 1 + nx + n^2 x^2 + \dots = S n^{\cdot} x^{\cdot}$$

doch muss, sofern n nicht eine ganze Pluszahl oder 0 ist, der Pluswert der Base x kleiner als eins sein.

Beweis: 1. Wenn n gleich Null oder eine ganze Pluszahl ist, so ist

$(1+x)^n = (1 + 1 \cdot x + 1^2 x^2 + \dots)^n$, da $1^2, 1^3 \dots$ alle Null also hat die Reihe die Form der Reihe im Satz 45. Es ist demnach

$$(1+x)^n = 1 + nx + n^2 x^2 + \dots$$

2. Wenn n eine ganze Strichzahl, $n = -p$ ist, dann ist $n + p = 0$, also

$$(1+nx+n^2x^2+\dots)(1+px+p^2x^2+\dots) = 1+0^{\cdot}x+0^{\cdot}x^2+\dots = 1$$

(nach 45 und 35).

Mithin ist

$$1 + nx + n^2 x^2 + \dots = \frac{1}{1 + px + p^2 x^2 + \dots} = \frac{1}{(1+x)^p}$$

(nach 46,1)

$$= (1+x)^{-p} = 1 + x^n, \text{ da } n = -p \text{ ist.}$$

3. Wenn n ein Bruch $= \frac{p}{q}$ ist, wo q eine ganze Pluszahl, p eine beliebige ganze Zahl ist, so ist die q te Höhe der Binomialreihe

$$\left(1 + \frac{p}{q}x + \left(\frac{p}{q}\right)^2 x^2 + \dots\right)^q = 1 + px + p^2 x^2 + \dots$$

(nach 45)

$$= (1+x)^p \text{ (nach 46, 1 u. 2)}$$

mithin die 1te Höhe der Binomialreihe

$$1 + \frac{p}{q}x + \left(\frac{p}{q}\right)^2 x^2 + \dots = (1+x)^{\frac{p}{q}} \quad \text{(nach Zahlenl. 344)}$$

d. h. es ist $1 + nx + n^2 x^2 + \dots = (1+x)^n$ auch wenn n ein Bruch ist.

4. Wenn n eine Unzahl eine Irrationalzahl ist. Nach Zahlenlehre 383 gelten für die Unzahlen oder Irrationalzahlen alle Vergleichungssätze in demselben Umfange wie für die Endzahlen, also auch der vorliegende Satz.

47. **Satz.** $(1-x)^n = 1 - nx + n^2 x^2 - n^3 x^3 + \dots = S(-1)^{\cdot} n^{\cdot} x^{\cdot}$ wo entweder n eine ganze Pluszahl oder $x^2 < 1$ ist.

48. **Satz.** $\frac{1}{1 \mp x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots = S(\mp 1)^{\cdot} x^{\cdot}$

wo $x^2 < 1$ ist.

Zweigliederfatz oder Binomischer Lehrfatz.

49

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n^2 a^{n-2} b^2 + \dots = S n^a a^{n-a} b^a$$

wo entweder n eine ganze Pluszahl oder $b^2 < a^2$ ist.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (a+b)^n &= \left[a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a} \right)^n \\ &= a^n \left[1 + n \frac{b}{a} + n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \dots \right] \\ &\quad \text{(nach 46)} \\ &= a^n + n a^{n-1} b + n^2 a^{n-2} b^2 + \dots = S n^a a^{n-a} b^a. \end{aligned}$$

Vielgliederfatz oder Polynomischer Lehrfatz.

50.

$$(a+b+c+\dots)^n = S n \frac{(n-1) \dots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \dots b \cdot 1 \cdot 2 \dots c \dots} a^{n-a} b^b c^c$$

wo $a = b + c + \dots$ gefetzt ist, und entweder n eine ganze Pluszahl oder die Pluswerte von $a, b, c \dots$ eine abnehmende Reihe bilden.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: 1. Es ist } (a+b+c)^n &= [(a+b)+c]^n \\ &= S n^c (a+b)^{n-c} c^c \quad \text{(nach 49)} \\ &= S n^c (n-c)^b a^{n-c-b} b^b c^c \quad \text{(nach 49)} \\ &= S \frac{n(n-1) \dots (n-c+1)}{1 \cdot 2 \dots c} \frac{(n-c) \dots (n-c-b+1)}{1 \cdot 2 \dots b} a^{n-c-b} b^b c^c \\ &\quad \text{(nach 31)} \end{aligned}$$

$$= S \frac{n(n-1) \dots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \dots b \cdot 1 \cdot 2 \dots c} a^{n-a} b^b c^c \quad \text{wo } a = b + c \text{ gefetzt.}$$

$$\begin{aligned} 2. (a+b+c+d)^n &= [(a+b+c)+d]^n \\ &= S n^d (a+b+c)^{n-d} d^d \quad \text{(nach 49)} \\ &= S \frac{n \cdot (n-b) \cdot (n-b-1) \dots (n-b-c-b+1)}{1 \cdot 2 \dots b \cdot 1 \cdot 2 \dots c} a^{n-b-c-b} b^b c^c d^d \\ &\quad \text{(nach 50,1)} \end{aligned}$$

$$= S \frac{n(n-1) \dots (n-b+1) (n-b) \dots (n-b-c-b+1)}{1 \cdot 2 \dots b \cdot 1 \cdot 2 \dots c \cdot 1 \cdot 2 \dots b} a^{n-b-c-b} b^b c^c d^b$$

(nach 31)

$$= S \frac{n(n-1) \dots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \dots b \cdot 1 \cdot 2 \dots c \cdot 1 \cdot 2 \dots b} a^{n-a} b^b c^c d^b \quad \text{wo } a = b + c + b$$

gefetzt.

3. Und in gleicher Weise fortschreitend für beliebig viele Stücke.

Für das Wurzelausziehen wird man den Formeln eine etwas andere Gestalt geben müssen, um sie bequem anwenden zu können. Bekanntlich ist

$$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}, \text{ sei also z. B. die 2te Wurzel von 50 zu suchen, so kann man}$$

$$50^{1/2} = 49^{1/2} \left(1 + \frac{1}{49} \right)^{1/2} = 7 \left(1 + \frac{1}{49} \right)^{1/2}$$

setzen, und die letzte Zahl entwickeln.

$$\begin{aligned}
 51. \quad \text{Satz. } (1+a)^n &= 1 - (-n)^1 c + (-n)^2 c^2 - (-n)^3 c^3 + \dots \\
 &= 1 + nc + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} c^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 + \dots \\
 &= 8 \frac{n(n+1) \dots (n+a-1)}{1 \cdot 2 \dots a} c^a
 \end{aligned}$$

wo $c = \frac{a}{1+a}$ und $c^2 < 1$ oder $a > -\frac{1}{2}$ ist.

Beweis: Wenn $c^2 < 1$ ist, so ist auch $a^2 < (a+1)^2$ oder $(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$ ist eine Plusgröße nach Zahlenlehre 201. Also ist auch $a + \frac{1}{2}$ eine Plusgröße, d. h. $a > -\frac{1}{2}$. Ferner ist

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1-c, \text{ wo } c = \frac{a}{1+a}, \text{ also ist}$$

$$\begin{aligned}
 (1+a)^n &= \left(\frac{1}{1+a} \right)^{-n} \\
 &= (1-c)^{-n} = 1 - (-n)^1 c + (-n)^2 c^2 - (-n)^3 c^3 + \dots
 \end{aligned}$$

(nach 46)

$$\begin{aligned}
 &= 1 + nc + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} c^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 + \dots
 \end{aligned}$$

(nach 36)

$$= 8 \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+a-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a} c^a.$$

$$\begin{aligned}
 52. \quad \text{Satz. } \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \\
 &= 1 + \frac{1}{n(a+1)} + \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^3 \\
 &+ \dots + = 8 \frac{(n+1)(2n+1) \dots ((a-1)n+1)}{2 \cdot 3 \dots a} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^a.
 \end{aligned}$$

Beweis: Man setze in Formel 51 $\frac{1}{a}$ für a und $\frac{1}{n}$ für n , so wird $c = \frac{1}{a+1}$ und erhält man die Formel

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{n}} &= 1 - \left(-\frac{1}{n} \right)^1 \frac{1}{a+1} + \left(-\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{a+1} \right)^2 \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{n} \right)^3 \left(\frac{1}{a+1} \right)^3 + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{n(a+1)} + \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^3 + \dots \text{ (nach 38).}
 \end{aligned}$$

Beispiele: Es bietet diese Formel die größten Vorteile, wo man auf die Formel $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ zurückgehen kann. Sei z. B. die 2te Wurzel von 2 zu suchen, so hat man $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ also $2^{1/2} = \frac{1}{5} \cdot (50)^{1/2}$ und

$$50^{1/2} = 49^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2} = 7 \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2} \text{ mithin}$$

$$2^{1/2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2} = \frac{7}{5} \left[1 + \frac{1}{100} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{100}\right)^4 + \dots\right]$$

Satz.

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{na} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{na}\right)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{na}\right)^3 - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{1} \frac{(n-1)(2n-1) \dots ((n-1)n-1)}{2 \cdot 3 \dots a} \left(\frac{1}{na}\right)^a.$$

53.

Beweis: Man setze in Formel 44 $\frac{1}{a}$ statt x und $\frac{1}{n}$ statt n , so erhält man die Formel

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{na} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{na}\right)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{na}\right)^3 - \dots$$

(nach 37).

Beispiele: Diese Formel ist für alle die Fälle anwendbar, wo man auf $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ zurückgehen kann. Sei z. B. die 2te Wurzel von 3 zu suchen, so hat man $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ also $3^{1/2} = \frac{1}{4} (48)^{1/2}$ und $48^{1/2} = 7 \left(1 - \frac{1}{49}\right)^{1/2}$ mithin

$$3^{1/2} = \frac{7}{4} \left(1 - \frac{1}{49}\right)^{1/2} = \frac{7}{4} \left[1 - \frac{1}{98} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{98}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{98}\right)^3 - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{98}\right)^4 - \dots\right]$$

Will man die 2te Wurzel von 5 suchen, so kann man von

$$16 \cdot 5 = 80 = 81 \left(1 - \frac{1}{81}\right) \text{ ausgehen, dann ist } 5^{1/2} = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{81}\right)^{1/2}.$$

Will man die 2te Wurzel von 7 suchen, so kann man von

$$9 \cdot 7 = 63 = 64 \left(1 - \frac{1}{64}\right) \text{ ausgehen, dann ist } 7^{1/2} = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{64}\right)^{1/2}.$$

$$\text{Für 11 hat man } 11^{1/2} = \frac{10}{3} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{1/2}.$$

Das Wurzelausziehen geht hienach sehr schnell von statten und übt ungemein im Auffinden eleganter Methoden. Wenn es für die Wurzeln nur auf die ersten 7 Stellen ankommt, gewähren die Loge oder Logarithmen, zu denen wir hiermit übergehen, eine viel leichtere und schnellere Methode, da bekanntlich

$$\log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a \text{ ist.}$$

In der Schule wird gewöhnlich die zweite Wurzel nach der Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ berechnet. Es ist diese Methode im Ganzen sehr weitläufig und zeitraubend und wird daher am besten vermieden.

Die zweite und dritte Tiefe der Zahlen von 1—100.

Z	Quadratwurzel	Kubikwurzel	Z	Quadratwurzel	Kubikwurzel
1	1.000000 000000	1.000 0000	51	7.141428 428543	3.708 4298
2	1.414213 562378	1.259 9210	52	7.211102 550928	3.732 5111
3	1.732050 807569	1.442 2496	53	7.280109 889281	3.756 2858
4	2.000000 000000	1.587 4011	54	7.348469 228350	3.779 7681
5	2.236067 977500	1.709 9759	55	7.416198 487096	3.802 9525
6	2.449489 742783	1.817 1206	56	7.483314 773548	3.825 8624
7	2.645751 311065	1.912 9312	57	7.549834 435271	3.848 5011
8	2.828427 124746	2.000 0000	58	7.615773 105864	3.870 8766
9	3.000000 000000	2.080 0838	59	7.681145 747869	3.892 9965
10	3.162277 660168	2.154 4347	60	7.745966 692415	3.914 8676
11	3.316624 790855	2.223 9801	61	7.810249 675907	3.936 4972
12	3.464101 615138	2.289 4286	62	7.874007 874012	3.957 8915
13	3.605551 275464	2.351 3347	63	7.937253 933194	3.979 0571
14	3.741657 386774	2.410 1422	64	8.000000 000000	4.000 0000
15	3.872983 846207	2.466 2121	65	8.062257 748299	4.020 7256
16	4.000000 000000	2.519 8421	66	8.124038 404636	4.041 2401
17	4.123105 625618	2.571 2816	67	8.185352 771872	4.061 5480
18	4.242640 687119	2.620 7414	68	8.246211 251235	4.081 6551
19	4.358898 943541	2.668 4016	69	8.306623 862918	4.101 5661
20	4.472135 955000	2.714 4177	70	8.366600 265341	4.121 2858
21	4.582575 694956	2.758 9243	71	8.426149 778176	4.140 8178
22	4.690415 759823	2.802 0393	72	8.485281 374239	4.160 1676
23	4.795831 523313	2.843 8670	73	8.544003 745318	4.179 3390
24	4.898979 485566	2.884 4991	74	8.602325 267048	4.198 3364
25	5.000000 000000	2.924 0177	75	8.660254 037844	4.217 1633
26	5.099019 513593	2.962 4960	76	8.717797 887081	4.235 8236
27	5.196152 422707	3.000 0000	77	8.774964 887392	4.254 3210
28	5.291502 622129	3.036 5889	78	8.831760 866328	4.272 6586
29	5.385164 807135	3.072 3168	79	8.888194 417316	4.290 8404
30	5.477225 575052	3.107 2325	80	8.944271 909999	4.308 8695
31	5.567764 362880	3.141 3806	81	9.000000 000000	4.326 7487
32	5.656854 249492	3.174 8021	82	9.055385 138137	4.344 4815
33	5.744562 646538	3.207 5343	83	9.110433 579144	4.362 0707
34	5.830951 894845	3.239 6118	84	9.165151 389912	4.379 5191
35	5.916079 783100	3.271 0663	85	9.219544 457293	4.396 3296
36	6.000000 000000	3.301 9272	86	9.273618 495496	4.414 0049
37	6.082762 530298	3.332 2218	87	9.327379 053089	4.431 0476
38	6.164414 002969	3.361 9754	88	9.380831 519647	4.447 9602
39	6.244997 998898	3.391 2114	89	9.433981 132057	4.464 7451
40	6.324555 320337	3.419 9519	90	9.486832 980505	4.481 4047
41	6.403124 237433	3.448 2172	91	9.539392 014169	4.497 9414
42	6.480740 698408	3.476 0266	92	9.591663 046625	4.514 3574
43	6.557438 524302	3.503 8981	93	9.643650 760993	4.530 6549
44	6.633249 580711	3.530 3483	94	9.695359 714833	4.546 8359
45	6.708203 932499	3.556 8933	95	9.746794 344809	4.562 9026
46	6.782329 983125	3.583 0479	96	9.797958 971133	4.578 8570
47	6.855654 600401	3.608 8261	97	9.848367 801796	4.594 7009
48	6.928203 230276	3.634 2411	98	9.899494 936212	4.610 4363
49	7.000000 000000	3.659 3057	99	9.949874 871066	4.626 0650
50	7.071067 811865	3.684 0314	100	10.000000 000000	4.641 5888

5. Die Reihen für Loge oder Logarithmen und die Berechnung der Logarithmentafel.

Für die Loge oder Logarithmen sind die Reihen in der Denklehre unmittelbar aus den Sätzen für die echten Reihen abgeleitet. Hier leite ich dieselben Sätze aus den Sätzen über die Höhen der Summe ab, welche wir so eben entwickelt haben.

Satz. Es ist

54.

$$(1+a)^x = 1 + x \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right) + x^2 P \text{ wo } c^2 < 1 \text{ und}$$

$$c = \frac{a}{1+a} \text{ und } P \text{ noch eine steigende Höhenreihe von } x \text{ ist.}$$

Beweis. Es ist nach 51 unter den bezeichneten Bedingungen $(1+a)^x$

$$\begin{aligned} &= 1 + xc + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} c^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 \\ &\quad + \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c^4 + \dots \\ &= 1 + xc + \frac{x+x^2}{1 \cdot 2} c^2 + x \frac{1 \cdot 2 + \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 \\ &\quad + x \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c^4 + \dots \end{aligned}$$

$$= 1 + xc + \frac{xc^2}{2} + \frac{xc^3}{3} + \frac{xc^4}{4} + \dots + x^2 P$$

wo $x^2 P$ die Summe sämtlicher Glieder bezeichnet, welche die zweite und höhere Höhen von x enthalten

$$= 1 + x \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} + \dots \right) + x^2 P.$$

Satz. Es ist, wenn $c^2 < 1$ ist,

55.

$$\log(1+a) = \log \frac{1}{1-c} = M \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^4}{4} + \dots \right), \text{ wo}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots \text{ ist, und der Log nach der Base 10 gelogt ist.}$$

Beweis: Nach Satz 54 ist, wenn $c^2 < 1$ und $c = \frac{a}{1+a}$

$$(1+a)^x = 1 + x \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right) + x^2 P.$$

Es ist aber auch, wenn man die Loge nach der Base 10 nimmt

$$(1+a)^x = 10^{x \log(1+a)}$$

(nach Zahlenlehre 373).

und dies ergibt, wenn man $a = 9$ setzt und statt x die Gröſe $x \log(1+a)$ einführt, wobei $c = \frac{a}{1+a} = \frac{9}{10}$ also $c^2 < 1$ ist,

$$(1+a)^x = (1+9)^{x \log(1+a)}$$

$$= 1 + x \log(1+a) \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots \right) + x^2 Q$$

wo $x^2 Q$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche die zweite und höhere Höhen von x enthalten.

$$= 1 + x \log(1+a) \cdot \frac{1}{M} + x^2 Q, \text{ da im Satze}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots$$

gesetzt ist. Wir haben hier also für $(1+a)^x$ zwei echte steigende Höhenreihen der Base x , welche für jeden Wert von x , der kleiner als eins ist, einander gleich sind, mithin müssen nach 28 auch die entsprechenden Vorzahlen von x einander gleich sein, d. h. es ist

$$c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots = \frac{1}{M} \cdot \log(1+a)$$

Folglich ist

$$\log(1+a) = M \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right)$$

Es ist aber $c = \frac{a}{1+a}$ mithin $1-c = 1 - \frac{a}{1+a} = \frac{1}{1+a}$ oder

$$1+a = \frac{1}{1-c} \text{ mithin ist}$$

$$\log \frac{1}{1-c} = M \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right)$$

56. Satz: Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist

$$\log(1-x) = -M \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = -MS \frac{x^a}{a}$$

$$\log(1+x) = M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) = MS (-1)^{a-1} \frac{x^a}{a}$$

Beweis: Nach 55 ist

$$\log \frac{1}{1-x} = M \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) = MS \frac{x^a}{a}. \text{ Danach ist}$$

$$\log(1-x) = -\log \frac{1}{1-x} = -M \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

Setzt man hier $-x$ statt des x , so erhält man

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= -M\left(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots\right) \\ &= M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right).\end{aligned}$$

Satz. Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2+x}$ gesetzt ist, oder wenn 57.

$x = \frac{2z}{1-z}$ ist, $\log(1+x) = \log \frac{1+z}{1-z} = 2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right)$,
wo der Log nach der Base 10 gelogt ist und M dieselbe Bedeutung wie in Satz 55 hat.

Beweis: Da $z^2 < 1$, so ist nach 55

$$\log \frac{1}{1-z} = M\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \dots\right).$$

Setzt man hier $-z$ statt z so erhält man

$$\log \frac{1}{1+z} = M\left(-z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} + \dots\right) \text{ und nach Zahlenl. 372}$$

$$\log(1+z) = -\log \frac{1}{1+z} = M\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots\right).$$

Mithin ist

$$\log(1+z) + \log \frac{1}{1-z} = \log \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right).$$

Setzen wir hier endlich $1+x = \frac{1+z}{1-z}$, so ergibt sich $z = \frac{x}{2+x}$.

Satz. Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2-x}$ gesetzt ist 58.

$$\log(1-x) = \log \frac{1-z}{1+z} = -2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right)$$

wo der Log nach der Base 10 gelogt ist und M dieselbe Bedeutung wie in Satz 55 hat.

Beweis: Man setze in Satz 53 $-x$ statt x , dann wird $z = \frac{-x}{2-x}$

und setzt man nun $-z$ statt z , so wird $z = \frac{x}{2-x}$ und die Reihe

$$\begin{aligned}\log(1-x) &= 2M\left(-z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - \dots\right) \\ &= -2M\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right).\end{aligned}$$

Satz. Die Loge (Logarithmen) der Base 10 heissen Zehnloge 59.

oder gemeine, briggische Loge (Logarithmen), die Gröſe M ist für dieselben

$$M = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ 60508\ 22943\ 97005\ 804\ 1 \\ \frac{1}{M} = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 56484\ 36420\ 76011\ 01488\ 629.$$

Beweis: Es ist für die Loge der Baſe 10 der $\log 10 = 1$, mithin nach 56

$$\begin{aligned} * \quad 1 &= \log 10 = \log (8 + 2) = \log 8 \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \log 8 + \log \left(1 + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3 \log 2 + 2 M \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 + \dots \right] \quad (\text{nach } 58), \\ \text{da, wenn wir } x &= \frac{1}{4} \text{ ſetzen, } z = \frac{1}{9} \text{ wird.} \end{aligned}$$

Es ist aber $2^{10} = 1024 = 1000 \left(1 + \frac{24}{1000}\right)$ mithin nach 58

$$\begin{aligned} 10 \cdot \log 2 &= 3 + \log \left(1 + \frac{24}{1000}\right), \text{ also } \log 2 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \log \left(1 + \frac{24}{1000}\right) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} M \left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{253}\right)^5 + \dots \right], \end{aligned}$$

da, wenn wir $x = \frac{24}{1000}$ ſetzen, $z = \frac{3}{253}$ wird.

Mithin, wenn wir in Formel * dieſen Wert für $\log 2$ einführen,

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10} M \left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{253}\right)^5 + \dots \right) \right] \\ &\quad + 2 M \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 + \dots \right) \\ \frac{1}{M} &= 6 \left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{253}\right)^5 + \dots \right] \\ &\quad + 20 \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{9}\right)^7 + \dots \right] \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus $\frac{1}{M}$, ſo ergibt ſich

$$\frac{1}{M} = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 56484\ 36420\ 76011\ 01488\ 629$$

und indem man 1 durch dieſe Zahl teilt oder dividirt, die obige Gröſe von M .

Die Zehnloge oder die gemeinen Loge (die logarithmi vulgares) ſind zuerſt von Henry Briggs 1556 bis 1630 aufgeſtellt und berechnet. Derſelbe hat ſie für die Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 ſämmtlich

bis auf 14 Stellen berechnet und in der Arithmetica logarithmica 1620 heraus gegeben.

Satz. Die Berechnung der gemeinen Loge (Logarithmen) für 60. die Primzahlen von 1 bis 100.

Es ist dringend wünschenswert, dass jeder Mathematiker wenigstens eine Gruppe von Logarithmen berechnet habe, damit ihm dieselben recht anschaulich und bekannt erscheinen und er mit denselben umzugehen versteht. Ich lasse die Anleitung dazu in den folgenden Nummern folgen.

Bekanntlich ist der $\log(ab) = \log a + \log b$, man kann also die Loge für alle zusammengesetzten Zahlen leicht, durch Zufügung der Loge ihrer Fache oder Faktoren finden, wenn man nur die Loge der Primzahlen kennt. Wir haben also nur die Loge der Primzahlen zu berechnen. Für die Berechnung der Loge der Primzahlen haben wir dann die Formeln

$$\log(1+x) = 2M \left(Z + \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} + \frac{Z^7}{7} + \dots \right) \text{ wo } Z = \frac{x}{2+x} \text{ und } Z^2 < 1$$

$$\log(1-x) = -2M \left(Z + \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} + \frac{Z^7}{7} + \dots \right) \text{ wo } Z = \frac{x}{2-x} \text{ und } Z^2 < 1.$$

Um schnell abnehmende Reihen zu erhalten, sucht man hier Vielfache der Primzahlen p auf, deren Nachbarzahlen Vielfache früherer Primzahlen sind, namentlich achtet man auf p^2 und p^4 und untersucht, ob $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ und $(p^4 - 1) = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ auf frühere Primzahlen zurückführen, wobei Satz Zahlenlehre 372 zur Beachtung kommt. Es ergeben sich hieraus folgende Berechnungsweisen:

3. $2^{10} = 1024 = 1000 + 24$; mithin

$$10. \log 2 = \log(1000 + 24) \text{ d. h. } \log 2 = \frac{1}{10} [3 + \log(1 + \frac{24}{1000})]$$

$$\text{also } Z = \frac{24}{1250}.$$

$$\log 2 = 0,3010300007.$$

8. $3^4 = 81 = 80 + 1$, mithin

$$\log 3 = \frac{1}{4} [1 + 3 \log 2 + \log(1 + \frac{1}{80})]; Z = \frac{1}{160} \log 3 = 0,4771212548.$$

5. $5 \cdot 2 = 10$, mithin $\log 5 = 1 - \log 2$.

$$\log 5 = 0,6989699992.$$

7. $7^4 - 1 = (7-1)(7+1)(7^2+1) = 6 \cdot 8 \cdot 50 = 2400$, mithin

$$\log 7 = \frac{1}{4} [\log 6 + \log 8 + \log 50 + \log(1 + \frac{1}{2400})]; Z = \frac{1}{1801}$$

$$\log 7 = 0,8450980,$$

11. $11^2 = 121 = 120 + 1$, mithin

$$\log 11 = \frac{1}{2} [1 + \log 12 + \log(1 + \frac{1}{120})]; Z = \frac{1}{240} \log 11 = 1,0413927.$$

13. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, mithin

$$\log 13 = 3 - \log 7 - \log 11 + (\log 1 + \frac{1}{1000}); Z = \frac{1}{2001}$$

$$\log 13 = 1,1139434.$$

17. $9 \cdot 17 \cdot 17 = 2601$, mithin

$$\log 17 = \frac{1}{2} [2 + \log 26 - \log 9 + \log(1 + \frac{1}{2600})]; Z = \frac{1}{5201}$$

$$\log 17 = 1,2304489.$$

19. $9 \cdot 19 \cdot 19 = 3249$ und $3250 = 50 \cdot 5 \cdot 13 = 1000 \cdot 13 : 4$

$$\log 19 = \frac{1}{2} [3 + \log 13 - \log 4 - \log 9 + \log(1 - \frac{1}{3250})]; Z = \frac{1}{6499}$$

$$\log 19 = 1,2787536.$$

23. $13 \cdot 23 = 299$; mithin

$$\log 23 = 2 + \log 3 - \log 13 + \log(1 - \frac{1}{300}); Z = \frac{1}{599}$$

$$\log 23 = 1,3617278.$$

- 29.** $19 \cdot 29 = 551$; mithin
 $\log 29 = 2 + \log 11 - \log 30 + \log (1 + \frac{1}{550})$; $Z = \frac{1}{1101}$
 $\log 29 = 1,4623980$.
- 31.** $31 \cdot 31 = 961$; mithin
 $\log 31 = \frac{1}{2} [1 + \log 16 + \log 6 + \log (1 + \frac{1}{960})]$; $Z = \frac{1}{1921}$
 $\log 31 = 1,4913617$.
- 37.** $27 \cdot 37 = 999$; mithin $\log 37 = 3 - \log 27 + \log (1 - \frac{1}{1000})$; $Z = \frac{1}{1999}$
 $\log 37 = 1,5682017$.
- 41.** $41 \cdot 41 = 1681$ und $1682 = 2 \cdot 29 \cdot 29$; mithin
 $\log 41 = \frac{1}{2} [2 \log 29 + \log 2 + \log (1 - \frac{1}{1682})]$; $Z = \frac{1}{3363}$
 $\log 41 = 1,6127839$.
- 43.** $43^4 = 3418801$ und $3418800 = 100 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$; mithin $\log 43 =$
 $\frac{1}{4} [2 + \log 12 + \log 7 + \log 11 + \log 37 + \log (1 + \frac{1}{2418800})]$; $Z = \frac{1}{6837601}$
 $\log 43 = 1,6334685$.
- 47.** $47^4 = 4879681$ und $4879680 = 10 \cdot 32 \cdot 39 \cdot 17 \cdot 23$; mithin $\log 47 =$
 $\frac{1}{4} [1 + \log 32 + \log 39 + \log 17 + \log 23 + \log (1 + \frac{1}{4879680})]$; $Z = \frac{1}{9759361}$
 $\log 47 = 1,6720979$.
- 53.** $53 \cdot 27 = 1431$ und $1430 = 10 \cdot 11 \cdot 13$; mithin
 $\log 53 = 1 + \log 11 + \log 13 - \log 27 + \log (1 + \frac{1}{1430})$; $Z = \frac{1}{2861}$
 $\log 53 = 1,7242759$.
- 59.** $59^2 = 3481$ und $3480 = 10 \cdot 12 \cdot 29$; mithin
 $\log 59 = \frac{1}{2} [1 + \log 12 + \log 29 + \log (1 + \frac{1}{3480})]$; $Z = \frac{1}{6961}$
 $\log 59 = 1,7708520$.
- 61.** $61^2 = 3721$ und $3720 = 10 \cdot 12 \cdot 31$; mithin
 $\log 61 = \frac{1}{2} [1 + \log 12 + \log 31 + \log (1 + \frac{1}{3720})]$; $Z = \frac{1}{7441}$
 $\log 61 = 1,7853298$.
- 67.** $67 \cdot 37 = 2479$ und $9480 = 10 \cdot 8 \cdot 31$; mithin
 $\log 67 = 1 + \log 8 + \log 31 - \log 37 + \log (1 - \frac{1}{2480})$; $Z = \frac{1}{4959}$
 $\log 67 = 1,8260748$.
- 71.** $71 \cdot 81 = 5751$ und $5750 = 1000 \cdot 23 \cdot \frac{1}{4}$; mithin
 $\log 71 = 3 + \log 23 - \log 4 - \log 81 + \log (1 + \frac{1}{5750})$; $Z = \frac{1}{11501}$
 $\log 71 = 1,8512583$.
- 73.** $73^4 = 28398241$ und $28398240 = 10 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 41$; mithin $\log 73 =$
 $\frac{1}{4} [1 + \log 16 + \log 9 + \log 13 + \log 37 + \log 41 + \log (1 + \frac{1}{28398240})]$; $Z = \frac{1}{56796481}$
 $\log 73 = 1,8633229$.
- 79.** $99 \cdot 79 = 7921$ und $7820 = 10 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 23$; mithin
 $\log 79 = 1 + \log 34 + \log 23 - \log 99 + \log (1 + \frac{1}{7820})$; $Z = \frac{1}{15641}$
 $\log 79 = 1,8976271$.
- 83.** $27 \cdot 83 = 2241$ und $2240 = 10 \cdot 32 \cdot 7$; mithin
 $\log 83 = 1 + \log 32 + \log 7 - \log 27 + \log (1 + \frac{1}{2240})$; $Z = \frac{1}{4481}$
 $\log 83 = 1,9190781$.
- 89.** $31 \cdot 89 = 2759$ und $2760 = 10 \cdot 12 \cdot 23$; mithin
 $\log 89 = 1 + \log 12 + \log 23 - \log 31 + \log (1 - \frac{1}{2760})$; $Z = \frac{1}{5519}$
 $\log 89 = 1,9493900$.
- 97.** $47 \cdot 97 = 4559$ und $4560 = 10 \cdot 24 \cdot 19$; mithin
 $\log 97 = 1 + \log 24 + \log 19 - \log 47 + \log (1 - \frac{1}{4560})$; $Z = \frac{1}{9119}$
 $\log 97 = 1,9867717$.

Satz. Wenn mehr Zahlen in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, so sind auch die Unterschiede ihrer Loge oder Logarithmen einander gleich, und je mehr sich zwei Verhältnisse einander nähern, um so mehr nähern sich auch die Unterschiede der entsprechenden Loge. 61.

Beweis: 1. Seien die Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ so ist nach Zahlenlehre 315 auch $\log \frac{b}{a} = \log \frac{d}{c} = \log \frac{f}{e}$ d. h. es ist nach Zahlenlehre 356 $\log b - \log a = \log d - \log c = \log f - \log e$.

2. Seien die Verhältnisse $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}$ nahe einander gleich, so sind auch die Unterschiede der entsprechenden Loge nahe einander gleich. So sind die Verhältnisse $\frac{a+1}{a}, \frac{a+2}{a+1}, \frac{a+3}{a+2}$, wenn a eine recht grose Zahl ist, nahe einander gleich und zwar verhalten sich

$$\frac{a+1}{a} : \frac{a+2}{a+1} = (a^2 + 2a) + 1 : (a^2 + 2a) \text{ und}$$

$$\frac{a+2}{a+1} : \frac{a+3}{a+2} = (a^2 + 4a + 3) + 1 : (a^2 + 4a + 3).$$

Beispiele: Zu 1. Es ist $\frac{1001}{1000} = \frac{2002}{2000} = \frac{3003}{3000} = \dots = \frac{9009}{9000}$ u. ist demnach auch $\log 1001 - \log 1000 = \log 2002 - \log 2000 = \log 3003 - \log 3000 = \log 9009 - \log 9000 = 0,0004341$.

Zu 2. Es verhalten sich $\frac{1001}{1000} : \frac{1002}{1001} = 1002001 : 1002000$, mithin ist $(\log 1001 - \log 1000) - (\log 1002 - \log 1001) = \log 1002001 - \log 1002000$ oder $2 \log 1001 - (\log 1000 + \log 1002) = \log 1002001 - \log 1002000 = 6,00086815 - 6,00086772 = 0,00000043$.

Es ergibt sich daraus, dass man den Log einer Zahl über 1000 leicht dadurch gewinnen kann, dass man die Mitte nimmt zwischen dem Loge der nächst höhern und der nächst niedern Zahl. Bei 7stelligen Logen muss man dann auf der letzten Stelle eine kleine Zahl hinzufügen und zwar bei den Zahlen von 1000 bis 1150 2, bei 1150 bis 1350 $1\frac{3}{4}$, bei 1350 bis 1600 $1\frac{1}{2}$, bei 1600 bis 2000 $1\frac{1}{4}$, von 2000 bis 2500 1, bei 2500 bis 3500 $\frac{3}{4}$, bei 3500 bis 6000 $\frac{1}{2}$, bei 6000 bis 10000 $\frac{1}{4}$.

Satz. Die Berechnung der Zehntloge (gemeinen Logarithmen) 62. für die Primzahlen von 100 bis 1000.

Um die gemeinen Loge (Logarithmen der Primzahlen von 100 bis 1000 zu berechnen, suche man für jede dieser Primzahlen ein Vielfaches auf, das

zwischen 1000 und 10000 am liebsten zwischen 6000 und 10000 und zugleich zwischen zwei Vielfachen kleinerer Primzahlen liegt, berechne die Loge für die beiden letzteren, nehme die Hälfte ihrer Summe, man erhält dadurch den Log für das Vielfache der gefuchten Primzahl und zieht von diesem Loge des Vielfachen, den Log der Zahl ab, mit welcher die Primzahl vervielfacht war. Die Richtigkeit des Ergebnisses folgt unmittelbar aus 60. Um für jede Zahl zu finden, welche Fache oder Faktoren sie enthalten, dazu bietet die Tafel der Primzahlen und der nicht durch 2, 3 und 5 teilbaren Zahlen Zahlenlehre 228 eine ausgezeichnete Hülfe.

Einige Beispiele werden den Weg klar machen. Es ist

$$101. 97 = 9797 \text{ und es ist } 9796 = 4 \cdot 31 \cdot 79, 9798 = 6 \cdot 23 \cdot 71$$

$$\log 101 = \frac{1}{2} [\log (4 \cdot 31 \cdot 79) + \log (6 \cdot 23 \cdot 71)] - \log 97$$

$$103. 88 = 9064 \text{ und es ist } 9063 = 9 \cdot 19 \cdot 53, 9065 = 5 \cdot 39 \cdot 49$$

$$\log 103 = \frac{1}{2} [\log (9 \cdot 19 \cdot 53) + \log (5 \cdot 39 \cdot 49)] - \log 88.$$

Zur bequemern Uebersicht lasse ich die betreffenden Vielfachen der Primzahlen in einer Tafel folgen.

Vielfache der Primzahlen, welche zur Berechnung der Primzahlen zwischen 100 und 1000 dienen.

Die halbfetten Zahlen bezeichnen die Vielfachen in deren beiden Nachbarzahlen nur Primzahlen unter 100 als Fache oder Faktoren vorkommen.

101 1313. 1616. 2020. 2323. 2626. 2727. 3535. 6060. 6161. 6969. 7474. 8585. 9797.

103 1648. 1751. 2276. 2369. 2575. 3914. 4429. 5253. 6901. 7313. 9064.

107 1177. 1819. 1926. 2782. 3103. 3959. 4601. 4815. 6955. 7811. 8988.

109 2071. 3161. 5777. 5886. 6649. 7739. 8175. 9374. 9701. 9919.

113 1695. 1921. 2034. 3051. 3503. 4181. 4746. 5311. 5424. 8023.

127 1016. 1651. 2159. 2413. 2667. 2794. 4445. 6096. 6350. 8382. 9271.

131 1179. 1310. 1441. 1703. 2751. 2882. 3537. 4454. 4716. 6943. 7991.

137 1644. 1781. 1918. 3699. 4521. 4795. 5617. 6439. 7809. 8905. 9316.

139 1112. 1807. 2224. 3197. 3336. 4031. 5560. 5699. 5977. 6255. 6533. 9591.

149 1341. 1639. 1937. 3278. 3576. 3725. 3874. 4172. 6556. 7599. 7748. 9089. 9983.

151 1057. 1208. 1359. 3775. 4379. 4983. 5134. 5587. 5889. 7399. 8909. 9513.

157 1099. 2355. 2669. 3297. 3611. 3925. 5809. 7379. 8321.

163 1793. 1956. 4401. 4564. 5216. 6031. 9154.

167 1002. 1169. 2839. 3173. 3841. 4509. 5511. 6847. 7849.

173 1211. 3287. 4325. 4844. 5536. 6401. 8304. 8477. 9515.

179 1074. 1611. 2506. 2685. 3401. 3938. 4117. 5191. 5370. 5549. 6623. 9129.

181 1629. 2172. 2353. 2534. 2715. 3620. 4344. 4525. 5249. 5611. 9593. 9955.

191 1910. 2483. 2674. 4393. 5539. 5921. 6876. 7258. 7449. 7831. 8977.

193 1158. 1351. 1737. 2509. 2702. 3474. 3667. 3860. 4246. 4825. 6176. 8685. 9264. 9873.

197 1379. 1970. 2364. 2561. 3349. 4531. 6304. 6698. 7683. 8865. 9062. 9456.

109	1393.1592.1791.1990.3383.3781.4577.6766.8756.9751.
111	1055.1266.1899.2321.3587.4431.5697.6119.7596.8651.
113	1338.1561.2899.3568.6467.9589.
115	1135.1816.2951.3405.4086.6356.8399.9307.
117	1145.2290.3883.4351.6641.7099.8931.
119	1165.1631.2330.5359.6291.7223.7922.8854.9087.
121	1195.1673.2868.3585.5975.6214.7170.7409.8126.8365.9321.9799.
123	1205.2651.3615.4579.5543.7953.9399.9881.
125	1004.1255.1506.2008.2510.3263.4016.4267.4769.6526.8283.8785.
127	1028.1799.2956.2313.2827.3508.3855.4369.6425.6682.
129	1315.2367.4471.6049.6575.7101.
131	2421.2959.3497.4842.5111.6725.7801.
133	1084.1897.2168.2981.4065.4607.5149.8672.8943.9214.
135	1385.1939.2493.2770.
137	1405.2248.2529.3653.4215.5339.5901.8149.8711.8992.9554.
139	1132.1415.2264.2547.2830.3396.7075.8773.
141	1464.2051.2344.3223.3809.4395.4981.5567.7911.8790.
143	1535.1842.2149.3070.3684.6147.9824.
145	1244.2177.3421.4976.5909.7153.7775.9019.9952.
147	1252.1565.2191.3130.4069.5634.6573.6886.7199.7825.
149	1268.1585.2536.3487.4121.4438.8876.9827.
151	1324.2317.3972.4803.4634.4965.5627.5958.6289.6951.7613.7944.
153	1011.2022.2359.2696.3707.4718.5055.5729.6740.7751.
155	1735.3123.3817.4164.4511.6593.7981.9716.
157	1396.1745.2443.3839.4188.9074.
159	1059.1412.2118.2471.3530.4236.4589.7060.7413.8119.8472.9178.
161	1077.2872.3231.3590.3949.4308.6103.6462.
163	1101.1468.1835.2569.3303.6973.8074.8441.9175.
165	1865.2984.3730.4103.4476.4849.5968.6341.6714.
167	1119.1516.7201.7580.7959.9854.
169	1149.2681.4213.4979.5745.6511.6894.7660.8426.9192.
171	1167.1556.1945.3112.3501.4279.4668.5057.6224.8558.
173	1191.1588.1985.3176.3970.4367.5161.6749.
175	1604.2005.2406.2807.3609.4010.6105.7619.
177	2045.2863.3681.4499.5726.6953.7362.7771.
179	1257.1676.2095.3771.4190.5447.8380.8799.9637.
181	1684.2105.2526.5473.5894.7999.9262.9683.
183	1293.2155.2586.3879.6465.6896.8189.8620.9051.
185	1299.2598.3031.4330.6062.6495.9959.
187	1756.3073.3951.4829.7463.8341.
189	1329.1772.2215.3101.4430.6645.7088.7531.7974.8417.
191	4041.6735.7633.9878.
193	1871.1828.3199.3656.4113.5027.8226.9140.
195	1844.4149.4610.5071.5993.8759.9681
197	1389.2315.3704.4630.5093.6019.6945.7472.9260.

- 467** 2335.3269.8736.4670.5137.5604.7005.7939.
479 1916.2874.3353.4311.5269.6227.6706.7664.9101.9580.
497 1461.2922.3409.3896.4383.5357.7805.
491 1473.1954.2455.2946.4419.5401.5892.6874.7365.9329.
499 1497.2495.3992.5489.6986.9481.
503 1006.2515.4024.4527.5030.7545.
509 1527.2036.2545.3054.3563.4581.5599.6108.6539.7635.8144.
521 1042.1563.3126.4168.4689.6252.8857.9899.
523 1046.1569.2092.4184.4707.6799.8891
541 1082.1623.2164.2705.3246.5951.9197.
547 2188.3829.6017.7111.7658.8205.9846.
557 1114.1671.2785.5013.6684.7241.
563 1126.1689.2815.3378.3941.4504.5067.6193.6756
569 1138.3983.4552.5121.6259.7397.7966.8535.
571 1142.3426.5139.6281.6852.
577 1731.2885.4616.5193.6347.6924.7501.
597 1174.2935.3522.4109.5696.7631.8805.
593 1779.4151.4744.5337.7709.
599 1188.1787.2396.2995.4193.5391.7787.9584.
691 1202.1803.2404.4808.5409.8414.9616.
697 4249.6070.9105.
613 1226.2452.3065.4291.5517.9808.
617 1234.1851.4319.6170.8021
619 3095.4333.5571.6809.8047.
631 1262.2524.3155.4417.5048.5679.6941.8834.
641 1923.2564.3205.5769.7051.
643 1286.1929.3858.5144.7073.8359.
647 4529.5176.5823.
653 1959.2612.3265.4571.7183.9142.9795.
659 1977.2636.3295.3954.6590.7249.
681 3305.4627.5288.9254.
673 1346.3365.4048.4711.8076.8749.
677 1354.2031.4062.4739.7447.8801.
683 2049.3415.6147.7513.8879.
691 2073.2764.3455.4337.7601.9674.
701 1402.4206.4907.5608.6309.7010.7711.8412.9113.
709 1418.3545.5672.7799.8508.9217.9926.
719 2157.2876.3595.5752.7190.7909.
727 3635.5089.8724.9451.
733 1466.2199.3665.5864.8063.
739 1478.5173.5912.8129.
743 2229.5201.5944.8173.9659.
751 1502.2253.3004.5257.6759.8261.
757 1514.2271.3785.4542.6056.7570.8327.9094.9841.
761 2283.3044.3805.6849.8371.
769 1568.3076.3845.4614.5383.

773	1546.2319.5411.6967.
787	1574.3935.5509.7870.8657.
797	1594.2391.7173.8767.
800	3226.4045.5663.7281.9708.
811	3244.4866.5677.6488.7299.
831	1642.4926.5747.
833	1646.2469.4115.5761.6584.7407.9876.
837	1654.2481.4135.4962.6616.
839	2487.3316.4145.6632.7461.9119.
839	1678.3356.5034.5873.7551.9229.
853	1706.4265.7677.
857	1714.2571.3428.5142.7713.
859	1718.3436.4295.6013.8590.
863	1726.2589.4315.6041.9493.
877	2631.3508.4385.6139.8770.9647.
881	1762.3524.5286.7048.8810.
883	1766.2649.6181.
887	1774.2661.6209.7096.7983.9757.
897	1814.3623.6409.8163.
911	4555.7288.
919	1838.2757.8271.
939	1858.2787.3716.4645.8361.
937	2811.
941	1882.2823.3764.4705.6587.8469.
947	1894.2841.3788.4735.9470.
953	1906.3812.6671.7624.9530.
967	6769.8703.9670.
971	1942.2913.3884.4855.7768.8739.9710.
977	1954.2931.4885.6839.
983	1966.2949.6881.
991	1982.5946.8919.9910.
997	2991.4985.

Bemerkt möge noch werden, dass bei diesen Berechnungen die letzte Stelle einen Fehler enthalten kann. Man muss daher bei dieser Methode eine Stelle mehr berechnen, als der gefuchte Log enthalten soll. Das gilt aber ebenso auch, wenn man aus den Logen der Primzahlen die ihrer Vielfachen berechnen will.

Satz. Die Berechnung der Tafel der Zehntloge oder gemeinen 63. Logarithmen für fünf Stellen von 1 bis 10000.

Man berechne von den Primzahlen von 1 bis 1000 die Vielfachen von 1 bis 10000. Es bleiben dann noch die Primzahlen von 1000 bis 10000 übrig und deren etwaige Vielfache. Jede solche Primzahl ist eine ungerade Zahl und liegt also zwischen den Vielfachen niederer Primzahlen; ihr Log ist demnach das Mittel aus den Logen der Nachbarzahlen und kann daraus unmittelbar berechnet werden.

Es ist dringend zu wünschen, dass jeder, der mit Logen rechnen will, wenigstens eine Gruppe von 100 bis 1000 Logen in dieser Weise berechne. Die

Tafel der Primzahlen und der nicht durch 2, 3 und 5 teilbaren Zahlen in Zahlenlehre 228 bietet hiezu eine ausgezeichnete Hülfe.

64. **Erklärung.** Die Loge (Logarithmen) für welche $M=1$ gesetzt wird, heißen die Eloge oder die Neperschen, die natürlichen Logarithmen, ihre Base heist e , das Zeichen derselben ist l .

Die natürlichen Loge (die logarithmi naturales) sind zuerst von John Napier (Baron von Merchistown) 1550—1617 aufgestellt, berechnet und in *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* Edinburg 1614 veröffentlicht. Nach ihm heißen die Loge Nepersche.

65. **Satz.** Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2 \pm x}$ ist,

$$l(1 \pm x) = \pm 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right)$$

$$\text{und ist } M = \log \text{ vulg. } e \cdot \frac{1}{M} = l(10)$$

$$e = 2,71828\ 1828459.$$

Beweis: Es ist, wenn $z^2 < 1$ und $z = \frac{x}{2 \pm x}$ ist,

$$\log(1 \pm x) = \pm 2 M \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \text{ (nach 56 und 57).}$$

Nach 64 soll aber für l oder für den Neperschen Log $M=1$ gesetzt sein, also ist nach dieser Erklärung

$$l(1 \pm x) = \pm 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right).$$

Mithin ist $\log. \text{ vulg. } a = M. \log. \text{ nat. } a$

oder

$$\frac{a}{10} = M \cdot \frac{a}{e} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{10} \quad \text{(nach Zahlenlehre 360)}$$

also ist $M = \log \frac{e}{10} = \log. \text{ vulg. } e$ (nach Zahlenlehre 164).

Andererseits folgt aus den Formeln

$$\log. \text{ nat. } a = \frac{1}{M} \cdot \log. \text{ vulg. } a$$

oder

$$\frac{a}{e} = \frac{1}{M} \cdot \frac{a}{10} = \frac{a}{10} \cdot \frac{10}{e}$$

also ist $\frac{1}{M} = \frac{10}{e} = \log. \text{ nat. } 10.$

Aus $M = \log. \text{ vulg. } e = 0,4342944819$ ergibt sich dann, wenn man zu diesem Loge die entsprechende Zahl sucht $e = 2,7182818285.$

66. **Satz.** Es ist der nepersche Log (Logarithmus) gleich dem gemeinen Log mal $\frac{1}{M}$ und ist der gemeine Log (Logarithmus) gleich dem Neperschen mal $M.$

67. Satz. Berechnung des e durch Reihen.

$$\text{Es ist } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum \frac{1}{n!}$$

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 4712.$$

Beweis: Man setze, soweit die Reihe echt bleibt,

$$a^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

und benutze nun die Eigenschaft der Höhen, dass $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ist.

Hier entwickle man a^{x+y} und a^y nach steigenden Höhen von y, dann ist

$$a_0 + a_1(x+y) + a_2(x+y)^2 + \dots = a^x(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots) \text{ also} \\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + y(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + y^2 P$$

$$= a_0 a^x + a_1 a^x y + y^2 Q$$

wo $y^2 P$ und $y^2 Q$ die Summe der Glieder bezeichnen, welche die zweite und die höheren Höhen von y enthalten.

Hier müssen nach 28 die Vorzahlen von y einander gleich fein, da die Gleichung für jeden Wert des y von Null bis zu einer Gröse c gelten soll, also ist

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = a_1 a^x.$$

Hier werden wir a^x in eine Reihe entwickeln, dann ist

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$= a_1 a_0 + a_1 a_1 x + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + \dots$$

Hier müssen wieder nach 28 die entsprechenden Vorzahlen für die gleichen Höhen von x einander gleich fein, dies ergibt

$$a_1 = a_1 a_0 \quad \text{d. h. } a_0 = 1$$

$$2a_2 = a_1 a_1 \quad \text{d. h. } a_2 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{a_1^2}{2!}$$

$$3a_3 = a_1 a_2 \quad \text{d. h. } a_3 = \frac{a_1 a_2}{3} = \frac{a_1^3}{3!}$$

$$4a_4 = a_1 a_3 \quad \text{d. h. } a_4 = \frac{a_1 a_3}{4} = \frac{a_1^4}{4!} \text{ u. f. w.}$$

Führt man diese Werte in die Reihe ein, so erhält man

$$a^x = 1 + \frac{(a_1 x)^1}{1!} + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \frac{(a_1 x)^3}{3!} + \dots = \sum \frac{(a_1 x)^a}{a!}$$

Hier ist a_1 abhängig von a, setzt man $a_1 = 1$, wenn $a = e$ ist, so erhält man

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum \frac{x^a}{a!} \text{ und setzt man hier } x = 1, \text{ für welchen}$$

Wert die Reihe noch echt bleibt, so erhält man

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum \frac{1}{a!}$$

$$= 2,71828182845904523536028747135266249775724712.$$

Man sieht hier leicht, dass dies dieselbe GröÙe e ist, welche wir oben entwickelt haben.

$$\text{Es ist dann } a = e^{1 \cdot a} \text{ mithin } a^x = e^{(1 \cdot a \cdot x)} \int \frac{(1 \cdot a \cdot x)^a}{a!}$$

6. Die Reihen für die Winkelfolgen und Bogen und die Berechnung der trigonometrischen Logarithmentafeln.

Nachdem es uns gelungen ist, die Loge oder Logarithmen in Reihen zu entwickeln und ihre Tafeln zu berechnen, versuchen wir nun auch ein Gleiches bei den Winkelfolgen oder trigonometrischen Funktionen.

Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist

68.

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

$$\tan x = x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots$$

Beweis. Die Funktionen $\sin x$ und $\tan x$ sind einwertig und steigen nach Zahlenlehre 459 und 474 stetig mit dem Winkel von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, mithin da $x^2 < 1$ ist, für alle Werte von x , mithin kann man jede dieser Funktionen nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichsetzen. Es sei demnach

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\tan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Beide Funktionen werden aber für $x = 0$ gleichfalls Null, nach Zahlenl. 449 und 473, also folgt $a_0 = 0$ und $c_0 = 0$. Die beiden Formeln werden demnach

$$\sin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\tan x = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Es ist aber nach Zahlenl. 444 $\sin(-x) = -\sin x$ und nach Zahlenl. 468 $\tan(-x) = -\tan x$, mithin wenn wir für beide Seiten die Reihen einführen,

$$\sin(-x) = -a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$$

$$= -\sin x = -a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \dots$$

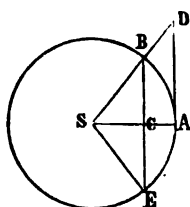
$$\tan(-x) = -c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \dots$$

$$= -\tan x = -c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3 - \dots$$

Hier sind nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen gleich, also ist $+a_1 = -a_1$, $+a_2 = -a_2$, $+a_3 = -a_3$ und ebenso

$$+c_2 = -c_2, +c_4 = -c_4, +c_6 = -c_6$$

d. h. es sind die Vorzahlen der Höhen mit gerader Stufe $a_2, c_2, a_4, c_4 \dots$ Null, die Reihen werden demnach



$$\sin x = a_1 x + a_3 x^3 + \dots$$

$$\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + \dots$$

Für sehr kleines x kann man hier die höhern Höhen von x unberücksichtigt lassen, und hat demnach $\sin x = a_1 x$ und $\tan x = c_1 x$. Es ist aber, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, $\sin x = \frac{BC}{r}$,

$$\tan x = \frac{DA}{r} \text{ und } \text{arc } x = \frac{BA}{r} \text{ und zwar ist } DA > BA \text{ und } BA > BC.$$

Je kleiner nun x wird, um so näher rücken BC und DA an einander und fallen, wenn $x = 0$ wird, ganz in einander, d. h. es wird dann $\sin x = \tan x = x$, daraus folgt $a_1 = 1$ und $c_1 = 1$, mithin ist

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

$$\tan x = x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots$$

69. **Satz.** Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,

$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Beweis: Die Funktion $\cos x$ ist einwertig und steigt nach Zahlenl. 459 stetig mit x von $x = -\pi$ bis 0 und fällt nach Zahlenl. 459 ebenso stetig mit x von 0 bis $+\pi$, man kann mithin jene Funktion nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichsetzen. Es sei also $\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Für $x = 0$ wird $\cos x = 1$ nach Zahlenl. 449, also folgt $a_0 = 1$, und

$$\cos x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Es ist aber nach Zahlenl. 444 auch $\cos -x = \cos x$ mithin, wenn wir für beide Seiten die Reihen einführen.

$$1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - \dots = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Es müssen nun nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen gleich sein, daraus folgt $a_1, a_3, a_5 \dots = 0$ und es bleibt also

$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

70. **Satz.** Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,

$$\text{arc}(\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Beweis: Da der Bogen $\text{arc}(\tan = x)$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird (Zahlenl. 490) und zwischen diesen Grenzen nach Zahlenl. 474 einwertig ist und stetig zunimmt, wenn x wächst,

auch $x^2 < 1$ ist, so kann man die Funktion $\arctan(x)$ nach 29 einer unendlichen steigenden Höhenreihe von x gleichsetzen. Es sei demnach

$$\arctan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \text{gesetzt.}$$

Da nun $\arctan(x) = 0$, wenn $x = 0$ nach Zahlenl. 473, so folgt $a_0 = 0$ und wird $\arctan(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Nehmen wir hier auf beiden Seiten die Tangenten, so erhalten wir auf der ersten Seite x und auf der andern Seite $\tan(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$, also

$$x = \tan(a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

Nach 68 ist aber $\tan z = z + c_2 z^2 + \dots$

mithin ist die Reihe für $\tan(a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = a_1 x + x^2 P$, wo $x^2 P$ die zweiten und alle höhern Höhen von x enthält.

Man hat also $x = a_1 x + x^2 P$.

Da nun nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x gleich sein müssen, so folgt $x = a_1 x$ d. h. $a_1 = 1$ d. h.

$$\arctan(x) = x + a_2 x^2 + \dots \quad *$$

Betrachten wir nun $\arctan(x + y)$ und sei $a = \arctan(x)$ und $b = \arctan(x + y)$ gesetzt, dann ist also $x = \tan a$ und $x + y = \tan b$.

Sei nun $\arctan(x + y) = \arctan(x) + z$ gesetzt, so ist

$b = a + z$ mithin $z = b - a$ also

$$\begin{aligned} \tan z = \tan(b - a) &= \frac{\tan b - \tan a}{1 + \tan b \cdot \tan a} = \frac{x + y - x}{1 + (x + y)x} \\ &= \frac{y}{1 + x^2 + xy} \text{ mithin } z = \arctan\left(\frac{y}{1 + x^2 + xy}\right) \end{aligned}$$

Es wird demnach

$$\arctan(x + y) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{y}{1 + x^2 + xy}\right) \quad **$$

Setzen wir in diese Formel die Reihe * für \arctan ein, so folgt

$$x + y + a_2 (x + y)^2 + a_3 (x + y)^3 + \dots =$$

$$\arctan(x) + \frac{y}{1 + x^2 + xy} + \dots$$

und wenn man hier nach den Höhen von y entwickelt

$$x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + y(1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) + \dots$$

$$= \arctan(x) + \frac{y}{1 + x^2} + \dots$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von y gleich sein müssen, so folgt

$$1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Da nun hier wieder nach 28 die Vorzahlen entsprechender Höhen von x gleich sein müssen, so folgt, da auf der rechten Seite die Vorzahlen der Höhen mit ungeraden Stufen Null sind,

$$2a_2 = 0 \quad 4a_4 = 0 \quad 6a_6 = 0 \text{ u. f. w., d. h.}$$

$$a_2, a_4, a_6 \dots$$

gleich Null und ferner

$$3a_3 = -1, \quad 5a_5 = +1, \quad 7a_7 = -1 \text{ u. f. w.} \quad \text{also}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \quad a_5 = +\frac{1}{5}, \quad a_7 = -\frac{1}{7} \text{ u. f. w.}$$

mithin, wenn man diese Werte in * einführt

$$\arcsin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

und diese Reihe ist nach 23 echt, wenn $x^2 < 1$ ist, was vorausgesetzt war.

Wenn man die Formel für $\arcsin(x)$ mit der Formel für Loge Satz 57 vergleicht, so bemerkt man leicht die nahe Verwandtschaft, denn es ist

$$\arcsin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2M \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

Setzt man hier in letzter Formel xi statt x , so wird die Formel

$$\log \frac{1+xi}{1-xi} = 2M \left(ix + \frac{i^3 x^3}{3} + \frac{i^5 x^5}{5} + \frac{i^7 x^7}{7} + \dots \right)$$

$$= 2Mi \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) = 2Mi \cdot \arcsin(x)$$

$$\text{also } \arcsin(x) = \frac{1}{2Mi} \log \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{1}{2i} \log \frac{1+xi}{1-xi}$$

Setzt man in $\arcsin(x)$ das xi statt x , so erhält man

$$\arcsin(xi) = ix - \frac{i^3 x^3}{3} + \frac{i^5 x^5}{5} - \frac{i^7 x^7}{7} + \dots$$

$$= i \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) = \frac{i}{2M} \log \frac{1+x}{1-x}$$

71. **Satz. Berechnung des Kreisumfanges von 2π .** Es ist der Kreisumfang 2π gleich 360 Grade, jeder zu 60 Minuten, jede zu 60 Sekunden und zwar

$$\pi = 3.14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50288 \ 41971 \ 694$$

$$1^0 = 0.01745 \ 32925 \ 19943 \ 29576 \ 92389 \ 07684 \ 88612 \ 71345 \ 1205$$

$$1^1 = 0.00029 \ 08882 \ 08665 \ 72159 \ 61539 \ 49461 \ 41476 \ 87655 \ 752$$

1'' = 0,00000 48481 36811 09535 99358 99141 02357 94797 596

wo 1° einen Grad, 1' eine Minute und 1'' eine Sekunde bezeichnet.

Beweis: Es ist eine bekannte Tatsache und wird hier nur noch einmal wiederholt, dass der Kreisumfang in 360°, jeder zu 60', jede Minute zu 60'' eingeteilt ist. Die Aufgabe, die hier zu lösen ist, ist die Berechnung des π . Man setze $\frac{1}{4}\pi = a + b$, dann ist

$$\tan b = \tan\left(\frac{1}{4}\pi - a\right) = \frac{\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) - \tan a}{1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) \cdot \tan a}$$

Da nun $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ ist nach Zahlenl. 472, so hat man

$$\tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{4} = a + b$$

1. Setzt man hier $\tan a = \frac{1}{2}$, so folgt $\tan b = \frac{1}{3}$

$$\text{also } \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\tan = \frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\tan = \frac{1}{3}\right)$$

Setzt man $a = 2\alpha$, so erhält man

$$\tan a = \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} \quad \tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$\text{und } \frac{\pi}{4} = 2\alpha + b$$

2. Setzt man hier $\alpha = \frac{1}{3}$, so folgt $b = \frac{1}{7}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\tan = \frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\tan = \frac{1}{7}\right)$$

3. Setzt man hier $\alpha = \frac{2}{5}$, so folgt $b = \frac{1}{41}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\tan = \frac{2}{5}\right) + \arctan\left(\tan = \frac{1}{41}\right)$$

4. Setzt man hier $\alpha = \frac{5}{13}$, so folgt $b = \frac{1}{65}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\tan = \frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\tan = \frac{1}{65}\right)$$

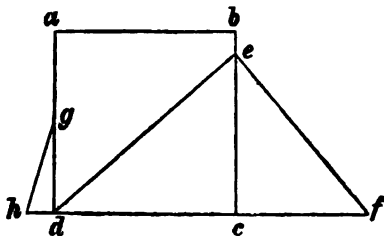
Hieraus folgt dann $\frac{\pi}{4} = c$

$$\frac{\pi}{4} = 0,78539 81633 97448 30961 56608 45819 87572 10492 9235$$

und daraus $\pi = 4c$, $1^\circ = c : 45$ $1' = c : (45 \cdot 60)$ $1'' = c : (45 \cdot 60 \cdot 60)$

Die Mathematiker haben sich lange Zeit bemüht, wenn der Durchmesser ab gegeben ist, die Länge eines Kreisumfanges in einer geraden Linie durch Zeichnung zu gewinnen; sie nannten diese Aufgabe die quadratura circuli. Meinem Bruder ist es gelungen, diese Aufgabe für die ersten 6 Dezimalstellen genau zu lösen. Ich erlaube mir die Lösung kurz

R. Grassmann Folgelehre.



beizufügen. Sei ab der Durchmesser, so zeichne man ein Quader über ab , also $abcd$, teile eine Seite cb in 8 gleiche Teile und mache $ce = \frac{7}{8} cb = \frac{7}{8} ab$, $dg = \frac{1}{2} ad = \frac{1}{2} ab$. Nun ziehe man de und senkrecht darauf ef , welche die verlängerte dc in f schneide, ziehe fg und senkrecht darauf gh , welche die verlängerte dc in h schneide. Dann ist $ce^2 = cf \cdot cd$, und $dg^2 = df \cdot dh$ oder es ist $cf = \frac{ce^2}{cd} = \frac{49}{64} ab$ und $df = cf + dc = \frac{113}{64} ab$,
 $dh = \frac{dg^2}{df} = \frac{\frac{1}{4}(ab)^2}{df} = \frac{16}{113} ab$, mithin ist dann

$$3 ab + dh = ab + bc + ch = \left(3 + \frac{16}{113}\right) ab = 3,141592920354 ab$$

mithin da

$$\pi = 3,141592653590 ab$$

so beträgt der Unterschied nur 0,000000286764

d. h. eine Größe, welche bei der Zeichnung nicht mehr zur Geltung gelangt.

72. Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$

$$\text{arc}(\sin = x) = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots =$$

$$\int \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\text{arc}(\cos = x) = \frac{1}{2} \pi - \left[x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Der Satz wird im Folgenden nicht gebraucht, ich füge für diejenigen, welche ihn abzuleiten wünschen, die Ableitung bei. Die Entwicklung ist kurz folgende:

* Es sei $\text{arc}(\sin = x) = c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Wir betrachten nun $\text{arc}(\sin = x + y)$ und sei $a = \text{arc}(\sin = x)$ und $b = \text{arc}(\sin = x + y)$ gesetzt, dann ist $x = \sin a$ und $x + y = \sin b$. Sei nun $\text{arc}(\sin = x + y) = \text{arc}(\sin = x) + z$ gesetzt, so ist

$$b = a + z, \text{ mithin}$$

$$\sin b = (\sin a) \cdot \cos z + (\cos a) \sin z$$

$$= (\sin a) \cdot \cos z + \sqrt{1 - (\sin a)^2} \sin z.$$

Also

$$x + y = x \cdot \cos z + \sqrt{1 - x^2} \sin z.$$

oder indem man für $\cos z$ und $\sin z$ nach 68 und 69 die Reihen setzt und diese bis zur ersten Höhe von z entwickelt

$$x + y = x(1 + \dots) + \sqrt{1 - x^2}(z + \dots)$$

$$= x + z \sqrt{1 - x^2} + \dots$$

Mithin wird

$$** \quad y = z \sqrt{1 - x^2} + \dots$$

Es ist aber nach *

$\text{arc}(\sin = x + y) = c_1(x + y) + c_2(x + y)^2 + \dots = \text{arc}(\sin = x) + z$
 also $c_1 x + c_2 x^2 + \dots + y(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots) + \dots = \text{arc}(\sin = x) + z$

Mithin da nach * $\text{arc}(\sin = x) = c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ ist, so bleibt

$$y(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots) + \dots = z.$$

Setzt man hier aus ** den Wert von y, so erhält man

$$\sqrt{1-x^2} (c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots) z + \dots = z$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von z gleich sein müssen, so folgt

$$\sqrt{1-x^2} (c_1 + c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots) = 1 \quad \text{d. h. wenn man nach 53}$$

$$(1-x^2)^{-1/2} \text{ entwickelt}$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

Also, da nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x gleich sein müssen, so folgt $c_2, c_4, c_6 \dots = 0$ und

$$c_1 = 1; 3c_3 = \frac{1}{2}, \quad 5c_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad 7c_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad \text{u. f. w.}$$

$$\text{mithin } c_1 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad c_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}, \quad c_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \quad \text{u. f. w.} \quad \text{also}$$

$$\text{arc}(\sin = x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{und nach Zahlenl. 460}$$

$$\text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\sin = x) = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

Bemerkt möge noch werden, dass die Vorzahlen dieser Reihe die folgenden Werte haben.

$\frac{1}{2 \cdot 3}$	$= 0,16666 \ 66667$	$\log = 9,221 \ 8487$
$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$	$= 0,07500 \ 00000$	$\log = 8,875 \ 0613$
$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$	$= 0,04464 \ 28571$	$\log = 8,649 \ 7519$
$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$	$= 0,03088 \ 19444$	$\log = 8,482 \ 6156$
$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \dots 10 \cdot 11}$	$= 0,02237 \ 21591$	$\log = 8,349 \ 7078$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \dots 12 \cdot 13}$	$= 0,01735 \ 27644$	$\log = 8,239 \ 3687$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \dots 14 \cdot 15}$	$= 0,01396 \ 48437$	$\log = 8,145 \ 0360$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \dots 16 \cdot 17}$	$= 0,01155 \ 18009$	$\log = 8,062 \ 6497$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \dots 18 \cdot 19}$	$= 0,00976 \ 16095$	$\log = 7,989 \ 5214$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 17 \cdot 19}{2 \cdot 4 \dots 20 \cdot 21}$	$= 0,00839 \ 03358$	$\log = 7,923 \ 7794$
$\frac{1 \cdot 3 \dots 19 \cdot 21}{2 \cdot 4 \dots 22 \cdot 23}$	$= 0,00731 \ 25259$	$\log = 7,864 \ 0685$

73. Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$ ist,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum (-1)^a \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum (-1)^a \frac{x^{2a}}{(2a)!}$$

wo $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a$ ist.

Beweis: Nach 68 und 69 ist, da $x^2 < 1$ ist,

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots$$

1. Es ist nach Zahlenl. 452

* $\sin(x+y) = (\sin x) \cos y + (\cos x) \sin y$
und wenn man jede Seite nach Reihen entwickelt, wobei man die höhern Höhen von y unentwickelt lassen kann, so ist

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= x + y + a_3 (x+y)^3 + a_5 (x+y)^5 + a_7 (x+y)^7 + \dots \\ &= x + y + a_3 (x^3 + 3x^2y + \dots) + a_5 (x^5 + 5x^4y + \dots) \\ &\quad + a_7 (x^7 + 7x^6y + \dots) \end{aligned}$$

$$= (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots) + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \dots) + \dots$$

$$= \sin x + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \dots) + \dots$$

$$(\sin x) \cos y = \sin x (1 + a_2 y^2 + \dots) = \sin x + \dots$$

$$(\cos x) \sin y = (1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots) y + \dots$$

$$= y(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots) + \dots$$

mithin wenn wir die Werte in * einsetzen

$$\sin x + y(1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \dots) + \dots$$

$$= \sin x + y(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots) + \dots$$

Da nun nach 28 die Vorzahlen von y einander gleich sein müssen, so folgt

$$1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \dots = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots$$

Da nun wieder nach 28 die Vorzahlen der entsprechenden Höhen von x einander gleich sein müssen, so folgt

$$+ \quad 3a_3 = a_2 \quad 5a_5 = a_4 \quad 7a_7 = a_6 \text{ u. f. w.} \quad \text{d. h.}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} \quad a_5 = \frac{a_4}{5} \quad a_7 = \frac{a_6}{6}; \text{ überhaupt } a_{2a+1} = \frac{a_{2a}}{2a+1}$$

2. Es ist ferner nach Zahlenl. 452

$$** \quad \cos(x+y) = (\cos x) \cos y - (\sin x) \sin y$$

und wenn man jede Seite nach Reihen entwickelt, wobei man die höhern Höhen von y unentwickelt lassen kann, so ist:

$$\cos(x+y) = 1 + a_2 (x+y)^2 + a_4 (x+y)^4 + a_6 (x+y)^6 + \dots$$

$$= 1 + a_2 (x^2 + 2xy + \dots) + a_4 (x^4 + 4x^2y + \dots) + a_6 (x^6 + 6x^4y + \dots) + \dots$$

$$= 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \dots) + \dots$$

$$= \cos x + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \dots) + \dots$$

$$(\cos x) \cos y = \cos x \cdot (1 + \dots) = \cos x + \dots$$

$$(\sin x) \sin y = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots) (y + \dots)$$

$$= y (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots) + \dots$$

mithin, wenn wir die Werte in ** einsetzen

$$\cos x + y (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \dots) + \dots$$

$$= \cos x - y (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots) + \dots$$

Da nun nach 28 die Vorzeichen von y einander gleich sein müssen, so folgt

$$2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \dots = -x - a_3 x^3 - a_5 x^5 - \dots$$

Da nun wieder nach 28 die Vorzeichen der entsprechenden Höhen von x einander gleich sein müssen, so folgt

$$2a_2 = -1, \quad 4a_4 = -a_2, \quad 6a_6 = -a_4 \text{ u. f. w., d. h.}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{6}, \text{ überhaupt } a_{2a+2} = -\frac{a_{2a+1}}{2a+2} \quad \dagger\dagger$$

Verbinden wir demnach die Formeln † und ††, so ergibt sich

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = -\frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$a_6 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \quad a_7 = \frac{a_6}{7} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

Es ist demnach, da $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a = a!$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum (-1)^a \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum (-1)^a \frac{x^{2a}}{(2a)!}$$

Satz. Es ist, wenn $x^2 < 1$ und für $\cot x$ auch $x \geq 0$ ist,

74.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{2x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} + \frac{62x^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3} + \dots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x^1}{1 \cdot 3} - \frac{x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{2x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5} - \frac{2x^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 9} - \dots$$

Der Satz wird nicht gebraucht und ist nur der Vollständigkeit wegen eingerückt. Man erhält ihn, wenn man $\tan x = x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + \dots$ setzt $\sin x = (\tan x) \cos x$ und $\cot = \frac{1}{x} + c_1 x + c_2 x^3 + \dots$ setzt und $\cos x = (\cot x) \sin x$ nimmt und beide Seiten in Reihen nach x entwickelt.

75. **Die Berechnung der Cosinus, Tang und Cot aus den Sinus.**

Die Berechnung der Winkeltafeln oder trigonometrischen Tafeln beginnt mit der Berechnung der Sinus bez. ihrer Loge. Bekanntlich ist $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, hat man demnach die sämtlichen Sinus und ihre Loge berechnet, so hat man die sämtlichen Cosinus und ihre Loge, und da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ oder da $\log \tan x = \log \sin x - \log \cos x$ und $\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x$ ist, so hat man mit den Sinus und ihren Logen auch die Tangenten und die Cotangenten beide mit ihren Logen. Es genügt demnach zunächst die Berechnung der Sinus und ihrer Loge für alle Winkel von 0° bis 90° oder, was ganz dasselbe ist, die Berechnung der Sinus und der Cosinus nebst ihren Logen für alle Winkel von 0 bis 45° , da $\cos(45^\circ - x) = \sin(90^\circ - (45^\circ - x)) = \sin(90^\circ - 45^\circ + x) = \sin(45^\circ + x)$ ist. Wer die Winkelgrößen nicht berechnen will, kann die Sätze 75—79 überschlagen.

76. **Satz. Berechnung der Loge der Winkelgrößen für die Sekunden und Minuten bis $0^\circ 30'$.**

Bezeichne γ die Zahl der Sekunden, s die Größe einer Sekunde, geteilt durch den Halbmesser, und b die Zahl, bis zu welcher die Rechnung genau sein soll, also bei 7stelligen Logen $5 \cdot 10^{-8}$, bei 5stelligen Logen $5 \cdot 10^{-6}$, so haben wir

$$\begin{aligned} \cos as &= 1 - \frac{a^2 s^2}{2} + \frac{a^4 s^4}{24} - \frac{a^6 s^6}{720} + \frac{a^8 s^8}{40320} - \dots \\ \sin as &= as - \frac{a^3 s^3}{6} + \frac{a^5 s^5}{120} - \frac{a^7 s^7}{5040} + \frac{a^9 s^9}{362880} - \dots \end{aligned}$$

Hier kann man die folgenden Glieder unberücksichtigt lassen, wenn bei $\cos as$ das erste Glied kleiner als b , und wenn bei $\sin as$ das erste Glied kleiner als asb ist. Hieraus ergibt sich, man kann unberücksichtigt lassen

	Bei 7stelligen wenn a kleiner als	Bei 5stelligen wenn a kleiner als
$\frac{a^2 s^2}{2}$, wenn $\log a < \frac{1}{2}(\log b + \log 2) - \log a$,	1' 5"	10' 52"
$\frac{a^3 s^3}{6}$, wenn $\log a < \frac{1}{2}(\log b + \log 6) - \log a$,	1' 52"	18' 49"
$\frac{a^4 s^4}{24}$, wenn $\log a < \frac{1}{4}(\log b + \log 24) - \log a$,	10' 53' 46"	50' 59' 48"
$\frac{a^5 s^5}{120}$, wenn $\log a < \frac{1}{4}(\log b + \log 120) - \log a$,	20' 50' 8"	80' 58' 2"
$\frac{a^6 s^6}{720}$, wenn $\log a < \frac{1}{6}(\log b + \log 720) - \log a$,	100' 24' 40"	220' 25' 50"
$\frac{a^7 s^7}{5040}$, wenn $\log a < \frac{1}{6}(\log b + \log 5040) - \log a$,	140' 24' 0"	310' 1' 24"

Man findet dann für die Winkel von $1''$ bis $1' 52''$ die 7stelligen Loge des Sinus einfach, indem man den Log von $1'' = 4,6855749 - 10$ zu dem Loge von $a =$ der Zahl der Sekunden zufügt, die 7stelligen Loge des Cosinus sind für die Winkel von $1''$ bis $1' 5''$ gleich $0 = 10,000 0000 - 10$. Bei den 5stelligen Logen findet man in gleicher Weise die Loge des Sinus bis $18' 49''$, die des Cosinus bis $10' 52''$.

Bei den größern Winkeln ist die Sache weitläufiger, da muss man beim Sinus, wie beim Cosinus noch das zweite Glied der Reihe berücksichtigen, und kann dann bei 7stelligen Logen die Loge des Cosinus bis $10' 58'$, die Loge des Sinus bis $20' 50'$, bei 5stelligen Logen die des Cosinus bis $50' 59'$, die des Sinus bis $80' 58'$ berechnen. Man berechnet dann für eine ganze Reihe von Winkeln as , etwa für die 60 Minuten eines Grades den $\log as$, daraus den $\log a^2 s^2 = 2 \log as$, und $\log \frac{a^2 s^2}{2}$, ebenso $\log a^3 s^3 = 3 \log as$ und $\log \frac{a^3 s^3}{6}$. Dann schlägt man der Reihe nach zu $\log \frac{a^2 s^2}{2}$ die Zahl, d. h. $\frac{a^2 s^2}{2}$ auf und zieht diese von 1 ab, so hat man den $\cos as$ und, wenn man den Log dazu aufschlägt, den $\log \cos as$. Endlich schlägt man der Reihe nach zu $\log \frac{a^3 s^3}{6}$ die Zahl, d. h. $\frac{a^3 s^3}{6}$ auf und zieht diese von as ab, so hat man den $\sin as$ und, wenn man den Log dazu aufschlägt, den $\log \sin as$.

Das folgende Beispiel macht das Verfahren anschaulich.

Winkel	as	$\log as$	$\log a^2 s^2$	$\log \frac{a^2 s^2}{2}$	$\log a^3 s^3$	$\log \frac{a^3 s^3}{6}$
$10' 0''$	0,017 4588	8,241 8774	6,488 7548	6,182 7248	4,725 6322	3,947 4909
$10' 1''$	0,017 7442	8,249 0564	6,498 1128	6,197 0828	4,747 1692	3,969 0179
$10' 2''$	0,018 0851	8,256 1185	6,512 2370	6,211 2070	4,768 3555	3,990 2042
$10' 3''$	0,018 3259	8,263 0653	6,526 1306	6,225 1006	4,789 1959	4,011 0446
$10' 4''$	0,018 6168	8,269 9050	6,539 8100	6,238 7800	4,809 7150	4,031 5637
$10' 5''$	0,018 9077	8,276 6387	6,553 2774	6,252 2474	4,829 9161	4,051 7648

Winkel	$\frac{a^2 s^2}{6}$	$\sin as$	$\log \sin as$	$\frac{a^2 s^2}{2}$	$\cos as$	$\log \cos as$
$10' 0''$	0,000 0009	0,017 4524	8,241 8553	0,000 1523	9,999 8477	0,999 9338
$10' 1''$	0,000 0009	0,017 7433	8,249 0332	0,000 1574	9,999 8426	9,999 9316
$10' 2''$	0,000 0010	0,018 0341	8,256 0943	0,000 1626	9,999 8374	9,999 9294
$10' 3''$	0,000 0010	0,018 3249	8,263 0424	0,000 1679	9,999 8321	9,999 9271
$10' 4''$	0,000 0010	0,018 6158	8,269 8810	0,000 1733	9,999 8267	9,999 9247
$10' 5''$	0,000 0011	0,018 9066	8,276 6136	0,000 1787	9,999 8213	9,999 9224

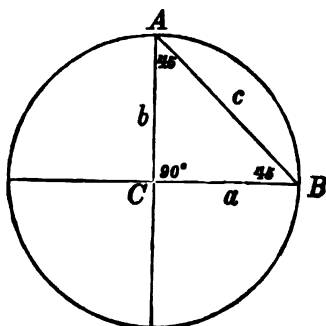
Wenn nur fünfstellige Loge der Winkelgrößen gesucht werden, vereinfacht sich die Arbeit ungemein durch die Tafel für den Log des Unterschiedes, wenn die Loge der Summe und des andern Stückes gegeben sind. Auf diese Weise erhalten wir die folgende Tafel.

Tafel für die Minuten von 0° bis 30 Minuten.

Minute	Sinus	Log sinus — 10	Cosinus	Log cos. — 10	Letzte Stelle des Log cos.
1	0,000 2909	6,463 7261	1,000 0000	10,000 0000	— 0
2	5818	6,764 7561	0,999 9998	9,999 9999	— 1
3	8727	6,940 8473	9996	9998	— 2
4	0,001 1636	7,065 7860	9993	9997	— 3
5	4544	7,162 6960	9989	9995	— 5
6	7453	7,241 8771	9985	9993	— 7
7	0,002 0362	7,308 8239	9979	9991	— 9
8	3271	7,366 8157	9973	9988	— 12
9	6180	7,417 9681	9966	9985	— 15
10	9089	7,463 7255	9958	9982	— 18
11	0,003 1998	7,505 1181	9949	9978	— 22
12	4907	7,542 9065	9939	9974	— 26
13	7815	7,577 6684	9928	9969	— 31
14	0,004 0724	7,609 8580	9917	9964	— 36
15	3633	7,639 8160	9905	9959	— 41
16	6542	7,667 8445	9892	9953	— 47
17	9451	7,694 1738	9878	9947	— 53
18	0,005 2360	7,718 9966	9863	9940	— 60
19	5268	7,742 4775	9847	9934	— 66
20	8177	7,764 7537	9831	9927	— 73
21	0,006 1086	7,785 9427	9813	9919	— 81
22	3995	7,806 1458	9795	9911	— 89
23	6904	7,825 4507	9776	9903	— 97
24	9813	7,843 9338	9756	9894	— 106
25	0,007 2721	7,861 6623	9736	9885	— 115
26	5630	7,878 6953	9714	9876	— 124
27	8539	7,895 0854	9692	9866	— 134
28	0,008 1448	7,910 8793	9668	9856	— 144
29	4357	7,926 1190	9644	9845	— 155
30	7265	7,940 8419	9619	9835	— 165

77.

Satz. Die Berechnung einzelner Sinus und Cosinus.



Seien a und b die beiden Katheten, und zwar a die gegenüberliegende vom Winkel x , c die Hypotenuse, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ und ist } \sin x = \frac{a}{c} \text{ und } \cos x = \frac{b}{c}$$

Bei 45° müssen wir vom gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgehen. Hier ist $a = b$, mithin $c^2 = 2a^2$ und $c = \sqrt{2} a$ oder $a = c \sqrt{1/2}$, mithin ist

$$\sin 45^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} (2)^{1/2} = \cos 45^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} (2)^{1/2} = 0,707106781186.$$

Bei 30° müssen wir vom gleichseitigen Dreiecke ausgehen, dessen Winkel 60° sind, das Lot aus der Spitze halfet die Grundseite. Es ist $2a = c$, mithin

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \cos 30^\circ = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} (3)^{1/2} = 0,8660254037835$$

Bei 18° müssen wir vom gleichschenkligen Dreiecke ausgehen, dessen Winkel in der Spitze 36° beträgt. Jeder Winkel an der Grundseite beträgt dann 72° und wenn die Linie BE diesen Winkel halfet, so beträgt jeder halbe Winkel 36° und ist Dreieck AEB und Dreieck BCE gleichschenklig und ist $AE = EB = CB = 2a$ und $CA = c$, auch ist Dreieck ABC und BCE ähnlich, also $AC : CB = CB : CE$ d. h. $c : 2a = 2a : c - 2a$, mithin $c(c - 2a) = 4a^2$, mithin ist $c^2 - 2ca = 4a^2$ und $c^2 - 2ca + a^2 = 5a^2$, also $(c - a)^2 = 5a^2$

$$\text{und } c = a \left((5)^{1/2} + 1 \right) \text{ und } \sin x = \frac{a}{c} = \frac{1}{(5)^{1/2} + 1} = \frac{(5)^{1/2} - 1}{((5)^{1/2} + 1)((5)^{1/2} - 1)}$$

$$= \frac{(5)^{1/2} - 1}{5 - 1} = \frac{(5)^{1/2} - 1}{4} = 0,309016994375$$

$$\cos x = (1 - \sin x^2)^{1/2} = \frac{1}{4} (10 + 2(5)^{1/2})^{1/2}$$

$$= 0,9510565$$

Aus diesen Werten finden wir nun leicht nach Zahlenl. 455

$$\sin \frac{1}{2} x = \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^{1/2} \quad \cos \frac{1}{2} x = \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^{1/2}$$

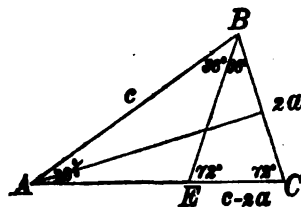
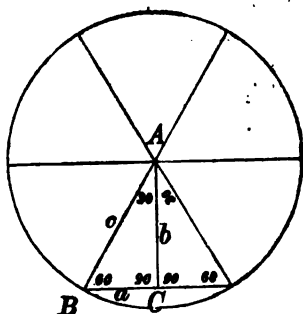
und findet man darnach in Verbindung mit den Formeln Zahlenl. 452 und 453

$$\sin (x \pm y) = (\sin x) \cdot \cos y \pm (\cos x) \cdot \sin y$$

$$\cos (x \pm y) = (\cos x) \cdot \cos y \mp (\sin x) \cdot \sin y$$

leicht die Werte der Sinus und Cosinus von $22\frac{1}{2}^\circ$, 15° , $7\frac{1}{2}^\circ$, 18° , 9° , $4\frac{1}{2}^\circ$ von $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$ und $1\frac{1}{2}^\circ$, von $2^\circ = 1\frac{1}{2}^\circ + \frac{1}{2}^\circ$ von $7^\circ = 7\frac{1}{2}^\circ - \frac{1}{2}^\circ$ und $3\frac{1}{2}^\circ$ und von $2\frac{1}{2}^\circ = 3^\circ - \frac{1}{2}^\circ$ und daraus nach Zahlenl. 454 für die doppelten Winkel 4° , 5° , 6° , 7° , 8° , 9° , 10° , 12° , 14° , 15° , 16° , 18° , 20° , $22\frac{1}{2}^\circ$.

Hierdurch finden wir demnach die Sinus, die Cosinus und ihre Loge von halbem zu halbem, bezüglich von ganzem zu ganzem Grade.



Die folgende Tafel giebt uns diese Werte.

Grad	Sinus	Log. sinus	Cosinus	Log. cosinus
1	0,017 4524	8,241 8558	0,999 8477	9,999 8888
1½	0,026 1789	8,417 9190	0,999 6578	9,999 8512
2	0,034 8995	8,542 8192	0,999 3908	9,999 7854
2½	0,043 6194	8,639 6796	0,999 0482	9,999 5865
3	0,052 3360	8,718 8002	0,998 6285	9,999 4044
3½	0,061 0485	8,785 6753	0,998 1848	9,999 1892
4	0,069 7565	8,848 5845	0,997 5641	9,998 9408
4½	0,078 4591	8,894 6433	0,996 9173	9,998 6591
5	0,087 1557	8,940 2960	0,996 1947	9,998 3442
6	0,104 5285	9,019 2346	0,994 5219	9,997 6148
7	0,121 8693	9,085 8945	0,992 5462	9,996 7507
8	0,139 1781	9,148 5558	0,990 2681	9,995 7528
9	0,156 4345	9,194 3324	0,987 6883	9,994 6199
10	0,173 6482	9,239 6702	0,984 8078	9,993 3515
11	0,190 8090	9,280 5968	0,981 6272	9,991 9466
12	0,207 9117	9,317 8789	0,978 1476	9,990 4044
13	0,224 9511	9,352 0680	0,974 3701	9,988 7289
14	0,241 9219	9,383 6752	0,970 2957	9,986 9041
15	0,258 8190	9,412 9962	0,965 9258	9,984 9438

78. **Satz.** Die Berechnung der Winkeltafeln von 0 bis 15°.

Nachdem wir die Sinus und Cosinus, sowie ihre Loge für die einzelnen Minuten von 0° und die für die ganzen bez. halben Grade kennen gelernt haben, so können wir nun die Sinus und Cosinus, sowie ihre Loge für die sämtlichen Minuten von 0 bis 15° durch die Formeln

$$\sin(x \pm y) = (\sin x) \cdot \cos y \pm (\cos x) \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = (\cos x) \cdot \cos y \mp (\sin x) \cdot \sin y$$

entwickeln. Die Arbeit geht sehr leicht und schnell, wenn man sie in Tafeln ausführt. Es ist ja

$$\log \sin x + \log \cos y = \log (\sin x) \cos y$$

$$\log \cos x + \log \sin y = \log (\cos x) \sin y \text{ u. f. w.}$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass bei jedem log hinten — 10 zu ergänzen ist, und dass man viel kürzer verfährt, wenn man statt $\log \cos x$ in der Form, der Tafel — 10 zuzufügen, lieber den negativen $\log \cos$, der auf den letzten Stellen nur wenige Ziffern enthält, zufügt.

Man muss dann zu $\log (\sin x) \cos y$ u. f. w. die Zahlen auffuchen und dann $(\sin x) \cos y \pm (\cos x) \sin y$ nehmen und wieder die Loge aufschlagen, oder wenn man nur die letztere und zwar fünfstellig sucht, den $\log(a \pm b)$ aus $\log a$ und $\log b$ nach der Hülftafel für die Loge der Summen und der Unterschiede auffuchen. Die Arbeit ist eine überaus leichte, wie das folgende Beispiel zeigt und ist es dringend wünschenswert, dass sich Jeder durch eine Berechnung von der Leichtigkeit der Arbeit überzeuge.

Beispiel einer Berechnung für Sinus und Cosinus der Minuten eines Grades und zwar für 10° . Es ist zu bemerken, dass $\log \cos 10^\circ = -0,0066485$ und $\log \sin 10^\circ = 9,2396702$ ist.

Min.	Letzte Stelle $\cos y$	$\log (\sin x) \cos y$	$\log (\cos x) \sin y$	$(\sin x) \cos y$	$(\cos x) \sin y$	$\sin (x+y)$	$\sin (x-y)$	$x-y$
1'	— 0	9,239 6702	6,457 0776	0,173 6482	0,000 2865	0,173 9347	0,173 8617	$9^\circ 59'$
2'	— 1	9,239 6701	6,758 1076	0,173 6481	0,000 2730	0,174 2211	0,173 0751	$9^\circ 58'$
3'	— 2	9,239 6700	6,984 1988	0,173 6481	0,000 8594	0,174 5075	0,172 7887	$9^\circ 57'$
4'	— 3	9,239 6699	7,059 1375	0,173 6480	0,001 1459	0,174 7939	0,172 5021	$9^\circ 56'$
5'	— 5	9,239 6697	7,156 0475	0,173 6480	0,001 4923	0,175 0803	0,172 2157	$9^\circ 55'$
6'	— 7	9,239 6695	7,235 2286	0,173 6479	0,001 7188	0,175 3667	0,171 9291	$9^\circ 54'$

Min.	Letzte Stelle $\cos y$	$\log (\cos x) \cos y$	$\log (\sin x) \sin y$	$(\cos x) \cos y$	$(\sin x) \sin y$	$\cos (x+y)$	$\cos (x-y)$	$x-y$
1'	— 0	9,993 3515	5,703 3963	0,984 8080	0,000 0605	0,984 7575	0,984 8585	$9^\circ 59'$
2'	— 1	9,993 3514	6,004 4263	0,984 8077	0,000 1010	0,984 7067	0,984 9087	$9^\circ 58'$
3'	— 2	9,993 3513	6,180 5175	0,984 8075	0,000 1515	0,984 6560	0,984 9590	$9^\circ 57'$
4'	— 3	9,993 3512	6,305 4562	0,984 8072	0,000 2020	0,984 6052	0,985 0092	$9^\circ 56'$
5'	— 5	9,993 3510	6,402 3662	0,984 8069	0,000 2526	0,984 5543	0,985 0595	$9^\circ 55'$
6'	— 7	9,993 3508	6,481 5473	0,984 8065	0,000 3031	0,984 5034	0,985 1096	$9^\circ 54'$

Satz. Die Berechnung der Winkeltafeln von 15° bis 90° .

79.

Da der $\sin (90^\circ - x) = \cos x$ und $\cos (90^\circ - x) = \sin x$, so haben wir aus den Winkelgrößen von 0° bis 15° auch die für 75° bis 90° . Wir dürfen also nur noch die Winkeltafeln für die Winkel von 15° bis 75° berechnen. Aber da auch der $\sin (45^\circ + x) = \cos (45^\circ - x)$ und $\cos (45^\circ + x) = \sin (45^\circ - x)$, wie wir in 75 sahen, so dürfen wir nur noch die Sinus und Cosinus für die Winkel von 15° bis 45° berechnen.

Für diese legen wir die Formeln zu Grunde

$$\begin{aligned} \sin (30^\circ \pm x) &= (\sin 30^\circ) \cos x \pm (\cos 30^\circ) \sin x \\ &= \frac{1}{2} \cos x \pm 0,8660254037835 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (30^\circ \pm x) &= (\cos 30^\circ) \cos x \mp (\sin 30^\circ) \sin x \\ &= 0,8660254037835 \cdot \cos x \mp \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Die Berechnung mittelst Loge ist hienach leicht.

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Die höhere Folgelehre oder die Lehre von den Diffe und von den Integralen einer Veränderlichen.

7. Die allgemeinen Sätze über Diffe oder Differentialquotienten.

Die Lehre von den Differentialquotienten oder Diffe leidet in fast allen mathematischen Werken noch an Fehlern und Unklarheiten in der Ableitung, welche vermieden werden müssen, wenn diese Lehre ganz unzweifelhaft und streng wissenschaftlich werden soll. Die Lehre wird aber überdies durch Beseitigung dieser Mängel überaus leicht und elementar, jedenfalls für den Anfänger viel klarer und sicherer. Ich bitte die geehrten Leser auf diese Seite der Darstellung besonders achten zu wollen.

$$80. \quad \text{Satz.} \quad f_0(x+y) = f_0 x + y f_0' x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0'' x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0''' x + \dots$$

$$= \sum_{a!} \frac{y^a}{a!} f_0^a x$$

wenn $y^2 < 1$ ist und $f_0(x+y)$ stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn y wächst und wo $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a$.

Jede Reinform (reelle Funktion) von x kann, sofern $y^2 < 1$ ist, innerhalb der Grenzen, wo die Folge (Funktion) von $x+y$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die Größe y zunimmt, einer echten (konvergenten) steigenden Höhenreihe der Größe y gleichgesetzt werden.

Beweis: Da die Folge hier eine Folge von $x + y$ ist und die Reihe nur nach y entwickelt ist, so bilden in der Reihe des Satzes 29 alle Vorzeichen der Glieder y^a Folgen von x , welche von y unabhängig oder in Bezug auf y konstant sind. Man kann demnach $a_a = \frac{1}{a!} f_a^a x$ setzen und erhält dann

$$f_0(x+y) = f_0^0 x + y f_0^1 x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0^2 x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0^3 x + \dots = \sum \frac{y^a}{a!} f_0^a x$$

wenn $y^2 < 1$ ist und die $f_0(x+y)$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn y zunimmt.

Setzen wir hier $y=0$, so ergibt sich zunächst $f_0(x+y) = f_0 x$ und daraus dann die ganze Formel.

Erklärung. Die $f'_0 x$ in der echten Reihe

81.

$f_0(x+y) = f_0 x + \frac{y}{1} f'_0 x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''_0 x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0 x + \dots$ und innerhalb der Grenzen, dass $f_0(x+y)$ stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn die Größe y wächst, heist die erste abgeleitete Folge (Funktion) von x und die $f_a^a x$ in derselben Reihe heist die a te abgeleitete Folge (Funktion) von x .

Die Erklärung der abgeleiteten Funktion ist zuerst von dem ausgezeichneten italienischen Mathematiker L. L. Lagrange aus Turin 1736—1813 in der Theorie des fonctions analytiques Paris 1797 (3. Aufl. 1847) aufgestellt worden.

Erklärung. Der Diff x oder der Differentialquotient nach x 82. von einer Folge (Funktion) von x heist die erste abgeleitete Folge von x .

Der $(a+1)$ te Diff x oder der $(a+1)$ te Differentialquotient nach x von einer Folge (Funktion) von x heist der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem a ten Diff x (dem a ten Differentialquotienten nach x) von derselben Folge (Funktion) von x .

Das Zeichen des Diff x von der Folge (Funktion) von x ist

$$\frac{d}{dx} f_0 x \text{ das Zeichen des } a\text{ten Diff } x \text{ ist } \frac{d^a}{dx^a} f_0 x.$$

Das Diffzeichen oder das Zeichen des Differentialquotienten ist ein Folgezeichen und bezieht sich daher auf das ganze folgende Glied. So z. B. ist $\frac{d}{dx} F_0 x = \frac{d}{dx} (F_0 x)$ der Diff x von der Folge von x , so ist $\frac{d}{dx} F_0 x^m = \frac{d}{dx} (F_0 x^m)$; dagegen ist $\frac{d}{dx} F_0 x \pm ax = \pm ax + \frac{d}{dx} (F_0 x)$ und ist ganz verschieden von $\frac{d}{dx} F_0 (x \pm ax)$ wie von $\frac{d}{dx} (F_0 x \pm ax)$.

Es ist sehr wichtig, dass man auch hier wieder auf diesen Gebrauch genau achte, da man sonst in die grössten Verwirrungen geraten muss. Die Klammern sind, wenn man diese Regel beachtet, nach dem Diffzeichen meist überflüssig

Die Ableitung des Diff x , des Differentialquotienten von x von der ersten abgeleiteten Funktion von x ist bereits von Leibniz gegeben und ist die einzige Form, in welcher diese GröÙe abgeleitet werden kann. Lagrange hat diese Ableitung in der elegantesten Form gegeben, welche nur einiger kleinen Verbesserungen in der Entwicklung bedarf. Es hatten sich aber in diese Ableitung unbemerkt einige Fehler eingeschlichen, welche entfernt werden mussten, wenn die Ableitung nicht zu fehlerhaften Sätzen führen sollte.

Zunächst hatte man die Bedingungen der n 637 auser Acht gelassen, dass die $f_0(x+y)$ eine echte Reihe sein und dass dieselbe innerhalb bestimmter Grenzen liegen müsse und kam dadurch zu Trugschlüssen mancherlei Art. Die Einführung solcher Bedingungen, welche die Trugschlüsse unmöglich machen, hat die Mathematiker lange Zeit beschäftigt. Der ausgezeichnete französische Mathematiker A. L. Cauchy aus Paris 1789—1857 suchte in den „Leçons sur le calcul différentiel Paris 1829“ (neue Ausg. 1840) die Fehler dadurch zu beseitigen, dass er bei den Reihen den Rest der Reihe vom nten Gliede ab berechnete. Andere Mathematiker suchten die Fehler dadurch zu beseitigen, dass sie den Begriff der stetigen Funktion einführten und nun in jedem einzelnen Falle die Untersuchung forderten, ob die Funktion auch in diesem Falle noch stetig sei. Die ganze Lehre gewann dadurch aber eine Unsicherheit und Unklarheit, so dass stets Zweifel entstanden, ob die Funktion noch stetig sei und große Untersuchungen darüber nötig wurden, ob und wann die abgeleiteten Formeln noch gelten, das aber ist unwissenschaftlich. Die obige Darstellung vermeidet alle diese Schwierigkeiten, indem sie streng die Grenzen bestimmt, innerhalb deren die Formeln gelten.

Ein zweiter Fehler war die gewöhnliche Bezeichnung des Diff x (des Differentialquotienten) nach x durch $\frac{df_0 x}{dx}$, denn da bei dieser Bezeichnung $dx = 0$ gesetzt wird, so wird hier durch 0 geteilt, was in der Formenlehre nie gestattet ist, auserdem würde dann aber auch nach den Regeln der Zahlenlehre $\frac{df_0 x}{dx} dx = df_0 x$ sein, da man hier nach den Regeln der Zahlenlehre $\frac{dx}{dx}$ heben kann, was wieder zu Trugschlüssen führen muss. Ebenso muss nach den Regeln der Größenlehre bez. Zahlenlehre $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ sein, da sich d und d heben.

Die Gebrüder Hermann und Robert Grassmann erkannten bei ihrer gemeinsamen Arbeit 1855 das Fehlerhafte dieser Bezeichnungsweise, sie führten ein untrennbares Zeichen für Diff x ein; Hermann Grassmann, Ausdehnungslehre, Berlin 1862 S. 296 hat dafür das Zeichen $\frac{d}{dx} f_0 x$ gewählt; aber auch bei diesem Zeichen erscheint noch $\frac{d}{dx}$ als ein Bruch und ist mithin noch zweideutig. Ich führe daher das unzweideutige und einfachere Zeichen $\frac{d}{x}$ ein, welches jedem Zweifel ausschließt.

83. Satz. $\frac{d}{x} f_0 x = f'_0 x$ oder
Es ist der Diff x von $f_0 x$ gleich der ersten abgeleiteten Folge von $f_0 x$

Beweis: Unmittelbar aus 81 und 82.

$$\text{Satz. } \frac{d^{n+1}}{dx} f.x = \frac{d}{dx} \frac{d^n}{dx} f.x \quad \text{oder 84.}$$

Es ist der $(n+1)$ te Diff x von $f.x$ gleich dem Diff x von dem n ten Diff x von $f.x$.

Beweis: Unmittelbar aus 82.

Satz. Wenn a bez. b eine Beständige (eine Konstante) ist, so ist 85.

$$\frac{d}{dx} a = 0 \quad \frac{d}{dx} bx = b \quad \frac{d}{dx} (a + bx) = b.$$

Beweis: Man setze statt x die GröÙe $x + y$ und entwickle die Reihe, so ist

$$f.(x+y) = a + b(x+y) = a + bx + yb = f.x + yb = f.x + yf'.x$$

Hier ist die erste abgeleitete Funktion von $a + bx$ $f'.x = b$

Also ist auch $\frac{d}{dx} (a + bx) = b$ und $b = 0$ gesetzt $\frac{d}{dx} a = 0$.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx} x = 1 \quad 86.$$

Beweis: Unmittelbar aus 85.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) = \frac{d}{dx} u \pm \frac{d}{dx} v \pm \frac{d}{dx} z \pm \dots \quad 87.$$

wo $u, v, z \dots$ Folgen (Funktionen) von x sind oder

$$\frac{d}{dx} (f.x \pm \varphi.x \pm F.x \pm \dots) = \frac{d}{dx} f.x \pm \frac{d}{dx} \varphi.x \pm \frac{d}{dx} F.x \dots$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von einer Summe von Folgen (Funktionen) von x ist gleich der Summe der Diff x von den Stücken oder von den einzelnen Folgen und

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Unterschiede zweier Folgen (Funktionen) von x ist gleich dem Unterschiede der Diff x von dem Vorrat und dem Abzug.

Beweis: Man entwickle die Folgen für $x + y$ in eine Reihe, so ist

$$\begin{aligned} f.(x+y) \pm \varphi.(x+y) \pm F.(x+y) + \dots &= f.x \pm \varphi.x \pm F.x + \dots \\ &\quad + y(f'.x \pm \varphi'.x \pm F'.x + \dots) \\ &\quad + \frac{y^2}{1.2}(f''.x \pm \varphi''.x \pm F''.x + \dots) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Hier ist also

$$\frac{d}{dx} (f.x \pm \varphi.x \pm F.x + \dots) = f'.x \pm \varphi'.x \pm F'.x + \dots \quad \text{nach 82}$$

$$= \frac{d}{dx} f.x \pm \frac{d}{dx} \varphi.x \pm \frac{d}{dx} F.x + \dots \quad \text{nach 82}$$

$$88. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^n}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) = \frac{d^n}{dx} u \pm \frac{d^n}{dx} v \pm \frac{d^n}{dx} z \pm \dots$$

wo $u, v, z \dots$ Folgen (Funktionen) von x .

Der n te Diff x (der n te Differentialquotient nach x) von einer Summe von Folgen (Funktionen) von x ist gleich der Summe der n ten Diff x von den einzelnen Folgen

und
Der n te Diff x (der n te Differentialquotient nach x) von dem Unterschiede zweier Folgen (Funktionen) von x ist gleich dem Unterschiede der n ten Diff x von dem Vorrat und dem Abzug.

Beweis: Es gelte der Satz für den a ten Diff x , so gilt er auch für den $(a+1)$ ten Diff x . Sei nämlich

$$\frac{d^a}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) = \frac{d^a}{dx} u \pm \frac{d^a}{dx} v \pm \frac{d^a}{dx} z \pm \dots \quad (\text{Annahme}), \quad \text{so ist}$$

$$\frac{d^{a+1}}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^a}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) \right] \quad (\text{nach 84})$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\frac{d^a}{dx} u \pm \frac{d^a}{dx} v \pm \frac{d^a}{dx} z \pm \dots \right] \quad (\text{nach Annahme})$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{d^a}{dx} u \pm \frac{d}{dx} \frac{d^a}{dx} v \pm \frac{d}{dx} \frac{d^a}{dx} z \pm \dots \quad (\text{nach 87})$$

$$= \frac{d^{a+1}}{dx} u \pm \frac{d^{a+1}}{dx} v \pm \frac{d^{a+1}}{dx} z \pm \dots \quad (\text{nach 84})$$

Nun gilt der Satz für $a=1$ mithin auch für jede folgende ganze Zahl n .

$$89. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{dx} uv = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u \quad \text{wo } u, v \text{ Folgen (Funktionen) von } x$$

$$\text{oder } \frac{d}{dx} (f \cdot x) \cdot \varphi \cdot x = (f \cdot x) \frac{d}{dx} \varphi \cdot x + (\varphi \cdot x) \frac{d}{dx} f \cdot x$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Zeuge zweier Folgen (dem Produkte zweier Funktionen) von x ist gleich der Summe der beiden Zeuge aus der einen Folge und dem Diff x der andern Folge.

Beweis: Man entwickle die Folgen für $(x+y)$ in Reihen und vervielfache die beiden Reihen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f \cdot (x+y) + \varphi \cdot (x+y) &= (f \cdot x + y f' \cdot x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f'' \cdot x + \dots) (\varphi \cdot x + y \varphi' \cdot x \\ &\quad + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi'' \cdot x + \dots) \\ &= (f \cdot x) \cdot \varphi \cdot x + y [(f \cdot x) \cdot \varphi' \cdot x + (\varphi \cdot x) \cdot f' \cdot x] \\ &\quad + \frac{y^2}{1 \cdot 2} [(f' \cdot x) \cdot \varphi \cdot x + (f \cdot x) \cdot \varphi'' \cdot x + (\varphi \cdot x) \cdot f'' \cdot x] \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Hier ist also

$$\frac{d}{dx} (f_0 x) \times \varphi_0 x = (f_0 x) \varphi_0' x + (\varphi_0 x) f_0' x \quad \text{nach 82}$$

$$= (f_0 x) \frac{d}{dx} \varphi_0 x + (\varphi_0 x) \frac{d}{dx} f_0 x \quad \text{nach 82}$$

Satz. Wenn a eine Beständige (eine Konstante) und u eine 90. Folge von x ist, so ist

$$\frac{d}{dx} a u = a \frac{d}{dx} u \quad \frac{d}{dx} \frac{u}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} u$$

$$\text{Beweis: Nach 88 ist } \frac{d}{dx} a u = a \frac{d}{dx} u + u \frac{d}{dx} a = a \frac{d}{dx} u$$

$$\text{da } \frac{d}{dx} a = 0 \quad \text{nach 85}$$

Und ebenso folgt $\frac{d}{dx} \frac{u}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} u$.

$$\text{Satz. } \frac{\frac{d}{dx} (uvz \dots)}{uvz} = \frac{\frac{d}{dx} u}{u} + \frac{\frac{d}{dx} v}{v} + \frac{\frac{d}{dx} z}{z} + \dots \quad 91.$$

wo $u, v, z \dots$ Folgen (Funktionen) von x und zwar ungleich Null sind

$$\text{oder } \frac{\frac{d}{dx} [(f_0 x)(\varphi_0 x)(F_0 x) \dots]}{(f_0 x)(\varphi_0 x)(F_0 x) \dots} = \frac{\frac{d}{dx} f_0 x}{f_0 x} + \frac{\frac{d}{dx} \varphi_0 x}{\varphi_0 x} + \frac{\frac{d}{dx} F_0 x}{F_0 x} + \dots,$$

$$\text{wo } f_0 x, \varphi_0 x, F_0 x \dots \geq 0.$$

Der Diff x (der Differentialquotient von x) von dem Zeuge (dem Produkte) mehrer Folgen geteilt durch das Zeug (Produkt) dieser Folgen ist gleich der Summe der Diff x der einzelnen Folgen, jeder geteilt durch seine Folge.

Beweis: Wenn wir den Diff x von dem Zeuge oder Produkte zweier Folgen von x , wie es sich nach 89 ergibt, durch das Zeug oder Produkt der beiden Folgen teilen, so erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\frac{d}{dx} (f_0 x) \cdot \varphi_0 x}{(f_0 x) \cdot \varphi_0 x} = \frac{\frac{d}{dx} f_0 x}{f_0 x} + \frac{\frac{d}{dx} \varphi_0 x}{\varphi_0 x}$$

Und wenn wir nun weiter gehen, indem wir $(f_0 x) \cdot \varphi_0 x$ als erste Folge, $F_0 x$ als zweite Folge behandeln, so folgt dieselbe Formel auch für die Zeuge dreier und beliebig vieler Folgen.

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d^n}{dx^n} uv &= u \frac{d^n}{dx^n} v + n \left(\frac{d}{dx} u \right) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} v + n \cdot 2 \left(\frac{d^2}{dx^2} u \right) \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} v \\ &+ n \cdot 3 \left(\frac{d^3}{dx^3} u \right) \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} v + \dots \\ &= \sum_n \left(\frac{d^n}{dx^n} u \right) \frac{d^{n-n}}{dx^{n-n}} v \end{aligned} \quad 92.$$

wo u und v Folgen von x und $n \cdot a = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a}$

Beweis: Es gelte der Satz für den m ten Diff x , so gilt er auch für den $(m+1)$ ten Diff x ; denn es ist $\frac{d^{m+1}}{x} f_0 x = \frac{d}{x} \frac{d^m}{x} f_0 x$, da nun im m ten Diff x nach der Annahme jedes Glied ein Zeug oder Produkt aus zwei Folgen von $x = (\varphi_0 x) \cdot F_0 x$ ist, so entwickelt sich jedes Glied, wenn man nach 89 den Diff x davon nimmt, in zwei Gliedern

$(\varphi_0 x) \frac{d}{x} F_0 x + \left(\frac{d}{x} \varphi_0 x \right) F_0 x$ und folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{x} uv &= \frac{d}{x} \frac{d^m}{x} uv = \frac{d}{x} u \cdot \frac{d^m}{x} v + \frac{d}{x} m \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d^{m-1}}{x} v + \frac{d}{x} m \left(\frac{d^2}{x} u \right) \frac{d^{m-2}}{x} v \\ &\quad + \frac{d}{x} m \left(\frac{d^3}{x} u \right) \frac{d^{m-3}}{x} v + \dots \\ &= u \frac{d^{m+1}}{x} v + m \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d^m}{x} v + m \left(\frac{d^2}{x} u \right) \frac{d^{m-1}}{x} v + m \left(\frac{d^3}{x} u \right) \frac{d^{m-2}}{x} v \\ &\quad + m \left(\frac{d^4}{x} u \right) \frac{d^{m-3}}{x} v + \dots \\ &\quad + \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d^m}{x} v + m \left(\frac{d^2}{x} u \right) \frac{d^{m-1}}{x} v + m \left(\frac{d^3}{x} u \right) \frac{d^{m-2}}{x} v \\ &\quad + m \left(\frac{d^4}{x} u \right) \frac{d^{m-3}}{x} v + \dots \\ &= u \cdot \frac{d^{m+1}}{x} v + (m+1) \cdot \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d^m}{x} v + (m+1) \cdot \left(\frac{d^2}{x} u \right) \frac{d^{m-1}}{x} v \\ &\quad + (m+1) \cdot \left(\frac{d^3}{x} u \right) \frac{d^{m-2}}{x} v + (m+1) \cdot \left(\frac{d^4}{x} u \right) \frac{d^{m-3}}{x} v + \dots \end{aligned}$$

Da nach 39 allgemein $a \cdot n + a \cdot n-1 = (a+1) \cdot n$ ist.

Also gilt der Satz, wenn er für m gilt, auch für $m+1$. Nun gilt der Satz für $m=1$, also gilt er auch für jede folgende ganze Zahl n .

93. Satz. $\frac{d^n}{x} uvz \dots = \sum \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot c \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots} \left(\frac{d^{n-a}}{x} u \right) \cdot \left(\frac{d^b}{x} v \right) \cdot \left(\frac{d^c}{x} z \right) \dots$

wo $u, v, z \dots$ Folgen von x und $a = b + c + \dots$

Beweis: Zunächst für $\frac{d^n}{x} uvz$

Es ist $\frac{d^n}{x} uvz = \frac{d^n}{x} (uv) z$

$$= \sum \frac{n \cdot c}{n} \left(\frac{d^{n-c}}{x} uv \right) \frac{d^c}{x} z \quad (\text{nach 87})$$

$$= \sum \frac{n \cdot c}{n(n-c)} \cdot \left(\frac{d^{n-c-b}}{x} u \right) \cdot \left(\frac{d^b}{x} v \right) \cdot \frac{d^c}{x} z \quad (\text{nach 87})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1) \cdots (n-c+1)(n-c)(n-c-1) \cdots (n-c-b+1)}{1 \cdot 2 \cdots c \cdot 1 \cdot 2 \cdots b} \\
&\quad \left(\frac{d^{n-c-b}}{dx^u} \right) \cdot \left(\frac{d^b}{dx^v} \right) \cdot \frac{d^c}{dx^z} \\
&= \frac{n(n-1) \cdots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdots b \cdot 1 \cdot 2 \cdots c} \left(\frac{d^{n-a}}{dx^u} \right) \cdot \left(\frac{d^b}{dx^v} \right) \cdot \frac{d^c}{dx^z}
\end{aligned}$$

Und in gleicher Weise fortfahrend für beliebige viele Fache oder Faktoren.

Satz. $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2}$ wo u, v Folgen (Funktionen) 94.

von x und v ungleich Null

oder

$$\frac{d}{dx} \frac{f \cdot x}{\varphi \cdot x} = \frac{\varphi \cdot x \frac{d}{dx} f \cdot x - f \cdot x \frac{d}{dx} \varphi \cdot x}{(\varphi \cdot x)^2} \quad \text{wo } \varphi \cdot x \geq 0.$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem Bruche zweier Folgen von x ist gleich dem Nenner mal dem Diff x des Zählers weniger dem Zähler mal dem Diff x des Nenners geteilt durch das Quader des Nenners.

Beweis: Setze $t = \frac{u}{v}$, dann ist $u = vt$, mithin ist nach 89

$$\frac{d}{dx} u = v \frac{d}{dx} t + t \frac{d}{dx} v \quad \text{oder} \quad v \frac{d}{dx} t = \frac{d}{dx} u - t \frac{d}{dx} v$$

also beide Seiten durch v geteilt und $t = \frac{u}{v}$ gesetzt, so ist

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{\frac{d}{dx} u}{v} - \frac{u}{v^2} \frac{d}{dx} v = \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2}$$

Man kann dieser Formel auch die Form geben

$$\frac{\frac{\frac{d}{dx} u}{\frac{u}{v}}}{\frac{u}{v}} = \frac{\frac{d}{dx} u}{u} - \frac{\frac{d}{dx} v}{v}$$

eine Form, welche in manchen Fällen Bequemlichkeit hat.

Satz. $\frac{d}{dx} f \cdot y = \left(\frac{d}{dx} f \cdot y \right) \frac{d}{dx} y$ oder $\frac{d}{dx} f \cdot y = y' f' y$

95.

wo y eine Folge (Funktion) von x

oder

Wenn y eine Folge (Funktion) von x ist, so ist der Diff x (der Differentialquotient nach x) von einer Folge von y gleich dem Diff y dieser Folge von y mal dem Diff x von y .

Beweis: Da y eine Folge (Funktion) von x , so setze $y = \varphi \cdot x$,

so ist nach 80 $\varphi_0(x + v) = \varphi_0 x + v \varphi'_0 x + v^2 \varphi''_0 x + \dots = y + u$
 und $\varphi'_0 x = \frac{d}{x} y$

Ferner ist nach 80

$$f_0(y + u) = f_0 y + u f'_0 y + u^2 f''_0 y + \dots \quad \text{und} \quad f'_0 y = \frac{d}{y} f_0 y$$

Setzen wir nun statt u seinen Wert $o \varphi'_0 x + o^2 \varphi''_0 x + \dots$ so wird
 $f_0(y + u) = f_0 \varphi_0(x + o) = f_0 y + o (\varphi'_0 x) f'_0 y$
 $+ o^2 [(\varphi''_0 x) f'_0 y + (\varphi'_0 x)^2 f''_0 y] + \dots$

Hier ist das zweite Glied der Diff x von $f_0 y$, mithin ist

$$\frac{d}{x} f_0 y = \left(\frac{d}{y} f_0 y \right) \cdot \frac{d}{x} y$$

Es ist dieser Satz von größter Wichtigkeit, um auch von verwickelten Folgen die abgeleiteten Folgen oder die Diff x entwickeln zu können, und werden wir davon wiederholt Gebrauch machen.

Sei z. B. $\frac{d}{x} (a + bx + cx^3)^{1/2}$ zu nehmen, so setzt man zunächst

$$a + bx + cx^2 = y \quad \text{und hat nun} \quad \frac{d}{x} y^{1/2} = \left(\frac{d}{y} y^{1/2} \right) \cdot \frac{d}{x} y \quad \text{und}$$

$\frac{d}{x} y = \frac{d}{x} (a + bx + cx^2)$. Wir werden im Folgenden noch vielfach Gelegenheit finden, diesen Satz anzuwenden.

$$96. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{y} x = \frac{1}{\frac{d}{x} y} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{f_x} x = \frac{1}{\frac{d}{x} f_x}$$

Wenn y eine Folge (Funktion) von x ist, so ist Diff y von x gleich 1 geteilt durch den Diff x von y .

Beweis: Da y eine Folge von x ist, so ist auch x eine Folge von y . Es sei $x = \varphi_0 y$, so ist nach 95

$$\frac{d}{x} x = \frac{d}{x} \varphi_0 y = y' \cdot \varphi'_0 y = \frac{d}{x} y \cdot \frac{d}{y} \varphi_0 y = \frac{d}{x} y \cdot \frac{d}{y} x$$

$$\text{aber} \quad \frac{d}{x} x = 1 \quad \text{nach 86, mithin ist} \quad \frac{d}{y} x = \frac{1}{\frac{d}{x} y}$$

$$97. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{x} f(y, v) = \left(\frac{d}{x} y \right) \frac{d}{y} f(y, v) + \left(\frac{d}{x} v \right) \frac{d}{v} f(y, v) \quad \text{oder}$$

$$\frac{d}{x} f(y, v) = y' f'_y + v' f'_v$$

wo y und v Folgen (Funktionen) von x und wo wir unter f'_y die nach y abgeleitete erste Folge oder Funktion von $f(y, v)$ verstehen.

Beweis: Da hier y und v neben einander auftreten, ohne dass die eine eine Folge der andern ist, so kann man sie beide als unabhängig von einander hinstellen oder der andern gegenüber als eine Konstante

behandeln, wenn man nur jede nach x verändert. Verändern wir also zunächst y nach x , indem x in $x + o$ übergehe, so wird nach 89

$$f_0(y + u, v) = f_0(y, v) + o \left(\frac{d}{dx} y \right) \frac{d}{y} f_0(y, v) + o^2 \dots$$

und verändern wir nun v nach x , indem x in $x + o$ übergeht, so wird nach 89

$$f_0(y + u, v + z) = f_0(y, v) + o \left(\frac{d}{dx} v \right) \cdot \frac{d}{v} f_0(y, v) + o \left(\frac{d}{dx} y \right) \cdot \frac{d}{y} f_0(y, v) + o^2 \dots$$

Da die Veränderung von $o \left(\frac{d}{dx} y \right) \cdot \frac{d}{y} f_0(y, v)$ bei der Veränderung von v nur höhere Potenzen oder Höhen von o ergibt, mithin ist

$$\frac{d}{x} f_0(y, z) = \left(\frac{d}{x} y \right) \cdot \frac{d}{y} f_0(y, v) + \left(\frac{d}{x} v \right) \cdot \frac{d}{v} f_0(y, v).$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x} f_0(x, y) = f'_0 x + y' f'_0 y. \quad 98.$$

Beweis: Unmittelbar nach 97 da $\frac{d}{dx} x = 1$ nach 86.

$$\text{Satz. } \frac{d}{x} f_0(y, u, v, \dots) = \left(\frac{d}{x} y \right) \frac{d}{y} f_0(y, u, v, \dots) + \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d}{u} f_0(y, u, v, \dots) + \dots \quad 99.$$

$$\text{oder } \frac{d}{x} f_0(y, u, v, \dots) = y' f'_0 y' + u' f'_0 u + v' f'_0 v + \dots$$

wo y, u, v, \dots Folgen (Funktionen) von x und wir unter $f'_0 y$ die erste abgeleitete Folge von $f_0(y, u, v, \dots)$ nach y verstehen.

Beweis: Unmittelbar nach 97.

$$\text{Satz. Taylorscher Lehratz} \quad 100.$$

$$f_0(x + y) = f_0 x + y \frac{d}{x} f_0 x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2}{x^2} f_0 x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3}{x^3} f_0 x + \dots = \sum \frac{y^a}{a!} \cdot \frac{d^a}{x^a} f_0 x$$

sofern $y^2 < 1$ und $f_0(x + y)$ einen reellen Zahlwert hat und stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die Gröse y zunimmt und alle $\frac{d^a}{x^a} f_0 x$ endlich bleiben.

Beweis: Setze in Satz 80 statt y die Gröse $v + y$, so ist $f_0(x + (v + y)) = f_0((x + v) + y)$ also

$$f_0(x + (v + y)) = f_0 x + (v + y) f'_0 x + \frac{(v + y)^2}{1 \cdot 2} f''_0 x + \frac{(v + y)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0 x + \dots$$

$$\frac{(v + y)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f_0^4 x + \dots$$

$$= f_0 x + y f'_0 x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''_0 x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0 x + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f_0^4 x + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + v f'_x + \frac{2yv}{1 \cdot 2} f''_x + \frac{3y^2v}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_x + \frac{4y^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}_x + \dots \\
& + \dots \\
f_0((x+v)+y) &= f_0(x+v) + y f'_0(x+v) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''_0(x+v) \\
& + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0(x+v) + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}_0(x+v) + \dots \\
&= f_0x + y f'_0x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''_0x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0x + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}_0x + \dots \\
& + v f'_0x + yv f'_0f''_0x + \frac{y^2v}{1 \cdot 2} f'_0f''_0x + \frac{y^3v}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'_0f'''_0x \\
& + \frac{y^4v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f'_0f^{(4)}_0x + \dots \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Da diese beiden Reihen für jedes y und jedes v innerhalb der Grenzen gelten sollen, so folgt daraus nach 28, dass die Folgen für yv , für y^2v , für $y^3v \dots$ einander gleich sein müssen, mithin folgt, dass

$$f''_0x = f'_0f'_0x; f'''_0x = f'_0f''_0x; f^{(4)}_0x = f'_0f'''_0x \dots$$

mithin da $\frac{d}{dx} f_0x = f'_0x$ und da $\frac{d^{a+1}}{dx^{a+1}} f_0x = \frac{d}{dx} \frac{d^a}{dx^a} f_0x$ ist, so folgt

$$f''_0x = \frac{d^2}{dx^2} f_0x \quad f'''_0x = \frac{d^3}{dx^3} f_0x \quad f^{(4)}_0x = \frac{d^4}{dx^4} f_0x \quad \text{und}$$

$$f_0(x+y) = f_0x + y f'_0x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''_0x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_0x + \dots$$

$$= f_0x + y \frac{d}{dx} f_0x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dx^2} f_0x + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{dx^3} f_0x + \dots$$

$$= \frac{\sum y^a \frac{d^a}{dx^a} f_0x}{a!}, \text{ wo } a! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1) \cdot a.$$

Es ist dieser Satz von dem englischen Mathematiker Brook Taylor 1685 bis 1731 aufgestellt und in seinem Werke *Methodus incrementorum directa et inversa* London 1715 bewiesen, und wird daher allgemein nach ihm genannt. Der Satz gewährt, wenn man die Diffe oder die Differentialquotienten einer Folge oder Funktion kennt, das leichteste Hilfsmittel, um daraus die Folge oder Funktion in einer steigenden Höhenreihe auszudrücken und wird vielfach dazu verwandt. Wir werden später die Anwendung dieses Satzes kennen lernen.

101. **Satz. Mac-Laurinscher Lehratz.**

$$f_0y = f_0x + y \frac{d}{dx} f_0x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dx^2} f_0x + \dots = \frac{\sum y^a \frac{d^a}{dx^a} f_0x}{a!}$$

wenn man in f_0x und in den abgeleiteten Folgen von f_0x die GröÙen

$x = 0$ setzt, sofern $y^2 < 1$ und $f_0 y$ für $x = 0$ einen reellen Zahlwert hat und stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn die GröÙe y zunimmt und alle $\frac{d^a}{dx} f_0 x$ endlich bleiben.

Beweis: Unmittelbar nach 100.

Dieser Satz ist in dieser Form von dem schottischen Mathematiker Colin Mac-Laurin 1698 bis 1746 aufgestellt, so in a treatise of fluxions Edinburg 1742, und trägt daher nach ihm den Namen. Vor ihm hat übrigens bereits der englische Mathematiker Stirling Lineae tertii ordinis Newtonianae 1717, Propos III denselben Satz in etwas anderer Form.

Satz. Wenn $F_0(x, f_0 x) = 0$ ist, so ist auch $\frac{d}{dx} F_0(x, f_0 x) = 0$, 102.

$$\frac{d^a}{dx} F_0(x, f_0 x) = 0.$$

Von jeder Gleichung, welche gleich Null ist, sind sämtliche Differenziale gleich Null.

Beweis: Da $F_0(x, y) = 0$ ist, wo y eine Folge (Funktion) von x ist, oder da $F_0(x, f_0 x) = 0$ ist, so muss diese Gleichung auch gelten für jeden Wert von x , also auch für $x + u$. Nach 100 ist aber

$$0 = F_0(x + u, f_0(x + u)) = F_0(x, f_0 x) + u \frac{d}{dx} F_0(x, f_0 x) + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dx^2} F_0(x, f_0 x) + \dots = \int \frac{u^a}{a!} \frac{d^a}{dx^a} F_0(x, f_0 x)$$

mithin ist nach 27, da $u \geq 0$ gesetzt ist

$$\frac{d}{dx} F_0(x, f_0 x) = \frac{d^a}{dx^a} F_0(x, f_0 x) = 0.$$

Satz. Von der Gleichung $F_0(x, y) = 0$, wo y Folge von x , ist 103.

$$y' = - \frac{F'_0 x}{F'_0 y} = - \frac{\frac{d}{dx} F_0(x, y)}{\frac{d}{dy} F_0(x, y)}$$

Wenn die Gleichung zwischen x und y gleich Null ist, so ist der Diff x der GröÙe y gleich dem negativen Bruche, dessen Zähler der Diff x , und dessen Nenner der Diff y der gegebenen Gleichung ist.

Beweis: Nach 102 ist $\frac{d}{dx} F_0(x, y) = 0$. Nach 98 ist aber

$$0 = \frac{d}{dx} F_0(x, y) = \frac{d}{dx} F_0 x + \frac{d}{dx} y \frac{d}{dy} F_0 y = F'_0 x + y' F'_0 y, \text{ mithin ist}$$

$$y' = - \frac{F'_0 x}{F'_0 y} = - \frac{\frac{d}{dx} F_0(x, y)}{\frac{d}{dy} F_0(x, y)}.$$

8. Die Diffe (die Differentialquotienten) für die Formeln der Zahlenlehre oder der niedern Analysis.

Leibniz, der Erfinder der Differentialrechnung hat sofort in der ersten kurzen Abhandlung im Oktoberhefte der Acta eruditorum Leipzig 1684 (Leibnitii opera ed Dutens III. S. 167), durch welche er die Erfindung der Differentialrechnung bekannt machte, die bedeutendsten Formeln der Differentialrechnung entwickelt. Er hat bereits folgende Formeln

$$d(z + y + w + x) = dz + dy + dw + dx \quad \text{dax} = adx$$

$$d\,xv = xdv + vdx$$

$$d\frac{v}{y} = \frac{ydv - vdy}{y^2}$$

$$d\,x^a = ax^{a-1} \cdot dx \quad d\left(\frac{1}{x^a}\right) = \frac{adx}{x^{a+1}}$$

Außerdem hat er dort bereits die Sätze über das Maximum und Minimum.

104. **Satz.** $\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}$

$$\frac{d^a}{dx^a} x^m = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-a+1) x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!} x^{m-a}$$

Der Diff x von der m ten Höhe von x ist gleich m mal der $(m-1)$ ten Höhe von x .

Es ist der a te Diff x von der m ten Höhe von x gleich der Tauschzahl von m geteilt durch die Tauschzahl von $(m-a)$ mal der $m-a$ ten Höhe von x .

Beweis: Nach 49 ist

$$(x+y)^m = x^m + m \cdot x^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}y^2 + \dots$$

mithin nach 82 ist $\frac{d}{dx} x^m = f'_0 x = m \cdot x^{m-1}$

Ferner ist nach 82

$$\frac{d^{a+1}}{dx^{a+1}} x^m = \frac{d}{dx} \frac{d^a}{dx^a} x^m \text{ mithin fortschreitend}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} x^m = \frac{d}{dx} mx^{m-1} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} x^m = \frac{d}{dx} m(m-1)x^{m-2} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\frac{d^a}{dx^a} x^m = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-a+1) \cdot x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!} x^{m-a}$$

105. **Satz.** $\frac{d}{dx} (S_{a_a} x^a) = S_{1_a} a_a x^{a-1}$

$$\frac{d^m}{dx^m} (S_{a_a} x^a) = S_{(a-m)_a} \frac{a!}{(a-m)!} a_a x^{a-m}$$

wo $0! = 1$ gesetzt wird.

Beweis: Unmittelbar aus 104.

Satz. $\frac{d^m}{dx} x^m = m(m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$; $\frac{d^{m+1}}{dx} x^m = 0$. 106.

Beweis: Unmittelbar aus 104.

Satz. $\frac{d^a}{dx} x^{-m} = (-1)^a \frac{(m+a-1)!}{(m-1)!} x^{-(m+a)}$ 107.

Beweis: Nach 104 ist $\frac{d}{dx} x^{-m} = -mx^{-m-1} = -mx^{-(m+1)}$

$$\frac{d^2}{dx} x^{-m} = -m \frac{d}{dx} x^{-(m+1)} = +m(m+1)x^{-(m+2)}$$

$$\frac{d^3}{dx} x^{-m} = -m(m+1)(m+2)x^{-(m+3)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx} x^{-m} &= (-1)^a m(m+1)\dots(m+a-1)x^{-(m+a)} \\ &= (-1)^a \frac{(m+a-1)!}{(m-1)!} x^{-(m+a)} \end{aligned}$$

Satz. $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$; 108.

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx} x^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}-1\right) \left(\frac{1}{n}-2\right) \dots \left(\frac{1}{n}-a+1\right) x^{\frac{1}{n}-a} \\ &= \frac{(-1)^{a-1} n(n-1)(2n-1)\dots((a-1)n-1)}{n^a x^{a-\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

Unmittelbar aus 104.

Satz. $\frac{d^a}{dx} x^{\frac{1}{n}} = (-1)^a \frac{(n+1)(2n+1)\dots((2a-1)n-1)}{n^a x^{a+\frac{1}{n}}}$ 109.

Beweis: Unmittelbar nach 104. 110.

Satz. $\frac{d}{dx} y^m = my^{m-1} \frac{d}{dx} y$

Beweis: Nach 95 ist

$$\frac{d}{dx} y^m = \left(\frac{d}{dx} y\right) \cdot \frac{d}{dy} y^m = my^{m-1} \frac{d}{dx} y \quad (\text{nach 103})$$

Es giebt dieser Satz zu den reichsten Anwendungen Anlass und bedarf daher reicher Uebungen. Sei z. B. zu nehmen

$$\frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} \left(a - \frac{b}{x^{1/2}} + (c^2 - x^2)^{2/3} \right)^{3/4}, \text{ so setze } y = \frac{b}{x^{1/2}}, \quad z = (c^2 - x^2)^{2/3}$$

$$\begin{aligned} \text{so ist } \frac{d}{dx} u &= \frac{d}{dx} (a - y + z)^{3/4} = \frac{3}{4} (a - y + z)^{3/4} - 1 \frac{d}{dx} (a - y + z) \\ &= \frac{3}{4} (a - y + z)^{-1/4} \left(-\frac{d}{dx} y + \frac{d}{dx} z \right) \end{aligned}$$

und wenn man hier $\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} \frac{b}{x^{1/2}} = \frac{d}{dx} b x^{-1/2} = -\frac{1}{2} b x^{-3/2}$

$$\frac{d}{dx} z = \frac{d}{dx} (c^2 - x^2)^{2/3} = \frac{2}{3} (c^2 - x^2)^{-1/3} \frac{d}{dx} (c^2 - x^2) = \frac{2}{3} (c^2 - x^2)^{-1/3} (-2x)$$

einsetzt, so erhält man

$$\frac{d}{dx} u = \frac{3 \frac{1}{2} b x^{-3/2} - \frac{4}{3} x (c^2 - x^2)^{-1/3}}{4 (a - b x^{-1/2} + (c^2 - x^2)^{2/3})^{1/4}}$$

Man kann in dieser Weise also auch von den verwickeltsten Folgen oder Funktionen die Diffe ableiten.

$$111. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{dx} \left(\sum a_n y^n \right) = \left(\frac{d}{dx} y \right) \left(\sum n a_n y^{n-1} \right)$$

Beweis: Unmittelbar aus 110 und 105.

$$112. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{dx} l_e x = \frac{1}{x}, \text{ wo } x = M(0[2]); \quad \frac{d}{dx} l_e y = \frac{\frac{d}{dx} y}{x}$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von dem neperschen Log von x ist gleich eins geteilt durch x und der Diff x vom Neperschen Log von y , wo y eine Folge (Funktion) von x ist, ist Diff x von y geteilt durch y .

Beweis: 1. Nach 56 ist, wenn $x^2 < 1$ ist

$$\log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots\right)$$

$$\text{und nach 66 ist } l_e(1+x) = \frac{1}{M} l(1+x) \text{ mithin}$$

$$l_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

und von beiden Seiten der Diff x genommen, ist nach 105

$$\frac{d}{dx} l_e(1+x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \dots$$

$$\text{Nach 48 ist aber } 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \dots = \frac{1}{1+x}$$

mithin ist

$$\frac{d}{dx} l_e(1+x) = \frac{1}{1+x} \text{ wo } x^2 < 1, \text{ mithin ist auch } \frac{d}{dx} l_e x = \frac{1}{x}, \text{ wo } x = M(0,2)$$

$$2. \text{ Nach n 95 ist } \frac{d}{dx} f_o y = \left(\frac{d}{dx} y \right) \frac{d}{dy} f_o y, \text{ also } \frac{d}{dx} l_e y = \left(\frac{d}{dx} y \right) \frac{1}{y} = \frac{\frac{d}{dx} y}{y}$$

Es muss hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass man nach 64 unter dem neperschen Log Zeichen l_e den Log der Base e versteht, wo $e = 2,718281828459045235$ ist. Der gemeine Log ist dagegen der Log der Base 10

Das Zeichen $M(0 \mid 2)$ bezeichnet, dass die GröÙe zwischen 0 und 2 liegen muss, diese GröÙen ausgeschlossen. Es kann dieser Satz auch leicht aus 91 und 91 bewiesen, wenigstens aber anschaulich gemacht werden, denn sei $\varphi_0 y$

die Folge von x , für welche $\frac{d}{dx} \varphi_0 y = \frac{d}{dx} \frac{y}{x}$ ist, so gilt für diese Folge das Gesetz $\frac{d}{dx} \frac{u v z}{u v z}$

$$= \frac{\frac{d}{dx} u}{u} + \frac{\frac{d}{dx} v}{v} + \frac{\frac{d}{dx} z}{z} + \dots \text{ mithin auch das Gesetz } \varphi_0 u v z \dots = \varphi_0 u + \varphi_0 v$$

$$+ \varphi_0 z + \dots \text{ Ebenso gilt für sie das Gesetz } \frac{\frac{d}{dx} \frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{\frac{d}{dx} u}{u} - \frac{\frac{d}{dx} v}{v} \text{ mithin auch das}$$

$$\text{Gesetz } \varphi_0 \frac{u}{v} = \varphi_0 u - \varphi_0 v.$$

Es sind aber die Loge oder Logarithmen die einzigen GröÙen, für welche diese Gesetze gelten, also ist $\varphi_0 u = l u$.

Satz. $\frac{d}{dx} l_a x = \frac{l_a e}{x} = \frac{1}{x l_{e a}}$, wo a die Base der Loge l_a ist und 113.

$$\frac{d}{dx} l_a y = \frac{l_a e}{y} \cdot \frac{d}{dx} y = \frac{1}{y \cdot l_{e a}} \cdot \frac{d}{dx} y.$$

Der Diff x von einem Log (Logarithmus) der Base a ist gleich dem Aloge (dem Loge der Base a) von e geteilt durch x oder gleich eins geteilt durch das Zeug (Produkt) aus x und dem Eloge von a .

Beweis: Es ist nach Zahlenlehre 360

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{e} \cdot \frac{e}{a}, \text{ d. h. } l_a x = (l_e x) l_a e$$

$$\begin{aligned} \text{mithin ist } \frac{d}{dx} l_a x &= \frac{d}{dx} l_e x \cdot l_a e = (l_a e) \frac{d}{dx} l_e x && \text{nach 112} \\ &= \frac{1}{x} l_a e. \end{aligned}$$

$$\text{Ferner ist nach Zahlenlehre 361 } \frac{e}{a} = \frac{e}{e} : \frac{a}{e} = \frac{1}{\frac{a}{e}}$$

$$\text{d. h. } l_a e = \frac{1}{l_e a}, \text{ also ist auch } \frac{d}{dx} l_a x = \frac{1}{x \cdot l_e a}.$$

$$\text{Satz. } \frac{d^n}{dx^n} l_a x = l_a e (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{x^n} \quad 114.$$

Beweis: Unmittelbar aus 113 und 104.

$$\text{Satz. } \frac{d^n}{dx^n} l_e (a + bx) = l_e e (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \frac{b^n}{(a + bx)^n} \quad 115.$$

Beweis: Man setze zunächst $(a + bx) = y$ und nehme nach 112 den Diff x

$$\frac{d}{x} l_e(a+bx) = (l_e e) \frac{\frac{d}{x}(a+bx)}{a+bx} = \frac{(l_e e)b}{a+bx} \quad \text{u. f. w.}$$

116. **Satz.** Es ist $\frac{d}{x} l_a l_a x = (l_a e)^2 \frac{1}{x \cdot l_a x}$ und $\frac{d}{x} l_e l_e x = \frac{1}{x \cdot l_e x}$

Der Diff x des Log vom Log von x ist gleich dem Quader des Logs von e geteilt durch das Zeug von x und dem Log von x , und für neperische Loge ist der Log von e gleich eins.

Beweis: Man setze $l_a x = y$, so ist nach Zahlenl. 360 $l_a y = l_e y \cdot l_a e$

$$\text{mithin } \frac{d}{x} l_y = \frac{d}{x} (l_e y) l_e = (l_e) \frac{d}{x} l_e y = (l_e) \frac{\frac{d}{x} y}{y} \quad (\text{nach 113})$$

und $\frac{d}{x} y = \frac{d}{x} l_x = \frac{l_e}{x}$, mithin, wenn man für y wieder l_x einsetzt

$$\frac{d}{x} l l_x = (l_e)^2 \cdot \frac{1}{x \cdot l_x}.$$

117. **Satz.** Es ist $\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a$ und $\frac{d}{x} a^y = a^y \cdot l_e a \cdot \frac{d}{x} y$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von der Stufengröße oder Exponentialgröße a^x ist gleich dieser Stufengröße mal dem neperischen Log von der Base der Stufengröße.

Beweis: Wir setzen zunächst $a^x = u$, dann ist nach 112

$$\frac{d}{x} l_e u = \frac{\frac{d}{x} u}{u} \quad \text{mithin } \frac{d}{x} l_e a^x = \frac{\frac{d}{x} a^x}{a^x}, \text{ also } \frac{d}{x} a^x = a^x \frac{d}{x} l_e a^x$$

Es ist aber $\frac{d}{x} l_e a^x = \frac{d}{x} x l_e a = l_e a$ (nach 86), mithin ist

$$\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a \quad \text{und nach n 95 auch } \frac{d}{x} a^y = \left(\frac{d}{y} a^y \right) \cdot \frac{d}{x} y = a^y (l_e a) \frac{d}{x} y.$$

118. **Satz.** $\frac{d}{x} e^x = e^x$. $\frac{d}{x} e^{ax} = a \cdot e^{ax}$.

Beweis: Unmittelbar aus 117, da $l_e e = 1$ ist, und wenn wir $ax = y$ setzen, $\frac{d}{x} y = a$ ist.

119. **Satz.** $\frac{d^m}{x} a^x = a^x (l_e a)^m$,

Beweis: Nach 117 ist $\frac{d}{x} a^x = a^x \cdot l_e a$, also $\frac{d^2}{x} a^x = a^x \cdot (l_e a)^2$ u. f. w.

120. **Satz.** $\frac{d^m}{x} e^x = e^x$. $\frac{d^m}{x} e^{ax} = a^m e^{ax}$

121. **Satz.** $e^{ax} = \sum \frac{(ax)^a}{a!}$

Beweis: Nach Satz 101 ist $f_0 y = \int \frac{y^a}{a!} \frac{d^a}{dx} f_0 x$, sofern für $\frac{d^a}{dx} f_0 x$ $x=0$ gesetzt wird, $y^2 < 1$ und $\frac{d^a}{dx} f_0 x$ endlich ist. Hier ist $\frac{d^a}{dx} e^x$ für $x=0$ nach 120 gleich $e^0 = 1$, setzen wir also $y = ax$, so erhalten wir $e^{ax} = \int \frac{(ax)^a}{a!}$.

Die Sätze 122 bis 124 werden im Folgenden nicht gebraucht und können daher überschlagen werden.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx} u^z = u^z \left(l_e u \cdot \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right) \quad 122.$$

Beweis: Setze $u^z = v$, so ist also $l_e v = z l_e u$, mithin

$$\frac{d}{dx} l_e v = \frac{d}{dx} z l_e u, \text{ also } \frac{\frac{d}{dx} v}{v} = (l_e u) \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \text{ nach 112; mithin}$$

$$\frac{d}{dx} v = v \left((l_e u) \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right) \text{ und, wenn } u^z \text{ für } v \text{ eingeführt wird.}$$

$$\frac{d}{dx} u^z = u^z \left((l_e u) \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right).$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx} u^t = u^t \left((l_e u^z) \frac{d}{dx} t + t (l_e u) \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right) \quad 123.$$

Beweis: Man setze $u^z = y$, so ist nach 122

$$\frac{d}{dx} u^t = \frac{d}{dx} y^t = y^t \left((l_e y) \frac{d}{dx} t + t \cdot \frac{\frac{d}{dx} y}{y} \right)$$

$$= u^t \left((l_e u^z) \frac{d}{dx} t + t \frac{\frac{d}{dx} u^z}{u^z} \right) \quad \text{mithin nach 122}$$

$$= u^t \left((l_e u^z) \frac{d}{dx} t + t (l_e u) \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right)$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx} u^{(z^t)} = u^{(z^t)} \cdot z^t \left((l_e u)(l_e z) \frac{d}{dx} t + t (l_e u) \frac{d}{dx} z + \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right) \quad 124.$$

Beweis: Man setze $z^t = y$, so ist nach 122

$$\frac{d}{dx} u^{(z^t)} = \frac{d}{dx} u^y = u^y \left((l_e u) \frac{d}{dx} y + y \cdot \frac{\frac{d}{dx} u}{u} \right)$$

$$= u^{(z')} \left((le u) \frac{d}{x} z^t + z^t \cdot \frac{d}{u} u \right) \quad \text{mithin nach 122}$$

$$= u^{(z')} \left[(le u) z^t \left((le z) \frac{d}{x} t + t \cdot \frac{d}{z} z \right) + z^t \frac{d}{u} u \right]$$

$$= u^{(z')} \cdot z^t \left((le u) (le z) \frac{d}{x} t + t (le u) \frac{d}{z} z + \frac{d}{u} u \right)$$

In Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* Paris 1797 und 1810—1819 ist das $\frac{d}{x} u^{(z')}$ mit dem $\frac{d}{x} u^{(z')}$ verwechselt und das letztere statt des erstern entwickelt.

125. **Satz.** $\frac{d}{x} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{x} \cos x = -\sin x$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von $\sin x$ ist gleich dem $\cosinus x$ und der von $\cosinus x$ ist gleich minus $\sinus x$.

Beweis: Nach 73 ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots =$$

$$\sum (-1)^a \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = \sum (-1)^a \frac{x^{2a}}{(2a)!}$$

wo $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (a-1) \cdot a$ ist.

Demnach ist, wenn man den Diff x von der Reihe der rechten Seite nach 105 nimmt

$$\frac{d}{x} \sin x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = \cos x$$

denn es ist z. B. $\frac{d}{x} \left(\frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) = \frac{5x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. f. w.

Ebenso folgt unmittelbar

$$\frac{d}{x} \cos x = -x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = -\sin x.$$

Ferner ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d}{x} (\sin x)^2 = 2 (\sin x) \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{d}{x} (\cos x)^2 = -2 (\cos x) \sin x = -\sin 2x.$$

126. **Satz.** $\frac{d^n}{x} \sin x = \sin \left(\frac{n}{2} \pi + x \right); \quad \frac{d^n}{x} \cos x = \cos \left(\frac{n}{2} \pi + x \right)$

Der nte Diff x von $\sin x$ ist der Sinus von $\frac{n}{2} \pi + x$ und ebenso der nte Diff x von $\cos x$ ist der Cosinus von $\frac{n}{2} \pi + x$.

Beweis: Aus 125 folgt unmittelbar

$$\frac{d}{x} \sin x = \cos x = \sin \left(\frac{1}{2} \pi - x \right) = \sin \left(\frac{1}{2} \pi + x \right) \text{ (nach Zahlenl. 460)}$$

$$\frac{d^2}{x} \sin x = \frac{d}{x} \cos x = -\sin x = \sin \left(\frac{2}{2} \pi + x \right) \quad \text{desgl.}$$

$$\frac{d^3}{x} \sin x = \frac{d}{x} (-\sin x) = -\cos x = \sin \left(\frac{3}{2} \pi + x \right) \text{ u. f. w.} \quad \text{desgl.}$$

Ebenso folgt der Beweis für $\cos x$.

$$\text{Satz. } \frac{d}{x} \tan x = \frac{1}{(\cos x)^2}; \quad \frac{d}{x} \cot x = -\frac{1}{(\sin x)^2} \quad 127.$$

Der Diff x (der Differentialquotient nach x) von Tangente x ist gleich eins geteilt durch das Quader des Cosinus x und der von Cotangente x ist gleich minus eins geteilt durch das Quader des Sinus x .

Beweis: Es ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ mithin nach 94

$$\begin{aligned} \frac{d}{x} \tan x &= \frac{(\cos x) \frac{d}{x} \sin x - (\sin x) \cdot \frac{d}{x} \cos x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 \quad \text{(nach Zahlenl. 467)} \end{aligned}$$

Und ebenso $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ mithin nach 94

$$\begin{aligned} \frac{d}{x} \cot x &= \frac{(\sin x) \frac{d}{x} \cos x - (\cos x) \cdot \frac{d}{x} \sin x}{(\sin x)^2} = \frac{-(\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2) \quad \text{(nach Zahlenl. 467)} \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x} \sec x = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}; \quad \frac{d}{x} \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} \quad 128.$$

Beweis: Ganz wie bei 127.

$$\text{Satz. } \frac{d}{x} \arcsin(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}; \quad \frac{d}{x} \arccos(x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \quad 129.$$

Beweis: Nach 125 und nach 95 ist

$$\frac{d}{x} \sin y = \cos y \frac{d}{x} y = (1 - (\sin y)^2)^{1/2} \frac{d}{x} y$$

Setzen wir hier $\sin y = x$, so ist $y = \arcsin x$ und wird die Formel

$$\frac{d}{dx} x = (1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \arcsin x, \text{ mithin da } \frac{d}{dx} x = 1 \text{ ist}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

$$\text{Und ebenso folgt } \frac{d}{dx} \arccos x = - \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

Ganz in gleicher Weise ergeben sich die folgenden Sätze.

$$130. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = - \frac{1}{1 + x^2}$$

$$131. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x(1 + x^2)^{1/2}}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = - \frac{1}{x(1 + x^2)^{1/2}}$$

$$132. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx} \log \sin x = \cot x; \quad \frac{d}{dx} \log \cos x = - \tan x.$$

$$\text{Beweis: Nach 112 ist } \frac{d}{dx} \log \sin x = \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\text{Und ist } \frac{d}{dx} \log \cos x = \frac{\frac{d}{dx} \cos x}{\cos x} = - \frac{\sin x}{\cos x} = - \tan x.$$

$$133. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx} \log \operatorname{cosec} x = - \cot x; \quad \frac{d}{dx} \log \sec x = \tan x.$$

$$\text{Beweis: Es ist } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \text{ also } \log \operatorname{cosec} x = - \log \sin x,$$

also ist

$$\frac{d}{dx} \log \operatorname{cosec} x = - \frac{d}{dx} \log \sin x = - \cot x. \quad \text{Ebenso } \frac{d}{dx} \log \sec x = \tan x.$$

$$134. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx} \log \tan x = \frac{1}{(\sin x) \cos x} = \frac{2}{\sin 2x};$$

$$\frac{d}{dx} \log \cot x = - \frac{1}{(\sin x) \cos x} = - \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\text{Beweis: Es } \frac{d}{dx} \log \tan x = \frac{\frac{d}{dx} \tan x}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x) \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Wir wollen nun zu der Betrachtung der Diffe von Folgen oder Funktionen einer Richtgröße $x + iy$ übergehen. Jede solche Folge hat die Form $F_0(x + iy) = \Phi_0 x + i\psi_0 y$, wo $\Phi_0 x$ und $\psi_0 y$ Realfolgen oder reelle Funktionen sind und zwei solche Folgen $F_0(x + iy)$ und $f_0(x + iy)$ sind nach Zahlenlehre 426 dann und nur dann gleich, wenn sowohl $\Phi_0 x = \varphi_0 x$, als auch $\psi_0 y = \psi_0 y$ ist.

Setzen wir nun $x + iy = z$ und $\frac{d}{dz} f_0 z = f_0' z$, so erhalten wir

$$\frac{d}{x} f_0 z = \left(\frac{d}{x} z\right) \frac{d}{z} f_0 z = \left(\frac{d}{x} (x + iy)\right) \frac{d}{z} f_0 z = \left(1 + i \frac{d}{x} y\right) \frac{d}{z} f_0 z = \frac{d}{z} f_0 z + i \left(\frac{d}{x} y\right) \frac{d}{z} f_0 z$$

$$\frac{d}{y} f_0 z = \left(\frac{d}{y} z\right) \frac{d}{z} f_0 z = \left(\frac{d}{y} (x + iy)\right) \frac{d}{z} f_0 z = \left(\frac{d}{y} x + i\right) \frac{d}{z} f_0 z = \left(\frac{d}{y} x\right) \frac{d}{z} f_0 z + i \frac{d}{z} f_0 z$$

Und ein Satz wird also nur dann für den Diff nach einer Richtgröße $x + iy$ gelten, wenn er sowohl für den Diff nach der ersten Größe, als auch für den Diff nach der zweiten Größe gilt. Dies führt uns zu dem folgenden Satze.

Erklärung. Wir fagen, ein Satz gelte für den Diff einer Folge 135.

einer Richtgröße nach dieser Größe $x + iy$ $F. (x + iy)$ dann und nur dann, wenn er einerseits für den Diff jener Folge nach der ersten Größe x gilt, und andererseits für den Diff jener Folge nach der zweiten Größe y gilt.

Die folgenden Sätze werden uns die Anwendung dieses Satzes auf die einzelnen Fälle lehren.

Satz. $\frac{d}{x + iy} (x + iy)^c = c (x + iy)^{c-1}$ * wo c eine reine Zahl 136.

Beweis: $(x + iy)^c = [r (\cos \alpha + i \sin \alpha)]^c$ (nach Z. 439)

$$= r^c (\cos c \alpha + i \sin c \alpha) \quad (\text{nach Z. 499})$$

wo $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ und $\tan \alpha = \frac{y}{x}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ (nach Z. 439)

Wir nehmen den Diff zuerst nach x und behandeln y als unveränderlich, dann ist

$$\frac{d}{x} (x + iy)^c = \frac{d}{x} r^c \cos c \alpha + i \frac{d}{x} r^c \sin c \alpha$$

$$= cr^{c-1} (\cos c \alpha) \frac{d}{x} r - cr^c (\sin c \alpha) \frac{d}{x} \alpha + i [cr^{c-1} (\sin c \alpha)] \frac{d}{x} r$$

$$+ cr^c (\cos c \alpha) \frac{d}{x} \alpha$$

und hier ist

$$\frac{d}{x} r = \frac{d}{x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\frac{d}{x} \alpha = \frac{d}{x} \arctan\left(\tan = \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{d}{x} \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \alpha}{r} \quad (\text{nach 129})$$

mithin ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (x + iy)^c &= cr^{c-1} (\cos c \alpha) \cos \alpha + cr^{c-1} (\sin c \alpha) \sin \alpha \\ &\quad + i [cr^{c-1} (\sin c \alpha) \cos \alpha - cr^{c-1} (\cos c \alpha) \sin \alpha], \\ &= cr^{c-1} [\cos (c-1) \alpha + i \sin (c-1) \alpha] \quad (\text{nach Z. 453}) \\ &= c (x + iy)^{c-1} \quad (\text{nach Z. 439})\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\frac{d}{dy} (x + iy)^c = i \cdot c (x + iy)^{c-1}$$

Der Satz gilt also ebenso für den $\frac{d}{dx} (x + iy)^c$, wie für den $\frac{d}{dy} (x + iy)^c$,
er gilt also nach 135 auch für den $\frac{d}{dx + iy} (x + iy)^c$.

137. **Satz.** $\frac{d^m}{dx + iy} (x + iy)^c = c(c-1) \cdots (c-m+1) (x + iy)^{c-m}$.
* wo c reine Zahl.

Beweis: Unmittelbar aus wiederholter Anwendung von Satz 136.

138. **Satz.** $\frac{d^m}{dx + iy} \sum a_n (x + iy)^n = \sum \frac{n!}{m(n-m)!} a_n (x + iy)^{n-m}$

139. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} (x + iy)^{-n} = -n (x + iy)^{-(n+1)}$;
 $\frac{d^a}{dx + iy} (x + iy)^{-n} = (-1)^a n(n+1) \cdots (n+a-1) (x + iy)^{-(n+a)}$

140. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} (x + iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} (x + iy)^{\frac{1}{n}-1}$
 $\frac{d^a}{dx + iy} (x + iy)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1} (n-1)(2n-1) \cdots ((a-1)n-1) (x + iy)^{\frac{1}{n}-a}$

141. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} (x + iy)^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n} (x + iy)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$;
 $\frac{d^a}{dx + iy} (x + iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a (n+1)(2n+1) \cdots ((a-1)n+1)}{n^a} (x + iy)^{-\left(a+\frac{1}{n}\right)}$

Alle diese Sätze folgen unmittelbar aus 135 und 136, wenn man
statt $c \alpha$, bez. $-n$, $\frac{1}{n}$ und $-\frac{1}{n}$ setzt.

142. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} e^{x+iy} = e^{x+iy}$ $\frac{d^m}{dx + iy} e^{x+iy} = e^{x+iy}$

Beweis: Nach Zahlenl. 521 ist $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$
mithin ist

$$\frac{d}{dx} e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^{x+iy}, \text{ da } y \text{ als constant betrachtet,}$$

(nach 118)

$$\frac{d}{y} e^{x+iy} = -e^x \sin y + i e^x \cos y = i e^{x+iy} \quad (\text{nach 125 und Z. 521})$$

$$\text{Satz. } \frac{d^m}{x+iy} e^{a(x+iy)} = a^m e^{a(x+iy)} \quad \frac{d^m}{x+iy} a^{x+iy} = (l_e a)^m \cdot a^{x+iy} \quad 143.$$

$$\text{Beweis: } \frac{d}{x+iy} e^{a(x+iy)} = \left(\frac{d}{x+iy} e^{a(x+iy)} \right) \frac{d}{x+iy} a^{x+iy} = a \cdot e^{a(x+iy)}$$

$$\frac{d^2}{x+iy} e^{a(x+iy)} = \frac{d}{x+iy} a \cdot e^{a(x+iy)} = a^2 e^{a(x+iy)} \text{ u. f. w. also auch}$$

$$\frac{d^m}{x+iy} e^{a(x+iy)} = a^m \cdot e^{a(x+iy)}$$

$$\text{Es ist aber } a = e^{l_e a} \text{ also } a^{x+iy} = e^{l_e a(x+iy)} \text{ mithin}$$

$$\frac{d^m}{x+iy} a^{x+iy} = \frac{d^m}{x+iy} e^{l_e a(x+iy)} = (l_e a)^m e^{l_e a(x+iy)} = (l_e a)^m a^{x+iy}$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x+iy} l_e(x+iy) \cong \frac{1}{x+iy}; \quad 144.$$

$$\frac{d^m}{x+iy} l_e(x+iy) \cong (-1)^{m-1} (m-1)! \frac{1}{(x+iy)^m}.$$

Beweis: Nach Zahlenlehre 535 ist:

$$l_e(x+iy) \cong \frac{1}{2} l_e(x^2+y^2) + i \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] \text{ wo } \frac{y}{x} \text{ echt,}$$

mithin ist nach 130

$$\frac{d}{x} l_e(x+iy) \cong \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} \quad (\text{nach Z. 432})$$

$$\frac{d}{y} l_e(x+iy) \cong \frac{y}{x^2+y^2} + i \frac{x}{x^2+y^2} = i \frac{x-iy}{x^2+y^2} = i \frac{1}{x+iy} \quad (\text{nach Z. 432})$$

2. Nach 137 ist

$$\frac{d^m}{x+iy} l_e(x+iy) \cong \frac{d^{m-1}}{x+iy} (x+iy)^{-1} = (-1)^{m-1} (m-1)! (x+iy)^{-m}$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x+iy} \sin(x+iy) = \cos(x+iy); \quad 145.$$

$$\frac{d}{x+iy} (\cos(x+iy)) = -\sin(x+iy)$$

$$\text{Beweis: Nach Zahlenl. 548 ist } \sin(x+iy) = (\sin x) \cos iy + (\cos x) \sin iy, \text{ wo } \cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ und } \sin iy = i \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \text{ also}$$

y als constant betrachtet

$$\frac{d}{x} \sin(x+iy) = (\cos x) \cdot \cos iy - (\sin x) \cdot \sin iy = \cos(x+iy)$$

(nach Z. 548)

$$\text{und ebenso } \frac{d}{y} \sin(x+iy) = \frac{d}{y} \left[(\sin x) \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i (\cos x) \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right]$$

$$= \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + i \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = i[(\cos x) \cdot \cos iy - i(\sin x) \sin iy]$$

$$= i \cos(x + iy) \quad (\text{nach Z. 548})$$

Ebenso folgt $\frac{d}{dx} \cos(x + iy) = -\sin(x + iy)$; $\frac{d}{dy} \cos(x + iy) = -i \sin(x + iy)$.

146. **Satz.** $\frac{d^m}{dx + iy} \sin(x + iy) = \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$;

$$\frac{d^m}{dx + iy} \cos(x + iy) = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$$

Beweis: Ganz wie zu Satz 126.

147. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} \tan(x + iy) = \frac{1}{(\cos(x + iy))^2}$

$$\frac{d}{dx + iy} \cot(x + iy) = -\frac{1}{(\sin(x + iy))^2}$$

Beweis: Entsprechend wie zu Satz 145.

148. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} \sec(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{(\cos(x + iy))^2}$

$$= (\tan(x + iy)) \sec(x + iy)$$

$$\frac{d}{dx + iy} \operatorname{cosec}(x + iy) = -\frac{\cos(x + iy)}{(\sin(x + iy))^2} = -(\cot(x + iy)) \operatorname{cosec}(x + iy)$$

Beweis: Entsprechend wie zu Satz 145.

149. **Satz.** $\frac{d}{dx + iy} \operatorname{Arc}(\sin = x + iy) \cong \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$

$$\frac{d}{dx + iy} \operatorname{Arc}(\cos = x + iy) \cong -\frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$$

Beweis: Ich werde den Beweis für $\operatorname{Arc}(\sin = x + iy)$ noch durchführen, für die andern Winkelfolgen ergibt er sich in entsprechender Weise.

Es sei $\operatorname{Arc}(\sin = x + iy) \cong \alpha + i\beta$,* so haben wir nach Z. 548 $\sin(\alpha + i\beta) = (\sin \alpha) \cos i\beta + (\cos \alpha) \sin i\beta$

$$\text{wo } \cos i\beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \quad \sin i\beta = i \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$$

$$\text{oder } \sin(\alpha + i\beta) = (\sin \alpha) \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + i(\cos \alpha) \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = x + iy$$

$$\text{also } x = (\sin \alpha) \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \quad **, \quad y = (\cos \alpha) \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \quad ***$$

Und wenn wir die Diffe in Bezug auf x nehmen von *, **, ***

$$\frac{d}{dx} \text{Arc}(\sin = x + iy) \cong \frac{d}{dx} \alpha + i \frac{d}{dx} \beta$$

$$1 = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} (\cos \alpha) \frac{d}{dx} \alpha + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} (\sin \alpha) \frac{d}{dx} \beta$$

$$0 = -\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} (\sin \alpha) \frac{d}{dx} \alpha + \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} (\cos \alpha) \frac{d}{dx} \beta$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \alpha = \frac{\frac{1}{2} (e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha}{\left[\frac{1}{2} (e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \right]^2}$$

$$\frac{d}{dx} \beta = \frac{\frac{1}{2} (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha}{\left[\frac{1}{2} (e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \right]^2}$$

Setzen wir hier

$$\frac{1}{2} (e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha = p \text{ und } \frac{1}{2} (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha = q, \text{ so ist}$$

$$\frac{d}{dx} \alpha = \frac{p}{p^2 + q^2} \text{ und } \frac{d}{dx} \beta = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

$$\text{und } \frac{d}{dx} \text{Arc}(\sin = x + iy) \cong \frac{d}{dx} \alpha + i \frac{d}{dx} \beta = \frac{p + iq}{p^2 + q^2} = \frac{1}{p - iq} \text{ (nach Z. 432)}$$

$$\cong \frac{1}{\frac{1}{2} (e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha - i \frac{1}{2} (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha}$$

$$\cong \frac{1}{(\cos i\beta) \cos \alpha - (\sin i\beta) \sin \alpha} \quad (\text{nach Z. 548})$$

$$\cong \frac{1}{\cos(\alpha + i\beta)} \quad (\text{nach Z. 548})$$

$$\cong \frac{1}{[1 - (\sin(\alpha + i\beta))^2]^{1/2}} \quad (\text{nach Z. 441})$$

$$\cong \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$$

Und ganz entsprechend ergibt sich

$$\frac{d}{dy} \text{Arc}(\sin = x + iy) \cong i \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}. \quad \text{Ebenso } \text{Arc} \cdot \cos.$$

Auch für den Arc gelten mithin alle die Gesetze für die Winkelgrößen oder komplexen Größen, welche wir bei den Zahlgrößen oder reellen kennen gelernt haben.

$$150. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{x+iy} \text{Arc}(\tan = x+iy) \cong \frac{1}{1+(x+iy)^2}$$

$$\frac{d}{x+iy} \text{Arc}(\cot = x+iy) \cong -\frac{1}{1+(x+iy)^2}$$

Beweis: Entsprechend wie zu 149.

$$151. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d}{x+iy} \text{Arc}(\sec = x+iy) \cong \frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{x+iy} \text{Arc}(\operatorname{cosec} = x+iy) \cong -\frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}}$$

Beweis: Entsprechend wie zu 149.

152. Satz. Alle Grundformeln für die Diffe gelten also ebenso für die Richtgrößen oder komplexen Größen wie für die reinen Zahlen oder reellen Größen.

153. Satz. Zu der Gleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$

$$\text{ist } \frac{d}{x} y = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} = 0$$

$$\frac{d^2}{x^2} y = a(a-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_2 + (a+1)a \dots 2a_{a+1} x + \dots$$

$$+ n \cdot (n-1) \dots (n-a) a_n x^{n-a} = 0.$$

Von jeder Gleichung n ten Grades von x ist der erste Diff x eine Gleichung $(n-1)$ ten Grades, der a te Diff x eine Gleichung $n-a$ ten Grades von x .

Beweis: Der Satz ergibt sich unmittelbar.

9. Die Eigenschaften für die Folgen der Zahlen- und Folgelehre.

Nachdem wir gelernt haben, aus einer ursprünglichen Folge oder Funktion die abgeleiteten Folgen oder die Diffe abzuleiten, so können wir nun zu der Aufgabe übergehen, die Eigenschaften der Folgen und die Bedeutung ihrer Diffe zu erörtern.

Wir haben oben in Nr. 15 bewiesen, dass jede Reinfoolge (reelle Funktion) von x , welche in den Grenzen von a bis b stets wächst, bez. stets abnimmt, wenn x wächst, innerhalb dieser Grenzen stetig ist, und haben in Nummer 28 bewiesen, dass diese Reinfoolge innerhalb dieser Grenzen einer echten steigenden Höhenreihe von x gleichgesetzt

werden kann, sofern $x^2 < 1$ und zugleich keine Vorzahl der Reihe unendlich ist. Diesen Satz werden wir im Folgenden zu Grunde legen, wo wir die Eigenschaften der Folgen untersuchen und namentlich feststellen wollen, wieweit jede Folge von x stetig und reell bleibt.

Wir haben ferner im Obigen festgestellt, dass man nie durch Null teilen dürfe, da man sonst zu den gefährlichsten Trugschlüssen gelangt. Nun geht aber, wenn x stetig von $-a$ bis $+a$ wächst, x durch Null hindurch, mithin geht, wenn $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $\frac{1}{0}$ und von $\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{a}$ wächst, die Folge $\frac{1}{x}$ durch $\frac{1}{0}$ hindurch. Wir fagen nun auch hier die Folge $\frac{1}{x}$ wachse stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$, wenn x stetig von $-a$ bis $+a$ wächst.

Erklärung. Wenn eine Gröſe x von $-a$ bis $+a$ stetig wächst, 154. so fagen wir, es wachse auch die Gröſe $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$.

Jede Reinforme (reelle Funktion) $f_0 x$ von x wächst aber stets mit wachsendem x , solange, als der erste Diff nach x von jener Folge eine Plusgröſe ist, sie bleibt also auch ebenso lange stetig; sie nimmt ferner stets mit wachsendem x ab, solange, als der erste Diff nach x von jener Folge eine Strichgröſe (negativ) ist. sie bleibt also auch hier ebenfolange stetig.

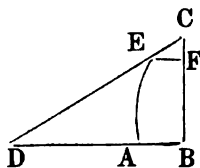
Die Stetigkeit der Reinforme kann also nur da unterbrochen werden, wo der erste Diff nach x von jener Folge sein Zeichen ändert, mit andern Worten, wo der erste Diff nach x von jener Folge entweder Null oder unendlich wird, d. h. wenn wir $y = f_0 x$ setzen, wo $\frac{d}{dx} y = 0$ wird, oder

wo $\frac{d}{dx} y = \frac{1}{0}$ und also nach 154 $\frac{1}{\frac{d}{dx} y} = 0$ wird. d. h. nach 96, wo $\frac{d}{dy} x = 0$ wird.

Satz. Jede Reinforme oder reelle Funktion $f_0 x$ von x bleibt solange 155. stetig, als der erste Diff nach x von dieser Folge sein Zeichen nicht ändert, und zwar wächst die Reinforme stetig mit wachsendem x , wenn dieser Diff eine Plusgröſe ist und nimmt die Reinforme von x mit wachsendem x stetig ab, wenn dieser Diff eine Strichgröſe ist.

Es ist wünschenswert, dass sich jeder von dieser Bedeutung des ersten Diff nach x von einer Folge von x , eine recht klare Vorstellung

156. Man kann nun für jede Folge von x , d. h. für $y = f_0 x$, eine Kurve zeichnen, welche ganz genau dieser Folge entspricht. Wir legen dabei rechtwinklige Koordinaten für x und y zu Grunde. Dann erhält für einen bestimmten Wert von x , d. h. für $x = AB$ auch $\frac{d}{x} y$ einen bestimmten Wert FC und zwar



ist, wenn wir an die Kurve eine Berührende (eine Tangente) CD ziehen, $\frac{d}{x} y = \frac{CF}{EF} = \frac{CB}{DB}$. Nennen wir den Winkel zwischen der Koordinate

DB und der Berührenden DC den Winkel ζ , so ist $\frac{d}{x} y = \tan \zeta$.

Für jeden Pluswert von $\frac{d}{x} y$ ist also ζ ein Winkel im ersten Kreisviertel oder Quadranten, d. h. ein echter Winkel, für jeden Strichwert von $\frac{d}{x} y$ hat $\tan \zeta$ einen Strichwert und ist also ζ ein Winkel im vierten oder zweiten Kreisviertel. Für $\frac{d}{x} y = 0$ ist $\tan \zeta$ und Winkel ζ gleich Null; für $\frac{d}{x} y = \frac{1}{0}$ ist Winkel ζ ein Rechter. Hiermit ist

auch sofort klar geworden, dass für $\frac{d}{x} y = 0$ die Kurve in dem entsprechenden Punkte gleichlaufend mit der Koordinate x , und für $\frac{d}{x} y = \frac{1}{0}$ oder für $\frac{d}{y} x = 0$ gleichlaufend mit der Koordinate y ist.

156. Erklärung. Besondere Werte der Reinforme von x heißen die Werte dieser Folge, für welche $\frac{d}{x} y$ bez. $\frac{d}{y} x$ gleich Null wird.

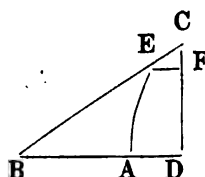
Um die weiteren Eigenschaften von $f_0 x$, namentlich auch die Eigenschaften der besondern Werte von $f_0 x$ kennen zu lernen, ist es wünschenswert die $f_0(x \pm v)$ nach 100 zu entwickeln, soweit $v^2 < 1$ und die $\frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$ alle endlich bleiben.

Es ist aber $f_0(x \pm v) = f_0 x \pm v \frac{\partial}{\partial x} f_0 x + \frac{v^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x + \dots = \sum \frac{(\pm v)^a}{a!} \frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$

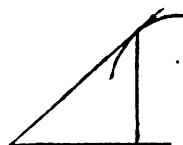
Hier kann man nun für jeden bestimmten Wert von x , für welchen nicht $\frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$ unendlich wird (und letzteres geschieht, wenn es überhaupt geschieht, nur für einige bestimmte Werte von x), die benachbarten Werte von $f_0 x$, sowie die Diffe von $f_0 x$ bestimmen und daraus die Eigenschaften der Folge von x ableiten.

Betrachten wir wieder, um anschaulich zu sein, eine Kurve mit rechtwinkligen Achsen, so giebt uns das erste Glied der Reihe $\pm v \frac{\partial}{\partial x} f_0 x$ den Winkel ζ ,

welchen die Berührende an dem bestimmten Punkte der Kurve mit der Achse von x macht und zwar ist $\tan \zeta = \frac{\partial}{\partial x} f_0 x$. Wir haben also für jeden bestimmten Wert von x durch den ersten Diff nach x von $f_0 x$ den Winkel, welchen die Kurve an dem bestimmten Punkte mit der x Achse bildet.



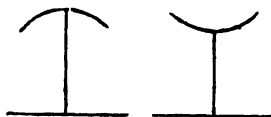
Das zweite Glied der Reihe $+\frac{v^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ gibt uns an, um wieviel die Kurve an dem bestimmten Punkte von der Berührenden abweicht. Ist hier $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ für den bestimmten Wert von x ungleich Null, so behält dies Glied für $+v$ und für $-v$ denselben Wert, d. h. die Kurve bleibt vor und nach dem bestimmten Werte von x an derselben Seite der Berührenden. Ist $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ eine Plusgröße, so ist $y = f_0 x$ für $x - v$ und für $x + v$ größer als für x d. h. die Kurve ist für den bestimmten Wert von x jenseit der Berührenden von der x Achse aus gerechnet. Ist $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ eine Strichgröße, so ist $y = f_0 x$ für $x - v$ und für $x + v$ kleiner als für x , d. h. diese Kurve ist für den bestimmten Wert von x diesseit der Berührenden von der x Achse aus gerechnet. Die Größe von $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ gibt den Krümmungshalbmesser des in diesem Punkte sich anschmiegenden (osculirenden) Kreises.



Wenn $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x = 0$ ist, so muss man die höhern Diffe $\frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$ entwickeln, und kommt es nun darauf an, ob in dem nächsten höhern Diff $\frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$, welcher ungleich Null ist, der Grad a gerade oder ungerade ist.

Ist der Grad a von $\frac{\partial^a}{\partial x^a} f_0 x$ gerade, so gilt Alles beim $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0 x$ Gefagte.

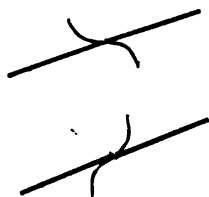
Sei also $a = 2c$, so ist das entsprechende Glied $+\frac{v^{2c}}{(2c)!} \frac{\partial^{2c}}{\partial x^{2c}} f_0 x$. Dies Glied hat denselben Wert für $x-v$ wie für $x+v$, die Kurve bleibt also auch hier vor und nach dem bestimmten Werte von x an derselben Seite der Berührenden und zwar bleibt sie, wenn der Diff $\frac{\partial^{2c}}{\partial x^{2c}} f_0 x$ eine Pluszahl ist, jenseit, wenn derselbe eine Strichzahl ist, diesseit der Berührenden von der x Achse aus gerechnet. Man nennt dies eine Fortbeugung (eine conflexio) der Folge $f_0 x$, und zwar die erstere eine erhabene, die zweite eine hohle Beugung.



Ist für den bestimmten Wert von x der erste Diff $\frac{\partial}{\partial x} f_0 x$ gleich Null ge-

und zwar ihren größten Wert, ihr Maximum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Strichzahl ist, dagegen ihren kleinsten Wert, ihr Minimum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Pluszahl ist.

Ist der Grad a von $\frac{d^a}{x} f_0 x$ ungerade und sei $a = 2c + 1$, so ist das entsprechende Glied $\pm \left(\frac{v^{2c+1}}{(2c+1)!} \frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x \right) = \pm \varphi_0 x$. Dies Glied hat also entgegengesetzten Wert für $x - v$ und für $x + v$; für $x - v$ ist es gleich $-\varphi_0 x$, für $x + v$ gleich $+\varphi_0 x$. Hier tritt also die Kurve vor und nach dem bestimmten Werte von x an verschiedene Seiten der Berührenden und zwar tritt sie, wenn der Diff $\frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x$ eine Strichzahl ist, von der jenseitigen nach der diesseitigen Seite der Berührenden über, dagegen tritt sie, wenn der Diff $\frac{d^{2c+1}}{x} f_0 x$ eine Pluszahl ist, von der diesseitigen nach der jenseitigen Seite der Berührenden über, wobei die diesseitige und jenseitige Seite der Berührenden von der x Achse aus gerechnet wird. Man nennt dies eine Umbeugung (eine inflexio) der Folge $f_0 x$ und zwar die erstere eine senkende, die zweite eine erhebende Umbeugung.



157.



Erklärung. Wenn bei einer Reinforme von x , d. h. $f_0 x$ für einen bestimmten Wert von x , für welchen die Diffe endlich bleiben und der erste höhere Diff, welcher ungleich Null ist,

$\frac{v^a}{a!} \frac{d^a}{x} f_0 x$ für $+v$ und $-v$ dasselbe Vorzeichen hat, so sagen wir, die Reinforme von x habe für diesen Wert von x eine Fortbeugung (conflexio) und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn jene Summe eine Strichgröße, dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn jene Summe eine Plusgröße ist.

158. **Satz.** Jede Reinforme (reelle Funktion) von x behält für jeden bestimmten Wert von x , für welchen die Diffe endlich bleiben und ausserdem der nächst höhere Diff ausser dem ersten, welcher ungleich Null ist, von geradem Grade $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ ist, eine Fortbeugung und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Strichzahl, dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f_0 x$ eine Pluszahl ist.

Satz. Jede Reinforme von x hat für einen bestimmten Wert 159.
 $x = a$ einen Grenzwert, d. h. einen größten oder kleinsten Wert,
 wenn, sofern alle Diffe endlich bleiben, der erste Diff nach x gleich
 Null ist, und der nächst höhere Diff, welcher ungleich Null ist, von
 geradem Grade $\frac{d^{2c}}{x} f. x$ ist. Und zwar hat die Reinforme ihren größten
 Wert, ihr Maximum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f. x$ eine Strichzahl, dagegen ihren
 kleinsten Wert, ihr Minimum, wenn $\frac{d^{2c}}{x} f. x$ eine Pluszahl ist.

Der Beweis für diese Sätze ist in der Vorentwicklung enthalten.

Erklärung. Wenn bei einer Reinforme von x d. h. $f. x$ für einen bestimmten
 Wert von x der erste höhere Diff, welcher
 ungleich Null ist, $\frac{v^a}{a!} \frac{d^a}{x} f. x$ für $+v$ und $-v$

entgegengesetzte Vorzeichen erhält, so fagen
 wir, die Reinforme von x habe für diesen Wert
 von x eine Umbeugung (inflexio) und zwar
 eine senkende Umbeugung, wenn jene
 Summe für $+v$ eine Strichgröße, dagegen
 eine erhebende Umbeugung, wenn jene Summe für $+v$ eine Plus-
 gröÙe ist.

Satz. Jede Reinforme (reelle Funktion) von x hat für jeden 161.
 bestimmten Wert von x , für welchen die Diffe endlich bleiben und
 auserdem der nächst höhere Diff auserdem dem ersten, welcher ungleich
 Null ist, von ungeradem Grade $\frac{d^{2c+1}}{x} f. x$ ist, eine Umbeugung und
 zwar eine senkende, wenn $\frac{d^{2c+1}}{x} f. x$ eine Strichzahl, dagegen eine
 erhebende, wenn $\frac{d^{2c+1}}{x} f. x$ eine Pluszahl ist.

Der Beweis für diesen Satz ist in der Vorentwicklung enthalten.

Nach dieser Betrachtung der Reinformen im Allgemeinen wenden wir uns
 nun zur Betrachtung der einzelnen Gattungen von Reinformen und zwar zunächst
 Betrachtung der Höhen und Höhenreihen der Veränderlichen.

Satz. Jede Höhe von x zu einer ganzen Stufe n ist stetig für 162.
 x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

Beweis: 1. Sei x eine Pluszahl, so wird, wenn auch n eine Plus-
 zahl ist, auch x^n nach Zahlenlehre 377 bei wachsendem x stets wachsen,

also ist die Folge x^n nach 15 eine stetige Folge für jede Pluszahl x . Sei n eine Strichzahl, also $n = -m$, wo m eine Pluszahl, so ist $x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$. Nun ist aber, wenn $x \geq 0$ ist $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ und ebenso $\left(\frac{1}{x}\right)^m \cdot x^m = 1$, mithin nimmt $\frac{1}{x}$ und ebenso $\left(\frac{1}{x}\right)^m$ stets ab, wenn x oder x^m wächst, also ist auch die Folge $\left(\frac{1}{x}\right)^m = x^n$ nach 15 eine stetige Folge, wenn auch n eine Strichzahl ist.

2. Sei x eine Strichzahl, also $x = -y$, wo y eine Pluszahl, so ist $y - y = 0$ d. h. es nimmt, wenn $-y$ wächst, $+y$ stets ab. Sei nun n eine gerade Zahl, so ist $(-y)^n = (+y)^n$ nach Zahlenlehre 330, mithin wenn $-y$ wächst, so nimmt $+y$ und nach 1 dieses Satzes auch $(+y)^n = (-y)^n$ stets ab, die Folge $(-y)^n = (+y)^n$ ist also nach 15 eine stetige Folge.

Sei dagegen n eine ungerade Zahl, so ist nach Zahlenlehre 330 $(-y)^n = -(+y)^n$, wenn also $-y$ wächst, so nimmt $+y$ und $(+y)^n$ stets ab, und wird also, da $(+y)^n - (+y)^n = 0$ ist, $(-y)^n$ stets wachsen, die Folge $(-y)^n$ ist also auch in diesem Falle nach 15 eine stetige Folge.

3. Uns bleibt nun noch der Fall zu betrachten, wenn $x = 0$ ist, dann ist, sofern n eine Pluszahl ist,

$x^n = 0$ und ist, so lange $a < n$ ist, $\frac{d^{n-a}}{dx} x^n = n(n-1) \cdot (n-a+1) x^{n-a} = 0$ und wird für $\frac{d^n}{dx} x^n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

d. h. die Folge wächst dann auch, wenn x wächst, die Folge bleibt also auch in diesem Falle stetig.

Wenn n eine Strichzahl, also $= -m$ ist, wo m eine Pluszahl, so ist $x^n = x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ also ist für $x = 0$

$x^n = x^{-m} = \frac{1}{0}$ und werden auf alle Diffe von x gleich $\frac{1}{0}$. Dann

ist aber $\left(\frac{1}{x}\right)^n = x^m$ und wächst stetig, auch wenn x Null wird, mithin ist auch x^n nach 159 stetig, wenn x Null wird.

163. Satz. Die Höhe von x zu einer ganzen Stufe n hat, wenn n eine Pluszahl ist, bei $x = 0$, wenn n eine Strichzahl ist, bei $\frac{1}{x} = 0$

eine Beugung und zwar ist diese Beugung bei ungeradem n eine Fortbeugung und bei geradem n eine Umbeugung.

Beweis: 1. Sei x eine Pluszahl, so ist, wenn n ungerade ist, nach Zahlenlehre 330 für $-x$ auch $(-x)^n = -(x)^n$ eine Strichgröße und für $+x$ auch $(+x)^n = +(x)^n$ eine Plusgröße, und es nimmt, wenn $-x$ wächst, d. h. sich dem Null nähert, auch $(-x)^n$ ab und nähert sich der Null, bis es für $x = 0$ auch Null wird; ebenso wächst, wenn $+x$ wächst, auch $(+x)^n$, es findet also die Folge bei $x = 0$ nach 157 eine Fortbeugung.

Wenn n gerade ist, so ist nach Zahlenlehre 330 für $-x$ dagegen $(-x)^n = +x^n$ eine Plusgröße, und ebenso für $+x$ auch $(+x)^n = +x^n$ eine Plusgröße. Wenn also $-x$ wächst und sich der Null nähert, nimmt $+x$ und ebenso die Plusgröße $+x^n$ ab und nähert sich der Null, bis endlich für $-x = 0$ auch $+x^n = 0$ wird, mit wachsendem $+x$ wächst dann auch wieder $+x^n$. Hier erfährt also die Folge bei $x = 0$ eine Umbeugung, d. h. sie geht von $+\infty$ bis 0 herab und steigt dann wieder von 0 bis $+\infty$.

2. Wenn n eine Strichzahl gleich $-m$ ist, wo m eine Pluszahl ist, so wird $x^n = x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ und hat also stets den umgekehrten Wert von x^m . Wenn demnach x^m stetig durch Null geht, so geht $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ stetig durch $\frac{1}{0}$, und beugt für diesen Wert ebenso, wie x^m , d. h. es findet für ungerades n eine Fortbeugung und für gerades n eine Umbeugung statt.

Satz. Jede Höhe einer Pluszahl zur gebrochenen Stufe, zur $\frac{m}{n}$ 164. Stufe ist stetig.

Beweis: Da x eine Pluszahl ist, so ist auch $x^{\frac{1}{n}} = y$ eine Pluszahl, und gilt für diese der Satz nach 163.

Satz. Wenn x und a_n Plusgrößen sind, so ist $\sum_{0,n} a_n x^n$ eine stetige 165.

Folge, sofern alle a_n endliche Werte haben und auch n endlich ist.

Beweis: Da für x auch x^n stetig ist, und auch a_n eine endliche Größe ist, so ist auch $a_n x^n$ eine Größe, welche stets wächst, wenn x wächst und ist also auch $\sum_{0,n} a_n x^n$ eine Größe, welche stets wächst, wenn x wächst, d. h. es ist nach 15 $\sum_{0,n} a_n x^n$ eine stetige Folge von x .

Wenn x eine Strichgröße wird $= -y$, so wird x^n für gerades n $(-y)^n = (+y)^n$, dagegen für ungerades n $(-y)^n = -(+y)^n$ und wechseln also in der $\sum_{0,n} a_n x^n$ die Glieder die Vorzeichen. Ebenso wenn a_n bald eine Pluszahl, bald eine Strichzahl ist, so wechseln gleichfalls die Glieder ihre Vorzeichen und kann die Folge $\sum_{0,n} a_n x^n$ die mannigfachsten Werte annehmen, je nachdem die Zeichen und Werte wechseln. Die Folge $\sum_{0,n} a_n x^n$ nennt man eine Gleichung n ten Grades von x ; dies führt uns also zur Betrachtung der Gleichungen.

Die Eigenschaften der Gleichungen n ten Grades.

Um diese Gleichungen bequem betrachten zu können, setzen wir $\sum_{0,n} a_n x^n = z$ und leiten für diese Folge von x die Diffe nach x von z ab. Wir setzen demnächst $z = y^m$ und leiten die Diffe nach x von y ab und betrachten demnächst die Eigenschaften der Gleichungen.

166. **Satz.** Für $z = \sum_{0,n} a_n x^n$ ist $\frac{d}{dx} z = \sum_{1,n} n a_n x^{n-1}$

$$\frac{d^2}{dx^2} z = \sum_{2,n} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \frac{d^c}{dx^c} z = \sum_{c,n} n(n-1) \cdots (n-c+1) a_n x^{n-c}$$

$$\text{Beweis: } z = \sum_{0,n} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

$$\frac{d}{dx} z = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{1,n} n a_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{2,n} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^c}{dx^c} z &= c(c-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 a_c + \cdots + n(n-1) \cdots (n-c+1) a_n x^{n-c} \\ &= \sum_{c,n} n(n-1) \cdots (n-c+1) a_n x^{n-c} \end{aligned}$$

Dieser Satz ist von größter Wichtigkeit für die Gleichungen und vereinfacht die letztern ungemein, da man bei den Gleichungen stets auf

$\frac{d}{dx} z$ und $\frac{d^2}{dx^2} z$ zurückgehen muss.

167. **Satz.** Wenn $y^m = z = \sum_{0,n} a_n x^n$ ist, so ist $y = z^{\frac{1}{m}}$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{\frac{d}{dx} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\frac{d}{dx} z}{z}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y = \frac{\frac{d^2}{dx^2} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1) \left(\frac{d}{dx} z \right)^2}{m^2 \cdot z^{2-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \left[\frac{\frac{d^2}{dx^2} z}{z} - \frac{(m-1)}{m} \frac{\left(\frac{d}{dx} z \right)^2}{z^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3}{x} y &= \frac{\frac{d^3}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right) \frac{d}{x} z}{m^2 \cdot z^2 - \frac{1}{m}} + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^2}{m^3 \cdot z^3 - \frac{1}{m}} \\
 &= \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \left[\frac{\frac{d^3}{x} z}{z} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right) \frac{d}{x} z}{m \cdot z^2} + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^2}{m^2 \cdot z^3} \right] \\
 \frac{d^4}{x} y &= \frac{\frac{d^4}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4 \frac{(m-1) \left(\frac{d^3}{x} z \right) \frac{d}{x} z}{m^2 \cdot z^2 - \frac{1}{m}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right)^2}{m^2 \cdot z^2 - \frac{1}{m}} \\
 &+ 6 \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right) \left(\frac{d}{x} z \right)^2}{m^3 \cdot z^3 - \frac{1}{m}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^4}{m^4 \cdot z^4 - \frac{1}{m}} \\
 &= \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \left[\frac{\frac{d^4}{x} z}{z} - 4 \frac{(m-1) \left(\frac{d^3}{x} z \right) \frac{d}{x} z}{m \cdot z^2} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right)^2}{m \cdot z^2} \right. \\
 &\left. + 6 \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right) \left(\frac{d}{x} z \right)^2}{m^2 \cdot z^3} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^4}{m^3 \cdot z^4} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } \frac{d}{x} y &= \frac{d}{x} z^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{d}{z} z^{\frac{1}{m}} \right) \frac{d}{x} z = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1} \frac{d}{x} z \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d}{x} z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{x} y &= \frac{d}{x} \frac{d}{x} y = \frac{d}{x} \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d}{x} z \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d^2}{x} z + \left(\frac{d}{z} \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \right) \left(\frac{d}{x} z \right)^2 \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d^2}{x} z - \frac{m-1}{m^2} \frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}} \left(\frac{d}{x} z \right)^2 \\
 \frac{d^3}{x} y &= \frac{d}{x} \frac{d^2}{x} y = \frac{d}{x} \left[\frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d^2}{x} z - \frac{m-1}{m^2} \frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}} \left(\frac{d}{x} z \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \frac{d^3}{x} z - \frac{m-1}{m^2} \frac{1}{z^{2-\frac{1}{m}}} \left(\frac{d^2}{x} z \right) \frac{d}{x} z - 2 \frac{m-1}{m^3} \frac{1}{z^{3-\frac{1}{m}}} \left(\frac{d^2}{x} z \right) \frac{d}{x} z \\
 &\quad + \frac{(m-1)(2m-1)}{m^3} \frac{1}{z^{3-\frac{1}{m}}} \left(\frac{d}{x} z \right)^3
 \end{aligned}$$

Man sagt nnn, die Gleichung sei aufgelöst, wenn die Werte von x gefunden sind, für welche

$$\sum_{0,n} a_n x^n = z = y^m = 0 \quad \text{also auch } y = 0$$

wird. Für diese Werte von x wird aber

$$\frac{d}{dx} y = \frac{\frac{d}{dx} z}{m y^{m-1}} = \frac{1}{0}, \text{ ebenso } \frac{d^a}{dx^a} y = \frac{1}{0}$$

oder da nach 96 $\frac{d}{dy} x = \frac{1}{\frac{d}{dx} y}$ ist, so wird für diese Werte $\frac{d}{dy} x = 0$, d. h. für diese

Werte ist die Kurve gleichlaufend mit der Yachse, oder sie steht senkrecht auf der Xachse und müssen daher die Diffe nach x von y , um von $y = 0$ zu endlichen Werten von $y > 0$ zu gelangen, unendlich werden. Für diese Diffe, wo $y = 0$,

ist aber die Betrachtung der Diffe $\frac{d}{dx} y$ ganz unbrauchbar und muss man sie von der Betrachtung ausschließen. Will man die Diffe für diese Punkte der Kurve

betrachten, so muss man entweder x als Folge von y entwickeln und dann $\frac{d^a}{dy^a} x$ entwickeln oder man muss, wenn $x = c$ eine Wurzel der Gleichung ist, die Gleichung für $x = c \pm h$ berechnen oder aber man muss $y^m = y'^m - a^m$ setzen,

dann wird $y'^m = a^m - z$, also $y' = (a^m - z)^{\frac{1}{m}}$ und ungleich Null.

Für die Betrachtung der Eigenschaften der Gleichungen nten Grades sind aber die Punkte dieser n Wurzeln auch meist von untergeordneter Bedeutung und kommt es vielmehr darauf an, die Eigenschaften der Gleichungen und Kurven für die Werte $x = a$ also gleich $0, 1, 2 \dots$ zu betrachten, für welche y nicht gleich Null wird. Es ergeben sich demnach folgende Sätze.

168. **Satz.** Bei jeder Gleichung $\sum_{0,n} a_n x^n = z = y^m$ kann man für jeden bestimmten Wert von x den Wert von z und von y , und ebenso von $\frac{d}{dx} z$ bis $\frac{d^c}{dx^c} z$ und auch von $\frac{d}{dx} y$ und $\frac{d^c}{dx^c} y$ ohne Weiteres ableiten, und daraus den Lauf der Kurve und die Art und GröÙe der Beugung für jeden Punkt der Kurve bestimmen.

Beweis: Unmittelbar.

169. **Satz.** Jede Gleichung nten Grades kann man, sofern nicht die Vorrzahl $a_n = 0$ ist, und also das letzte Glied fortfällt, auf die Form bringen

$y^m = z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$
und die n Wurzeln dieser Gleichung, welche z bez. y gleich Null machen, sind dann

$y^m = z = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) \dots (x - c_{n-1})(x - c_n)$ und giebt es keine weitem Werte von x , welche z und y gleich Null machen.

Beweis: Unmittelbar aus Zahlenlehre 571.

Satz. Für die n Wurzelwerte der Gleichung sind alle Diffe nach 170. x von y unendlich und kann man die benachbarten Werte für eine dieser Wurzeln c_a und die Eigenschaften der Kurve für diesen Punkt nur finden, wenn man entweder die Gleichung für $x = c_a \pm h$ entwickelt, oder wenn man $\frac{d}{dy} x$ entwickelt, oder wenn man $y^m = y^m + a^m$ setzt.

Beweis: Unmittelbar nach 157.

Um Beispiele für diese Berechnung zu geben, berechne ich drei Gleichungen nach dieser Methode, welche uns gleichzeitig drei Arten besonderer Werte kennen ehren: die Rückbeugung, den vielfachen Punkt und den abgeforderten Punkt.

Sei zunächst $(y - a)^2 = b^2 x^3$, also $y = a \pm b x^{3/2}$, so ist

$$\frac{d}{dx} y = \pm \frac{3}{2} b x^{1/2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y = \pm \frac{3}{4} b x^{-1/2} = \pm \frac{3}{4} \frac{b}{x^{1/2}}$$

Hier wird für $x = 0$

$$y = a \quad \frac{d}{dx} y = 0 \quad \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{1}{0}.$$

Ferner werden für $x = -h$

$$y = a \pm ibh^{3/2} \quad \frac{d}{dx} y = \pm \frac{3}{2} ibh^{1/2} \quad \frac{d^2}{dx^2} y = \mp \frac{3}{4} ib \frac{1}{h^{1/2}}$$

d. h. alle diese Folgen sind ohne reellen Wert oder imaginär. Dagegen werden für $x = +h$

$$y = a \pm bh^{3/2} \quad \frac{d}{dx} y = \pm \frac{3}{2} bh^{1/2} \quad \frac{d^2}{dx^2} y = \pm \frac{3}{4} \frac{b}{h^{1/2}}$$

d. h. Es hat y für $x = +h$ zwei Werte, einen größern als für $x = 0$ und einen kleinern, und für den erstern ist die Beugung nach oben, für den andern ist die Beugung nach unten, wie in der nebenstehenden Kurve. Man nennt dies eine Rückbeugung oder Reflexio. Das y hat hier für $x = 0$ seinen Grenzwert.

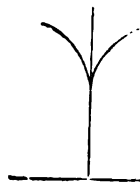
Entwickeln wir x als Folge von y , so ergibt sich unmittelbar $\left(\frac{y-a}{b}\right)^2 = x^3$ also

$x = \left(\frac{y}{b} - \frac{a}{b}\right)^{2/3}$ und setzen wir $\frac{y}{b} = y'$ $\frac{a}{b} = c$, so erhalten wir

$$x = (y' - c)^{2/3} \quad \frac{d}{dy'} x = \frac{2}{3} \frac{1}{(y' - c)^{1/3}} \quad \frac{d^2}{dy'^2} x = -\frac{2}{9} \frac{1}{(y' - c)^{4/3}}$$

Hier wird für $y' = c$

$$x = 0 \quad \frac{d}{dy'} x = \frac{1}{0} \quad \frac{d^2}{dy'^2} x = -\frac{1}{0}$$



Hier ist also für $y' = c$ die Berührende senkrecht auf der Y' achse, es ist $x = 0$ ein kleinster Wert oder ein Minimum, und ist für

$$y' = c \pm h \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} x = -\frac{2}{9} + \frac{1}{(\pm h)^{4/3}} = -\frac{2}{9} \frac{1}{h^{4/3}}$$

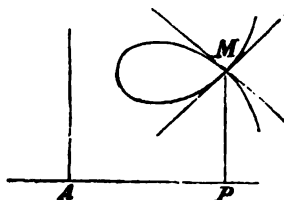
d. h. die krumme Linie hat ihre hohle Seite nach der Y' achse hin liegend.

Sei als zweites Beispiel $(y - b)^2 = (x - a)^2 (x - c)$ genommen, mithin

$$y = b \pm (x - a)(x - c)^{1/2} \quad \text{so ist} \quad \frac{\partial}{\partial x} y = \pm (x - c)^{1/2} \pm \frac{x - a}{2(x - c)^{1/2}}$$

Hier ist für $x = a$

$$y = b \quad \frac{\partial}{\partial x} y = \pm (x - c)^{1/2}$$



d. h. dem einfachen Werte von $y = b$ entsprechen

$$\text{zwei erste Diffe } \frac{\partial}{\partial x} y = \pm (x - c)^{1/2} \text{ und } \frac{\partial}{\partial x} y =$$

$$-(x - c)^{1/2} \text{ und bilden zwei Zweige der Werte}$$

y . Betrachten wir die entsprechende Kurve, so finden wir in dem Punkte $x = a$, $y = b$ den Durchschnitt zweier Zweige der Kurve. Man nennt diesen Punkt bei den Kurven einen vielfachen

Punkt.

$$\text{Sei endlich } y^2 = \frac{x^2(x - b)}{a}, \text{ also } y = \pm \left(\frac{x^2(x - b)}{a} \right)^{1/2}$$

$$\text{so ist } \frac{\partial}{\partial x} y = \pm \frac{x(3x - 2b)}{2(ax^2(x - b))^{1/2}} = \pm \frac{3x - 2b}{2(a(x - b))^{1/2}}$$

Hier ist für $x = 0$

$$y = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} y = \pm \frac{2b}{2(-ab)^{1/2}} = \pm i \frac{2b}{2(ab)^{1/2}}$$

d. h. es giebt für $x = 0$ und $y = 0$ keinen reellen Diff. Betrachten wir die entsprechende Kurve, so ist der Punkt für $x = 0$, $y = 0$ ein einzelner von der Kurve abgeforderter oder isolirter Punkt, auch conjugirter Punkt genannt, bei dem die Fortsetzung eine Jgröße oder imaginär geworden ist.

171. **Satz.** Für alle Werte von x ausser den n Wurzeln der Gleichung bleiben y^m und $z = \sum_{0,n} a_n x^n$ ungleich Null und alle Diffe nach x von y endlich und kann man die Sätze 157, 158, 160, 165, 166 ohne Weiteres anwenden.

172. **Satz.** Die Gleichung n ten Grades $y = z^{1/m} = \left[\sum_{0,n} a_n x^n \right]^{1/m}$ hat einen Grenzwert, d. h. ein Maximum oder Minimum für die Werte von x ungleich einer Wurzel, für welche der nächste Diff von $\frac{\partial^2}{\partial x^2} z$, welcher für diesen Wert von x ungleich Null wird, von geradem Grade $\frac{\partial^{2c}}{\partial x^{2c}} z$ ist. Und zwar ist der Wert von y ein grösster Wert,

wenn $\frac{d^{2c}}{x} z$ eine Strichzahl, dagegen ist derselbe ein kleinster Wert,

wenn $\frac{d^{2c}}{x} z$ eine Pluszahl ist.

Beweis: Soll der Wert von y für ein bestimmtes x ein Grenzwert sein, so muss nach 159 $\frac{d}{x} y = 0$, und sofern $\frac{d^{2c}}{x} y = 0$ ist, auch $\frac{d^{2c+1}}{x} y = 0$ sein und sofort, so dass der erste Diff nach x von y , welcher ungleich Null ist, von geradem Grade sein muss.

Nach 167 ist aber

$$\frac{d}{x} y = \frac{\frac{d}{x} z}{m \cdot y^{m-1}}, \quad \frac{d^2}{x} y = \frac{\frac{d^2}{x} z}{m \cdot y^{m-1}} - \frac{(m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^2 y^{2m-1}}$$

$$\frac{d^3}{x} y = \frac{\frac{d^3}{x} z}{m \cdot y^{m-1}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right) \frac{d}{x} z}{m^2 y^{2m-1}} + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^3}{m^3 y^{3m-1}} \text{ u. f. w.}$$

Hier ist, da x stets ungleich einer Wurzel ist, auch $y \geq 0$ und da auch $m \geq 0$ ist, so ist der Nenner stets ungleich Null, und wird also

$\frac{d^s}{x} y$ stets dann Null werden, wenn der Zähler Null wird, d. h. es

wird $\frac{d}{x} y = 0$, wenn $\frac{d}{x} z = 0$; es wird dann aber auch $\frac{d^2}{x} y = 0$,

wenn $\frac{d^2}{x} z = 0$ wird u. f. w.

Sei nun $\frac{d^{2c}}{x} y$ der erste Diff, der ungleich Null ist, so verschwinden in der Formel für denselben alle Glieder ausser dem ersten, da in jedem derselben mindestens eine der Größen $\frac{d}{x} z = 0$, $\frac{d^2}{x} z = 0$, $\frac{d^3}{x} z = 0$ $\frac{d^{2c-1}}{x} z = 0$ im Zähler vorkommt, und bleibt nur als erstes Glied

$$\frac{d^{2c}}{x} y = \frac{\frac{d^{2c}}{x} z}{m \cdot y^{m-1}} \text{ d. h. dies wird ungleich Null, wenn } \frac{d^{2c}}{x} z \geq 0 \text{ ist.}$$

Für $+y$ haben dann $\frac{d^{2c}}{x} y$ und $\frac{d^{2c}}{x} z$ gleiche Vorzeichen. Nach 159

wird also $+y$ ein gröster Wert, wenn $\frac{d^{2c}}{x} z$, also auch $\frac{d^{2c}}{x} y$ eine

Strichzahl ist und wird $+y$ ein kleinster Wert, wenn $\frac{d^{2c}}{x} z$ eine

Pluszahl ist.

Als Beispiel diene die Gleichung:

$$y^3 = z = a_0 - a_1 x + x^3$$

$$\frac{d}{dx} z = -a_1 + 3x^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z = 3 \cdot 2x$$

Hier ist für $\frac{d}{dx} z = 0$, $x^2 = \frac{1}{3} a_1^2$, $x = \pm a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$, $y = \left(a_0 \pm 2 \sqrt{\frac{1}{3}} a_1^3\right)^{1/3} > 0$.

Hier ist also y für $x = +a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum, für $x = -a_1 \sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Minimum.

173. **Satz.** Für alle Gleichungen n ten Grades $y^{\frac{1}{m}} = z = \sum_{0,n} a_n x^n$ gelten für alle bestimmten Werte von x , welche ungleich einer Wurzel sind, und für welche der erste Diff nach x von $y > 0$ ist, während die nächst höhern Diffe $\frac{d^2}{dx^2} y$, $\frac{d^3}{dx^3} y \dots \frac{d^c}{dx^c} y$ gleich Null sind, und der erste nächst höhere Diff, der ungleich Null ist $\frac{d^{c+1}}{dx^{c+1}} y$ ist, für alle diese Gleichungen gelten folgende Formeln

$$\frac{d}{dx} y = \frac{z^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{d}{dx} z}{m \cdot z}; \quad \frac{d}{dx} z > 0$$

$$\frac{d^c}{dx^c} y = 0; \quad \frac{d^c}{dx^c} z = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-c+1) \left(\frac{d}{dx} z\right)^c}{m^c z^c}$$

$$\frac{d^{c+1}}{dx^{c+1}} y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \left[\frac{\frac{d^{c+1}}{dx^{c+1}} z}{z} - \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-c) \left(\frac{d}{dx} z\right)^{c+1}}{m^{c+1} z^{c+1}} \right].$$

Beweis: Nach 167 ist

$$\frac{d}{dx} y = \frac{z^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot \frac{\frac{d}{dx} z}{z} \quad \text{und hier, wenn } \frac{d}{dx} y > 0 \text{ ist, auch } \frac{d}{dx} z > 0, \text{ da auch } z > 0.$$

$$\text{Ferner } \frac{d^2}{dx^2} y = \frac{\frac{d^2}{dx^2} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1) \left(\frac{d}{dx} z\right)^2}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}}; \quad \text{also, wenn } \frac{d^2}{dx^2} y = 0,$$

$$\text{so ist } \frac{\frac{d^2}{dx^2} z}{z} = \frac{m(m-1)}{m^2} \cdot \frac{\left(\frac{d}{dx} z\right)^2}{z^2}$$

$$\text{Ebenso } \frac{d^3}{x} y = \frac{\frac{d^3}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right) \frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} \\ + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^3}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}}$$

und wenn hier $\frac{d^3}{x} y = 0$ ist, so ergibt sich, wenn man den Wert für

$$\frac{d^3}{x} z \text{ einführt } \frac{\frac{d^3}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^3}{z^3}$$

Ebenso ist ferner

$$\frac{d^4}{x} y = \frac{\frac{d^4}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4 \frac{(m-1) \left(\frac{d^3}{x} z\right) \frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right)^2}{m^3 z^{2-\frac{1}{m}}} \\ + 6 \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right) \left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^4}{m^4 z^{4-\frac{1}{m}}}$$

und wenn hier $\frac{d^4}{x} y = 0$ ist, so ergibt sich, wenn man die Werte für

$\frac{d^3}{x} z$ und für $\frac{d^2}{x} z$ einführt

$$\frac{\frac{d^4}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m^4} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^4}{z^4}$$

Und so fort allgemein, wenn $\frac{d}{x} y > 0$, aber $\frac{d^a}{x} y = 0$ für $a = 2, 3, \dots, c$

$$\frac{\frac{d^c}{x} z}{z} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-c+1)}{m^c} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^c}{z^c}$$

2. Wenn $\frac{d}{x} y > 0$ und auch $\frac{d^2}{x} y > 0$ ist, so ist nach 157

$$\frac{d^2}{x} y = \frac{\frac{d^2}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \left[\frac{\frac{d^2}{x} z}{z} - \frac{m(m-1)}{m^2} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{z^2} \right]$$

Wenn $\frac{d}{x} y > 0$ ist und $\frac{d^2}{x} y = 0$, aber $\frac{d^3}{x} y > 0$ ist, so ist

$$\frac{d^3}{x} y = \frac{\frac{d^3}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right) \frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}}$$

und wenn man hier, da $\frac{d^2}{x} y = 0$ den Wert für $\frac{d^2}{x} z$ aus Teil 1 dieses Beweises einführt, so ist

$$\frac{d^3}{x} y = \frac{1}{z^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{\frac{d^3}{x} z}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^2}{z^2} \right]$$

Es ist ebenso, wenn $\frac{d}{x} y > 0$ und $\frac{d^4}{x} y > 0$, dagegen $\frac{d^2}{x} y = 0 = \frac{d^3}{x} y$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{x} y = & \frac{\frac{d^4}{x} z}{m \cdot z^{1-\frac{1}{m}}} - 4 \frac{(m-1) \left(\frac{d^3}{x} z\right) \frac{d}{x} z}{m^2 z^{2-\frac{1}{m}}} - 3 \frac{(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right)^2}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}} \\ & + 6 \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d^2}{x} z\right) \left(\frac{d}{x} z\right)^2}{m^3 z^{3-\frac{1}{m}}} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1) \left(\frac{d}{x} z\right)^4}{m^4 z^{4-\frac{1}{m}}} \end{aligned}$$

und wenn man hier den Wert für $\frac{d^2}{x} z$ und für $\frac{d^3}{x} z$ aus Teil 1 dieses Beweises, da $\frac{d^2}{x} y = 0$ und auch $\frac{d^3}{x} y = 0$ ist, einführt, so erhält man

$$\frac{d^4}{x} y = \frac{1}{z^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{\frac{d^4}{x} z}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m^4} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^4}{z^4} \right]$$

Und so fort allgemein, wenn $\frac{d}{x} y > 0$ ist, aber $\frac{d^2}{x} y = 0$ ist für $a = 2, 3 \dots c$, dagegen $\frac{d^{c+1}}{x} y > 0$ ist, so ist

$$\frac{d^{c+1}}{x} y = \frac{1}{z^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{\frac{d^{c+1}}{x} z}{m} - \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-c)}{m^{c+1}} \frac{\left(\frac{d}{x} z\right)^{c+1}}{z^{c+1}} \right]$$

Mit diesen Formeln kann man nun leicht alle Eigenschaften der Gleichungen nten Grades untersuchen.

174. **Satz.** Die Gleichung nten Grades $y^m = z = \sum_{0,n} a_n x^n$ hat für alle Werte von x , welche ungleich einer Wurzel sind, eine Fortbeugung, wenn der nächst höhere ausser dem ersten Diff nach x von y , welcher ungleich Null ist, von geradem Grade $2c$ ist und zwar eine hohle Fortbeugung, wenn der $\frac{d^{2c}}{x} y$ eine Strichzahl, dagegen eine erhabene Fortbeugung, wenn derselbe eine Pluszahl ist.

Beweis: Unmittelbar nach 157.

Satz. Die Gleichung n ten Grades $y^m = z = \sum_{0,n} a_n x^n$ hat für 175: hat für alle Werte von x , welche ungleich einer Wurzel sind, eine Umbiegung, wenn der nächst höhere ausser dem ersten Diff nach x von y , welcher ungleich Null ist, von ungeradem Grade $2t + 1$ ist und zwar eine senkende Umbiegung, wenn der $\frac{d^{2t+1}}{dx^{2t+1}} y$ eine Strichzahl, dagegen eine erhebende Umbiegung, wenn derselbe eine Pluszahl ist.

Beweis: Unmittelbar nach 160.

Einige Beispiele werden den leichten Gang dieser Untersuchung zeigen. Bemerket möge noch werden, dass wenn $\frac{d}{dx} z = 0$ ist, man stets auch die überaus einfachen Formeln von 171 anwenden kann.

Sei zunächst $y^3 = z = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} x - x^2 + 3x^3$, so wird

$$\frac{d}{dx} z = \frac{1}{9} - 2x + 9x^2 = \left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z = 2 \cdot 3 \left(3x - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 9 \left(x - \frac{1}{9}\right)$$

Setzen wir hier $x = \frac{1}{9}$, so wird

$$y^3 = z = \frac{28}{243} \quad \frac{d}{dx} z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dx^2} z = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3} z = 2 \cdot 9 \quad \text{und} \quad \frac{d^3}{dx^3} y = \frac{\frac{d^3}{dx^3} z}{3 y^{m-1}} = \frac{2 \cdot 3}{y^{m-1}}$$

d. h. für $+y$ findet hier eine erhebende Umbiegung statt.

Sei ferner $y^4 = z = 67 + 189x - 45x^2 - x^3 + x^4$

$$\text{so wird} \quad \frac{d}{dx} z = 189 - 90x - 3x^2 + 4x^3$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z = -90 - 6x + 12x^2$$

$$\frac{d^3}{dx^3} z = -6 + 24x$$

Setzen wir hier $\frac{d^2}{dx^2} z = 0 = -90 - 6x + 12x^2$, und also $x = 3$, so wird

$$y^3 = z = 463 \quad \frac{d}{dx} z = 0 \quad \frac{d^2}{dx^2} z = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3} z = 66 \quad \text{und} \quad \frac{d^3}{dx^3} y = \frac{\frac{d^3}{dx^3} z}{3 y^{m-1}} = \frac{22}{y^{m-1}}$$

d. h. für $+y$ findet auch hier eine erhebende Umbiegung statt.

Nach dieser Behandlung der Gleichungen wenden wir uns nun zur Betrachtung der höhern Folgen:

Die Stetigkeit der Stufenfolgen, Loge, Winkelfolgen
und Bogenfolgen.

176. **Satz.** Die Stufenfolge oder die Exponentialfunktion von x a^x ist stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich, sofern a eine Pluszahl ungleich eins ist.

Beweis: Wenn $a > 1$ ist, so wächst mit x auch stets a^x nach Zahlenlehre 378, also ist auch a^x eine stetige Folge von x nach 15. Wenn $a < 1$ ist, so ist $\frac{1}{a} > 1$ und sei $\frac{1}{a} = b$, so ist $a^x = b^{-x}$ d. h. mit wachsendem x nimmt b^{-x} stets ab, also ist gleichfalls a^x eine stetige Folge nach 15. Ueberdies hat diese Folge nicht besondere Werte, da $\frac{d}{dx} a^x = a^x$ stets ungleich Null bleibt.

177. **Satz.** Der Log oder Logarithmus nach der Base a von x $\lg_a x$ ist stetig für jedes x grösser als Null, sofern a eine Pluszahl ungleich eins ist.

Beweis: Wenn $a > 1$ ist, so wächst nach Zahlenlehre 378 auch $\lg_a x$ stets mit wachsendem x , also ist auch $\lg_a x$ eine stetige Folge von x nach 15. Wenn $a < 1$ ist, so ist $\frac{1}{a} > 1$ und sei $\frac{1}{a} = b$, so ist $\lg_a x = -\lg_b x$ d. h. mit wachsendem x nimmt $-\lg_b x$ stets ab, also ist gleichfalls $\lg_a x$ eine stetig Folge von x nach 15. Ueberdies hat diese Folge nicht besondere Werte, da $\frac{d}{dx} \lg_a x = \frac{1}{x \lg_a a}$ nach 113 ist und stets ungleich Null bleibt.

178. **Satz.** Der Sin und der Cos von x sind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

Beweis: 1. Der Sin von x wächst nach Zahlenlehre 459 mit wachsendem x stets von $x = \left(2a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ und er nimmt mit wachsendem x stets ab von $x = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(2a + 1\frac{1}{2}\right)\pi$, er ist also nach 15 stetig für jeden Wert von x . Der Sin von x bleibt dabei in den Grenzen zwischen -1 und $+1$. Für $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ ist $\sin x = \pm 1$ und ist $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ für diesen Wert gleich Null, dagegen $\frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x$ für diesen Wert $= \mp 1$ also ungleich

Null. Der $\sin x$ hat also an diesen Punkten nach 157. sein Maximum bez. sein Minimum, kurz seine Fortbeugung.

2. Der $\cos x$ wächst nach Zahlenlehre 459 mit wachsendem x stets $x = (2a - 1)\pi$ bis $-2a\pi$ und er nimmt mit wachsendem x stets von ab von $x = 2a\pi$ bis $(2a + 1)\pi$; er ist also nach 15 stetig für jeden Wert von x . Auch er bleibt wie der Sin in den Grenzen zwischen -1 und $+1$ und hat sein Maximum bei $x = 2a\pi$ und sein Minimum bei $x = (2a + 1)\pi$.

Satz. Die Tan. und die Cot. von x sind stetig für x von Strich- 179. unendlich bis Plusunendlich.

Beweis: 1. Die Tan x wächst nach Zahlenlehre 474 mit wachsendem x stets von $x = \left(a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ und zwar wächst dabei

Tan x von $-\infty$ bis $+\infty$ oder von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$. Für den Wert

von $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ geht es dann von $+\frac{1}{0}$ in $-\frac{1}{0}$ über und wächst

dann wieder mit wachsendem x stets von $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x =$

$\left(a + 1 + \frac{1}{2}\right)\pi$ und so weiter. Die tan x ist also nach 15 für

$x = \left(a - \frac{1}{2}\right)\pi$ bis $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$ stetig. Aber auch für die

Werte $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi$, wo $\tan x = \pm \frac{1}{0}$ ist, ist die Folge nach

692 stetig, denn setzen wir $y = \tan x$, so ist $\frac{1}{y} = \cot x$, und diese ist

für $x = \left(a + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$ und ist für diesen Wert stetig.

2. Die cot x nimmt nach Zahlenl. 474 mit wachsendem x stets ab von $x = a\pi$ bis $x = (a + 1)\pi$ und zwar nimmt die cot x ab von $+\infty$ bis $-\infty$, sie ist also nach 15 für $x = a\pi$ bis $x = (a + 1)\pi$ stetig.

Aber auch für die Werte $x = a\pi$, wo $\cot x = \pm \frac{1}{0}$ wird, ist sie

nach 154 stetig, da für diesen Wert $\tan x = \frac{1}{\cot x} = 0$ ist.

Satz. Die Sec x und die Cosec x sind stetig für x von Strich- 180. unendlich bis Plusunendlich.

Beweis: Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Da nun nach 179 $\sin x$ und $\cos x$ stetig sind für x von Strichunendlich bis Plusunendlich, so sind auch $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$ nach 155 innerhalb der gleichen Grenzen stetig.

Satz. Der \arcsin ($\sin = x$), und der \arccos ($\cos = x$) sind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

Beweis: 1. Sei $y = \arcsin(\sin = x)$, also $x = \sin y$, so wächst nach Zahlenlehre 459, wenn $x = \sin y$ von -1 bis $+1$ wächst, y stets von $(2a - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2a + \frac{1}{2})\pi$, ebenso wenn $x = \sin y$ von $+1$ bis -1 abnimmt, wächst y stets von $(2a + \frac{1}{2})\pi$ bis $(2a + 1\frac{1}{2})\pi$ es ist also nach 15 $y = \arcsin(\sin = x)$ eine stetige Folge von $(2a - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2a + \frac{1}{2})\pi$ und ebenso von $(2a + \frac{1}{2})\pi$ bis $(2a + 1\frac{1}{2})\pi$. Es ist aber auch $\arcsin(\sin = x)$ für die Werte $x = \pm 1$ stetig, da dann $\arcsin(\sin = x) = (2a \pm \frac{1}{2})\pi$ ist, also ist $\arcsin(\sin = x)$ stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

2. Ebenso folgt der Satz für $\arccos(\cos = x)$.

182. **Satz.** Der \arctan ($\tan = x$) und der arccot ($\cot = x$) sind stetig für x von Strichunendlich bis Plusunendlich.

Beweis: Ganz wie zu 181.

183. **Satz.** Der arcsec ($\sec = x$) und der $\operatorname{arccosec}$ ($\operatorname{cosec} = x$) sind stetig für x von Strichunendlich bis Strichunendlich und von Plusunendlich bis Plusunendlich.

Beweis: Ganz wie zu 181.

184. **Satz.** Jede Reihenfolge (komplexe Funktion) von x $F(x, i) = \varphi, x + i\psi$ ist stetig, wenn die beiden Reihenfolgen φ, x und ψ, x stetig sind.

Beweis: Unmittelbar aus 16.

10. Die Integrale und die Integren der Diffe oder der Differentialquotienten.

Die nächste Aufgabe der Folgelehre oder Funktionenlehre ist es, für die Diffe oder Differentialquotienten der Formeln der Zahlenlehre oder niedern Analysis wieder die ursprüngliche Folge oder Funktion

aufzufuchen, von welcher der Diff oder der Differentialquotient dieser Folge abgeleitet ist. Johannes Bernoulli hat diese Aufgabe 1691 in seinem Werke: *Lectiones mathematicae de methodo integralium* zuerst gelöst und hat diesem Zweige den Namen der Integralrechnung, des *calculus integralis*, gegeben. Er ist der Erfinder der Integralrechnung, und hat auch bereits die wichtigsten Sätze derselben aufgestellt.

Wenn man die Ableitung des Diffs von einer Formel der Zahlenlehre eine Knüpfung nennt, so bildet die Integralrechnung, d. h. das Auffuchen der ursprünglichen Formel zu einem gegebenen Diffe (Differentialquotienten) die jener Knüpfung entsprechende Zerlegung. Bei jeder Zerlegung muss man aber, wie wir in Zahlenlehre 44 sahen, zwei Gattungen unterscheiden: Die Trennung und die Lösung. Bei der Trennung durfte es nur eine Formel geben, welche der Knüpfung entsprach; bei der Lösung dagegen konnte es beliebig viele, ein ganzes Gebiet von Formeln geben, welche derselben Knüpfung entsprachen.

Bei der Ableitung der Diffe giebt es nun in fast allen Fällen unzählig viele ursprüngliche Folgen oder Integrale, welche demselben Diffe entsprechen. Nach Satz 103 ist $\frac{d^{m+1}}{dx} x^m = 0$ und ebenso $\frac{d^{m+n}}{dx} x^m = 0$.

Es ergeben also z. B. alle Formeln $\sum_{0,m} a_n x^n$
 $= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a^m x^m$ nach 103 denselben Diff
 $\frac{d^m}{dx} \left(\sum_{0,m} a_n x^n \right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot a_m = m! a_m$, was auch $a_0, a_1 \dots a_{m-1}$
für Werte habe mögen. Die Integralrechnung ist also eine Lösung, wo demselben gegebenen Diffe unendlich viele Integrale entsprechen. Man hat für das Integral das Zeichen \int eingeführt, aber nicht hinzugefügt, nach welcher Gröse integrirt werden soll, d. h. welche Gröse hier als die Veränderliche anzusehen ist. Um dies zu bezeichnen, setzt man hinten ein dx hinzu z. B. $\int adx$; da man aber $dx = 0$ setzt, so ist diese Bezeichnung fehlerhaft, denn man könnte dann $\int adx = 80$ und dies würde stets Null ergeben. Ich führe daher das Zeichen \int_x ein, gelesen Integral nach x , z. B. $\int_x a = w_0 + ax$. Für die höhern Integrale entbehrt man jetzt noch eines Zeichens. Ich bezeichne daher mit \int_x^m das m te Integral nach x und bezeichne mit w_a eine zur Höhe x^a gehörige willkürliche Beständige oder Konstante, so ist

$\sum a_m = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{a_m x^m}{m!}$. Die Integral-

rechnung hat daher auch alle Schattenseiten jeder Lösung. Man kann nicht einmal zwei Integrale desselben Diffs einander gleich setzen, da ja $a_0, a_1 \dots a_{m-1}$ in beiden ganz verschiedene Werte haben können. Das einem Differentialquotienten entsprechende Integral ist also eine mehrwertige GröÙe, welche unendlich viele Werte haben kann; es gilt daher für die Integrale kein einziges Gesetz der Formenlehre.

Die Herren Mathematiker oder Formenlehrer haben diesem Uebelstande dadurch abzuhelpen gesucht, dass sie die bestimmten Integrale einführten, d. h. sie schafften bei der Integration des ersten Differentialquotienten die willkürliche Konstante dadurch fort, dass sie das Integral für $x = a$ von dem Integrale für $x = b$ abzogen, also x nur von a bis b ändern liesen. So ist, wenn wir mit dem Zeichen $\sum_{x=a}^b$ das Integral von a bis b bezeichnen $\sum_{x=a}^b = w_1 (b - a) + w_2 (b^2 - a^2) + \dots$

$+ w_{m-1} (b^{m-1} - a^{m-1}) + \frac{a_m}{m!} (b^m - a^m)$ und sind also alle willkürlichen konstanten $w_1, w_2 \dots w_{m-1}$ geblieben und ist allein die willkürliche GröÙe w_0 durch das Abziehen entfernt. Diese Einführung der bestimmten Integrale schafft also die willkürliche Konstante für das Glied w_0 fort und kann für das erste Integral benutzt werden, wenn es auch für dies Integral sehr unbequem und weitläufig ist; dagegen ist es für höhere Integrale ganz unbrauchbar und kann die willkürliche Konstanten nicht entfernen.

Will man daher zu einer streng wissenschaftlichen und allgemeinen Behandlung der ursprünglichen Folgen gelangen, so muss man einen ganz andern Weg einschlagen und für jeden Diff eine, aber auch nur eine bestimmte ursprüngliche Folge aufstellen, der Art, dass es nur eine solche ursprüngliche Folge giebt, welche demselben Diffe entspricht, welche mithin einwertig ist und für welche demnach sämtliche Gesetze der GröÙenknüpfung, der Zahlenlehre und der Folgenlehre gelten. Ich nenne diese einwertige ursprüngliche Folge die integrale Folge oder kurz die Integre. Die einwertige Integre unterscheidet sich dann vom vielwertigen Integrale ganz so wie die einwertige Funktion oder Folge vom vielwertigen Funktional oder Gefolge. Da man in dem vielwertigen Integrale jeder willkürlichen Konstante jeden beliebigen Wert

geben kann, so gebe ich sämtlichen willkürlichen Konstanten für die Integre den Wert Null, d. h. ich lasse die sämtlichen willkürlichen Konstanten für die Integre verschwinden und behalte also nur eine einwertige Funktion, im obigen Beispiele also nur $\frac{a_m x^m}{m!}$. Für die mte Integre nehme ich das Zeichen $\frac{d^{-m}}{x}$. Im obigen Beispiele ist also $\frac{d^{-m}}{x} a_m = \frac{a_m x^m}{m!}$ und ist $\sum a_m = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{d^{-m}}{x} a_m$

Dies ist denn auch die allein wissenschaftliche Behandlung der Sache. Ein Beispiel wird uns dies klar machen. Betrachten wir den Fall eines Körpers. Setzen wir den Punkt, von wo er fällt, als Anfangspunkt d. h. $w_0 = 0$; nehmen wir die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich Null, d. h. da jeder Körper, der in Bewegung ist, in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft, setzen wir, wenn x die Zeit bezeichnet, $w_1 x = 0$, setzen wir endlich die Schnelligkeit, welche die Anziehung der Erde einem Körper in einer Sekunde giebt, gleich g , so ist, wenn y den Weg bezeichnet, den der Körper in x Sekunden durchläuft $\frac{d^2}{x} y = g$ und $\frac{d^{-2}}{x} g = \frac{g x^2}{1.2}$ also unfre Integre.

Dagegen ist das vielwertige Integral $\sum^2 g = w_0 + w_1 x + \frac{g x^2}{1.2}$ und bezeichnet hier w_0 , wie weit der Anfangspunkt des Falles vom Anfangspunkt des y , und w_1 , wie gros die Geschwindigkeit in jeder Sekunde bereits war, als die Anziehung der Erde auf den Körper zu wirken begann. Die Integre giebt uns also ganz ungetrübt die Einwirkung der Erdanziehung; sie allein ist abhängig von der GröÙe dieser Anziehung in der Zeiteinheit g und der Zeit der Einwirkung x ; die beiden willkürlichen Konstanten w_0 und w_1 sind hier Null gesetzt. Man sieht schon hieraus, wie wichtig es ist, die Integre und das Integral zu unterscheiden. Jeder, der selbständig die Sache prüft, muss zu demselben Ergebnisse gelangen. Nach diesen Bemerkungen gehe ich zur Integralrechnung selbst über.

Erklärung. Das erste Integral nach x von einer abgeleiteten 185. Folge von x $f. x$ (gewöhnlich kurz das Integral von $f. x$ genannt) heist die Gesamtheit der Folgen von x , deren erster Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist.

Das Zeichen des ersten Integrals nach x ist $\sum^1 f. x$ (gewöhnlich kurz $\int f. x$).

186. **Erklärung.** Das m te Integral nach x von einer abgeleiteten Folge von x heist die Gefammtheit der Folgen von x , deren m ter Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist.

Das Zeichen des m ten Integrals nach x ist $\frac{\int^m}{x}$ gelesen m tes Integral nach x von. Die willkürliche Beständige oder Constante, welche Vorzahl zu x^0 ist, bezeichnen wir durch w_0 .

187. **Satz.** Das m te Integral nach x von $f \cdot x$ hat m willkürliche Beständige oder Konstante, nämlich die willkürlichen $w_0, w_1 \dots w_{m-1}$ oder es ist $\frac{\int^m}{x} f \cdot x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \varphi \cdot x$ wo $\varphi \cdot x$ die ursprüngliche Funktion von $f \cdot x$ ist, sofern in ersterer alle Vorzahlen von $x^0, x^1 \dots x^{m-1}$ gleich Null gesetzt werden.

Beweis: Die Folge $w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \varphi x$ giebt nach 105 zum m ten Diff oder Differentialquotienten $\frac{d^m}{x} \varphi x = f \cdot x$.

188. **Erklärung.** Die m te Integre nach x von einer abgeleiteten Folge von x heist die einwertige Folge von x , deren m ter Diff oder Differentialquotient jene abgeleitete Folge von x ist, sofern in der erstern alle Vorzahlen von $x^0, x^1 \dots x^{m-1}$ gleich Null gesetzt werden.

Das Zeichen der m ten Integren nach x ist $\frac{d^{-m}}{x}$ gelesen „ m te Integre nach x von“.

189. **Satz.** $\frac{d^m}{x} \frac{d^{-m}}{x} f \cdot x = f \cdot x = \frac{d^m}{x} \frac{\int^m}{x} f \cdot x$.

190. **Satz.** Wenn $\varphi \cdot x$ die m te Integre von $\frac{d^m}{x} \varphi \cdot x$ ist, so ist

$$\frac{d^{-m}}{x} \frac{d^m}{x} \varphi \cdot x = \varphi \cdot x = \frac{d^m}{x} \frac{d^{-m}}{x} \varphi \cdot x$$

Beweis: Unmittelbar nach 188 und nach 189.

191. **Satz.** $\frac{\int^m}{x} f \cdot x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{d^{-m}}{x} f \cdot x$

Beweis: Unmittelbar nach Satz 187.

192. **Satz.** $\frac{d^{-m}}{x} (f_1 x + f_2 x + f_3 x + \dots) = \frac{d^{-m}}{x} f_1 x + \frac{d^{-m}}{x} f_2 x + \frac{d^{-m}}{x} f_3 x + \dots$

Beweis: Seien $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x \dots$ die m ten Integren von $f_1 x, f_2 x, f_3 x, \dots$; also $\varphi_1 x = \frac{d^{-m}}{x} f_1 x, \varphi_2 x = \frac{d^{-m}}{x} f_2 x,$

$\varphi_3 x = \frac{d^{-m}}{x} f_3 x \dots$ so ist $\frac{d^m}{x} (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \dots)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d^m}{x} \varphi_1 x + \frac{d^m}{x} \varphi_2 x + \frac{d^m}{x} \varphi_3 x + \dots \\
 &= f_1 x + f_2 x + f_3 x + \dots
 \end{aligned}
 \quad (\text{nach 88})$$

Es ist demnach auch

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{-m}}{x} (f_1 x + f_2 x + f_3 x + \dots) &= \frac{d^{-m}}{x} \frac{d^m}{x} (\varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \dots) \\
 &= \varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \dots (\text{nach 190}) \\
 &= \frac{d^{-m}}{x} f_1 x + \frac{d^{-m}}{x} f_2 x + \frac{d^{-m}}{x} f_3 x + \dots
 \end{aligned}$$

Satz. Es ist $\frac{d^{-m}}{x} a f x = a \frac{d^{-m}}{x} f x$ 193.

Beweis: Sei $\varphi x = \frac{d^{-m}}{x} f x$ mithin auch $f x = \frac{d^m}{x} \varphi x$, so ist

$$\begin{aligned}
 a \frac{d^{-m}}{x} f x &= a \varphi x = \frac{d^{-m}}{x} \frac{d^m}{x} a \varphi x \\
 &= \frac{d^{-m}}{x} a f x; \text{ denn es ist}
 \end{aligned}
 \quad (\text{nach 190})$$

$$\frac{d^m}{x} a \varphi x = a \frac{d^m}{x} \varphi x \quad (\text{nach 90})$$

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} a_n x^n = \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}; \sum a_n x^n \cong w_0 + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ 194.

$$\frac{d^{-m}}{x} a_n x^n = \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}$$

$$\sum a_n x^n \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}$$

Beweis: Es ist $\frac{d^m}{x} \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n} = \frac{n!}{(m+n)!} a_n \frac{d^m}{x} x^{m+n}$ (nach 90)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!}{(m+n)!} a_n \frac{(m+n)!}{n!} x^n \quad (\text{nach 104}) \\
 &= a_n x^n
 \end{aligned}$$

Also ist $\frac{d^{-m}}{x} a_n x^n = \frac{d^{-m}}{x} \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}$ (nach 190)

$$= \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}$$

Daraus ergeben sich die andern Formeln.

Satz. $\frac{d^{-m}}{x} S a_n x^n = S \frac{a!}{(m+a)!} a_n x^{m+a}$ 195.

$$\sum S a_n x^n \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + S \frac{a!}{(m+a)!} a_n x^{m+a}$$

Beweis: Unmittelbar aus 189 und 191.

196. Satz. $\frac{d^{-1}}{x} a_n x^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} a_n x^{-n}$; $\sum \frac{d}{x} a_n x^{-(n+1)} = w_0 - \frac{1}{n} a_n x^{-n}$

$$\frac{d^{-m}}{x} a_n x^{-(m+n)} = (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$$

$$\sum \frac{d^m}{x} a_n x^{-(m+n)} \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$$

Beweis: Es ist $\frac{d^m}{x} (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} \frac{d^m}{x} x^{-n} \quad (\text{nach 90})$$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} (-1)^m n(n+1) \dots (n+m-1) x^{-(m+n)} \quad (\text{nach 104})$$

$$= (-1)^{2m} \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} x^{-(m+n)}$$

$$= a_n x^{-(m+n)}$$

Also ist $\frac{d^{-m}}{x} a_n x^{-(m+n)} = \frac{d^{-m}}{x} \frac{d^m}{x} (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} x^{-n}$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)! a_n}{(m+n-1)!} x^{-n} \quad (\text{nach 190})$$

197. Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x} = l_0 x$ $\sum \frac{d}{x} \frac{1}{x} \cong w_0 + l_0 x$.

Beweis: Es ist $\frac{d}{x} l_0 x = \frac{1}{x}$ nach 112; also ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{d}{x} l_0 x = l_0 x \quad (\text{nach 189})$$

198. Satz. $\frac{d^{-1}}{x} x^{-(1-1/n)} = n x^{1/n}$.

Beweis: Es ist nach 108 $\frac{d}{x} n x^{1/n} = \frac{1}{x^{1-1/n}} = x^{-(1-1/n)}$; also ist

$$\frac{d^{-1}}{x} x^{-(1-1/n)} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{d}{x} n x^{1/n} = n x^{1/n} \quad (\text{nach 189})$$

199. Satz. $\frac{d^{-m}}{x} x^{-(m-1/n)} = (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m x^{1/n}$;

$$\sum \frac{d^m}{x} x^{-(m-1/n)} \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m x^{1/n}$$

Beweis: Es ist nach 109

$$\frac{d^m}{x} x^{1/n} = (-1)^{m-1} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{1}{n^m} x^{-(m-1/n)}, \text{ mithin ist}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left[(-1)^{m-1} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot n^m \cdot x^{\frac{1}{n}} \right] \\ = (-1)^{m-1} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot n^m \frac{d^m}{dx^m} x^{\frac{1}{n}} = x^{-\left(m-\frac{1}{n}\right)}; \text{ also ist} \\ \frac{d^m}{dx^m} x^{-\left(m-\frac{1}{n}\right)} = \frac{d^m}{dx^m} \frac{d^m}{dx^m} \left[(-1)^{m-1} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot n^m \cdot x^{\frac{1}{n}} \right] \\ = (-1)^{m-1} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot n^m x^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Um hier andere Veränderliche einführen zu können, entwickeln wir zunächst die folgenden Sätze.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{dx} e^x = e^x \quad \frac{\zeta^1}{dx} e^x \cong w_0 + e^x \quad 200.$$

$$\frac{d^{-m}}{dx^m} e^x = e^x \quad \frac{\zeta^m}{dx^m} e^x \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + e^x.$$

Beweis. Es ist $\frac{d^m}{dx^m} e^x = e^x$ (nach 120); also ist

$$\frac{d^{-m}}{dx^m} e^x = \frac{d^{-m}}{dx^m} \frac{d^m}{dx^m} e^x = e^x \quad (\text{nach 190}).$$

Daraus ergeben sich sofort die andern Formeln.

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d^{-1}}{dx} \sin x &= -\cos x & \frac{\zeta^1}{dx} \sin x &\cong w_0 - \cos x \\ \frac{d^{-1}}{dx} \cos x &= \sin x & \frac{\zeta^1}{dx} \cos x &\cong w_0 + \sin x. \end{aligned} \quad 201.$$

Beweis: 1. Es ist $\frac{d^1}{dx} -\cos x = \sin x$ (nach 125); also ist

$$\frac{d^{-1}}{dx} \sin x = \frac{d^{-1}}{dx} \frac{d^1}{dx} -\cos x = -\cos x \quad (\text{nach 190}).$$

2. Es ist $\frac{d^1}{dx} \sin x = \cos x$ (nach 125); also ist

$$\frac{d^{-1}}{dx} \cos x = \frac{d^{-1}}{dx} \frac{d^1}{dx} \sin x = \sin x \quad (\text{nach 190}).$$

$$\text{Satz. } \frac{d^{-m}}{dx^m} \sin x = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right); \quad 202.$$

$$\frac{\zeta^m}{dx^m} \sin x \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right)$$

$$\frac{d^{-m}}{dx^m} \cos x = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right);$$

$$\frac{\zeta^m}{dx^m} \cos x \cong w_0 + w_1 x + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right).$$

Beweis: 1. Es ist $\frac{d^m}{dx^m} \sin x = \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x\right)$ (nach 126),

$$\text{also } \frac{d^m}{dx^m} \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{4m}{2}\pi + x\right) = \sin x: \text{ also ist}$$

$$\frac{d}{dx}^{-m} \sin x = \frac{d}{dx}^{-m} \frac{d}{dx}^m \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) \quad (\text{nach } 190).$$

$$2. \text{ Es ist } \frac{d}{dx}^m \cos x = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x\right) \quad (\text{nach } 126),$$

$$\text{also } \frac{d}{dx}^m \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\frac{4m}{2}\pi + x\right) = \cos x; \text{ also ist}$$

$$\frac{d}{dx}^{-m} \cos x = \frac{d}{dx}^{-m} \frac{d}{dx}^m \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right) \quad (\text{nach } 190).$$

$$203. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{(\cos x)^2} = \tan x$$

$$\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{(\sin x)^2} = -\cot x.$$

Beweis: Unmittelbar aus 127.

$$204. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \sec x; \quad \frac{d}{dx}^{-1} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\operatorname{cosec} x.$$

Beweis. Unmittelbar aus 128.

$$205. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \cot x = {}_l \sin x; \quad \frac{d}{dx}^{-1} \tan x = -{}_l \cos x.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 132.

$$206. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \cot x = -{}_l \operatorname{cosec} x; \quad \frac{d}{dx}^{-1} \tan x = {}_l \sec x.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 133.

$$207. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{\sin x \cos x} = {}_l \tan x = -{}_l \cot x;$$

$$\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{\sin 2x} = {}_{1/2} {}_l \tan x = -{}_{1/2} {}_l \cot x.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 134.

$$208. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{1+x^2} = \arctan x; \quad \frac{d}{dx}^{-1} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arccot} x.$$

Beweis. Unmittelbar aus 130.

$$209. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \arcsin x;$$

$$\frac{d}{dx}^{-1} \left(-\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = \arccos x.$$

Beweis. Unmittelbar aus 129.

$$210. \quad \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}} = \operatorname{arcsec} x;$$

$$\frac{d}{dx}^{-1} \left(-\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}\right) = \operatorname{arccosec} x.$$

Beweis. Unmittelbar aus 131.

$$\text{Satz. } \frac{d}{x}^{-1}(f_y) \frac{d}{x} y = \frac{d}{y}^{-1} f_y, \text{ und } \frac{d}{x}^{-1} f_y = \left(\frac{d}{y}^{-1} f_y \right) \frac{d}{y} x \quad 211.$$

* wo y eine Folge von x .

Beweis. Wir setzen $F_y = \frac{d}{y}^{-1} f_y$, dann ist

$$\frac{d}{x} F_y = \left(\frac{d}{y} F_y \right) \frac{d}{x} y \quad (\text{nach 95})$$

aber $\frac{d}{y} F_y = f_y$, also ist $\frac{d}{x} F_y = (f_y) \frac{d}{x} y$ und also $F_y = \frac{d}{x}^{-1} (f_y) \frac{d}{x} y$,

aber auch $F_y = \frac{d}{y}^{-1} f_y$, also ist $\frac{d}{x}^{-1} (f_y) \frac{d}{x} y = \frac{d}{y}^{-1} f_y$ oder

$$\frac{d}{x}^{-1} f_y = \left(\frac{d}{y}^{-1} f_y \right) \frac{d}{y} x.$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V = UV - \frac{d}{x}^{-1} V \frac{d}{x} U \text{ oder} \quad 212.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} UW = U \frac{d}{x}^{-1} W - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} W \right) \frac{d}{x} U$$

* wo U und V Folgen von x und $W = \frac{d}{x} V$ gesetzt ist.

Beweis. Es ist nach 89

$$\frac{d}{x} UV = U \frac{d}{x} V + V \frac{d}{x} U, \text{ also ist}$$

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} UV = UV = \frac{d}{x}^{-1} \left(U \frac{d}{x} V + V \frac{d}{x} U \right) = \frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V + \frac{d}{x}^{-1} V \frac{d}{x} U,$$

mithin

$$\frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V = UV - \frac{d}{x}^{-1} V \frac{d}{x} U.$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V = U \frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} V - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} V \right) \frac{d}{x} U \text{ oder} \quad 213.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} UW = U \frac{d}{x}^{-1} W - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} W \right) \frac{d}{x} U.$$

Diese Formel empfiehlt sich dort, wo $\frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} V$ leicht gefunden werden kann

und auch $\frac{d}{x} U$ eine einfache Formel ist. Sei z. B. $U = l_e(1+x^2)$, $V = \frac{1}{2}x^2$

$$\frac{d}{x}^{-1} x l_e(1+x^2) = l_e(1+x^2) \frac{d}{x}^{-1} x - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} x \right) \frac{d}{x} l_e(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 l_e(1+x^2) - \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{2}x^2 \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 l_e(1+x^2) - \frac{d}{x}^{-1} \frac{x^3}{1+x^2} \text{ und da } \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2} \text{ ist}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 l_e(1+x^2) - \frac{d}{x}^{-1} \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 l_e(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}l_e(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2) l_e(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2.$$

Wir wollen nun die Sätze über die Integern auch für die Richtgrößen aufstellen.

$$214. \quad \text{Satz.} \quad \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c = \frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+1}}{c + 1}.$$

Beweis. Es ist

$$(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+1} = \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+1} = (c + 1) \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c$$

(nach 136).

$$\text{Also ist } \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c = \frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+1}}{c + 1}.$$

$$215. \quad \text{Satz.} \quad \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c = \frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+m}}{(c + 1)(c + 2) \cdots (c + m)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Nach 137 ist } (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+m} &= \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} \frac{\mathfrak{d}^m}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+m} \\ &= (c + m)(c + m - 1) \cdots (c + m - m + 1) \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^c = \frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{c+m}}{(c + 1)(c + 2) \cdots (c + m - 1)(c + m)}.$$

$$216. \quad \text{Satz.} \quad \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} [\mathfrak{S}a_a(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^a] = \sum_{m, \dots} \frac{a!}{(a + m)!} a_a(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{a+m}.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} [\mathfrak{S}a_a(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^a] &= \sum_{m, \dots} \frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{a+m}}{(a + 1)(a + 2) \cdots (a + m)} \\ &= \sum_{m, \dots} \frac{a! a_a(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{a+m}}{(a + m)!} \end{aligned}$$

(nach 215).

$$217. \quad \text{Satz.} \quad \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-n} = \frac{-(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-(n-1)}}{n - 1} \quad * \text{ wo } n > 1.$$

Beweis. Nach 139 ist

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-(n-1)} &= \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-(n-1)} \\ &= -(n - 1) \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-n}. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-n} = -\frac{(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-(n-1)}}{n - 1}.$$

$$218. \quad \text{Satz.} \quad \frac{\mathfrak{d}^{-1}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} \frac{1}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} = 1_e(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}).$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 144.

219. Satz.

$$\frac{\mathfrak{d}^{-m}}{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}} (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-(m+1)} = \frac{(-1)^m (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^{-1}}{m!} = (-1)^m \frac{1}{m! (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})}.$$

Beweis. Nach 139 ist $\frac{d^{-m}}{x+iy} \frac{d^m}{x+iy} (x+iy)^{-1}$
 $= (x+iy)^{-1} = (-1)^m 1 \cdot 2 \cdots m \frac{d^{-m}}{x+iy} (x+iy)^{-(m+1)}$
 $= (-1)^m m! \frac{d^{-m}}{x+iy} (x+iy)^{-(m+1)}.$

Also ist

$$\frac{d^{-m}}{x+iy} (x+iy)^{-(m+1)} = \frac{(-1)^m (x+iy)^{-1}}{m!} = (-1)^m \frac{1}{m! (x+iy)}.$$

Satz. $\frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1};$ 220.

$$\frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^a (x+iy)^{\frac{1}{n}+a}}{(n+1)(2n+1) \cdots (an+1)}.$$

Beweis 1. Nach 140 ist $\frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{d}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}+1}$
 $= (x+iy)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n} + 1 \frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}}.$

Also ist $\frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n \cdot (x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}.$

2. Nach 140 ist ferner $\frac{d^{-a}}{x+iy} \frac{d^a}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}+a}$
 $= (x+iy)^{\frac{1}{n}+a} = \left(\frac{1}{n}+a\right) \left(\frac{1}{n}+a-1\right) \cdots \left(\frac{1}{n}+1\right) \frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}}$
 $= \frac{(n+1)(2n+1) \cdots (an+1)}{n^a} \frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}}.$

Also ist $\frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^a}{(n+1)(2n+1) \cdots (an+1)} (x+iy)^{\frac{1}{n}+a}.$

Satz. $\frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} (x+iy)^{1-\frac{1}{n}};$ 221.

$$\frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a (x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1) \cdots (an-1)}.$$

Beweis 1. Nach 141 ist

$$\frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{d}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}+1} = (x+iy)^{-\frac{1}{n}+1} = \left(-\frac{1}{n}+1\right) \frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}}.$$

Also ist $\frac{d^{-1}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} (x+iy)^{1-\frac{1}{n}}.$

2. Nach 141 ist ferner $\frac{d^{-a}}{x+iy} \frac{d^a}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}+a}$
 $= \left(-\frac{1}{n}+a\right)\left(-\frac{1}{n}+a-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}+a-a+1\right) \frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}}$
 $= \frac{(an-1)((a-1)n-1)\cdots(n-1)}{n^a} \frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}}.$

Also ist $\frac{d^{-a}}{x+iy} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a (x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1)\cdots(an-1)}.$

222. Satz. $\frac{d^{-1}}{x+iy} e^{x+iy} = e^{x+iy}; \quad \frac{d^{-a}}{x+iy} e^{x+iy} = e^{x+iy}.$

Beweis. Nach 142 ist $\frac{d^{-a}}{x+iy} \frac{d^a}{x+iy} e^{x+iy} = \frac{d^{-a}}{x+iy} e^{x+iy}.$

Also ist $\frac{d^{-a}}{x+iy} e^{x+iy} = e^{x+iy}.$

223. Satz. $\frac{d^{-m}}{x+iy} a^{x+iy} = \frac{a^{x+iy}}{(laa)^m}; \quad \frac{d^{-m}}{x+iy} e^{a(x+iy)} = \frac{e^{a(x+iy)}}{a^m}.$

Beweis. Unmittelbar nach 143.

224. Satz. $\frac{d^{-1}}{x+iy} \sin(x+iy) = -\cos(x+iy);$

$\frac{d^{-1}}{x+iy} \cos(x+iy) = \sin(x+iy).$

Beweis. Unmittelbar nach 145.

225. Satz. $\frac{d^{-m}}{x+iy} \sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x+iy\right);$

$\frac{d^{-m}}{x+iy} \cos(x+iy) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x+iy\right).$

Beweis. Nach 146 ist $\frac{d^{-m}}{x+iy} \frac{d^m}{x+iy} \sin(x+iy) = \sin(x+iy)$
 $= \sin\left(\frac{4m}{2}\pi + x+iy\right) = \frac{d^{-m}}{x+iy} \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x+iy\right).$

Also ist, wenn wir x für $\frac{m}{2}\pi + x$ einführen

$\frac{d^{-m}}{x+iy} \sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x+iy\right).$ Und ebenso für

$\frac{d^{-m}}{x+iy} \cos(x+iy).$

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{1}{(\cos(x + iy))^2} = \tan(x + iy); \quad 226.$$

$$\frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{1}{(\sin(x + iy))^2} = -\cot(x + iy).$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 147.

$$\text{Satz.} \quad 227.$$

$$\frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{\sin(x + iy)}{(\cos(x + iy))^2} = \frac{d^{-1}}{x + iy} (\tan(x + iy)) \sec(x + iy) = \sec(x + iy);$$

$$\frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{\cos(x + iy)}{(\sin(x + iy))^2} = \frac{d^{-1}}{x + iy} (\cot(x + iy)) \operatorname{cosec}(x + iy) = \operatorname{cosec}(x + iy)$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 148.

$$\text{Satz.} \quad 228.$$

$$\frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}} \cong \operatorname{Aarc}(\sin = x + iy) = -\operatorname{Aarc}(\cos = x + iy).$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 149.

$$\text{Satz.} \quad 229.$$

$$\frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{1}{1 + (x + iy)^2} \cong \operatorname{Aarctan}(= x + iy) = -\operatorname{Aarc}(\cot = x + iy).$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 150.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x + iy} \frac{1}{(x + iy)[1 + (x + iy)^2]^{1/2}} \cong \operatorname{Aarc}(\sec = x + iy) \quad 230.$$

$$= -\operatorname{Aarc}(\operatorname{cosec} = x + iy).$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 151.

Satz. Alle Grundformeln für die Integern gelten also ebenso 231. für die Richtgrößen wie für die reinen Zahlen oder reellen Größen.

11. Die Integern zu den Diffgleichungen.

Wir haben in der vorhergehenden Nummer die Integern von denjenigen Diffen aufgesucht, welche wir in Nummer 8 unmittelbar durch Ableitung der Diffe gewonnen hatten. In dieser Nummer wollen wir dagegen die Integern zu denjenigen Diffen suchen, welche uns gegeben sind und welche sich nicht unmittelbar durch Ableitung von Diffen ergeben. Man muss in diesem Falle der gegebenen Diffgleichung eine Form geben, welche in jedem Gliede nur solche Diffe enthalten, welche unmittelbar durch Ableitung gewonnen werden können.

A. Das Integern durch Einführung (Substitution) einer neuen Veränderlichen.

Das einfachste Mittel ist, dass man $f_x x = \varphi_z$ setzt und nun nach

$$\frac{d}{x} f_x x = \left(\frac{d}{z} \varphi_z \right) \frac{d}{x} z \text{ setzt. Sei z. B. } (a + bx)^n \text{ gegeben, so setze}$$

$a + bx = z$, so ist $\frac{d}{x}z = b$; $\frac{d}{z}^{-1}(z)^n = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, mithin ist

$$\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^n = \frac{z^{n+1}}{(n+1)b} = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)b}.$$

Sei z. B. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a + bx}$ zu suchen, so setze $z = a + bx$, $\frac{d}{x}z = b$

$$\frac{d}{z}^{-1} \frac{1}{z} = l_z z, \text{ also } \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a + bx} = \frac{l_z z}{b} = \frac{l_z(a + bx)}{b}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich die folgenden Sätze:

232. Satz. $\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^n = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)b};$

$$\frac{d}{x}^{-m}(a + bx)^n = \frac{n!(a + bx)^{n+m}}{(n+m)!b^m}.$$

233. Satz. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a + bx)^n} = -\frac{1}{b(n-1)(a + bx)^{n-1}};$

$$\frac{d}{x}^{-m} \frac{1}{(a + bx)^n} = \frac{(-1)^m m!}{b^m(n-m)!(a + bx)^{n-m}}.$$

234. Satz. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a + bx} = \frac{1}{b} l_z(a + bx).$

235. Satz. $\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a + bx)^{\frac{m}{n}+1}}{b\left(\frac{m}{n} + 1\right)};$

$$\frac{d}{x}^{-p}(a + bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a + bx)^{\frac{m}{n}+p}}{b^p\left(\frac{m}{n} + 1\right)\left(\frac{m}{n} + 2\right)\cdots\left(\frac{m}{n} + p\right)}.$$

236. Satz. $\frac{d}{x}^{-1}(a + bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a + bx)^{1-\frac{m}{n}}}{b\left(1 - \frac{m}{n}\right)};$

$$\frac{d}{x}^{-p}(a + bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a + bx)^{p-\frac{m}{n}}}{b^p\left(1 - \frac{m}{n}\right)\left(2 - \frac{m}{n}\right)\cdots\left(p - \frac{m}{n}\right)}.$$

237. Satz. $\frac{d}{x}^{-1} l_z x = x l_z x - x.$

Beweis. $\frac{d}{x}(x l_z x - x) = l_z x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = l_z x.$

238. Satz. $\frac{d}{x}^{-m} l_z x = \frac{x^m}{m!} \left[l_z x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right].$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis. } & \frac{d^m}{dx^m} \left[l_e x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^m}{m!} l_e x - \frac{x^m}{m!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] \\
 &= \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} l_e x + \frac{x^{m-1}}{m!} - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{m} \\
 &\quad - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} \right) \\
 &= \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} l_e x - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} \right).
 \end{aligned}$$

Und entsprechend

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^m}{m!} \left[l_e x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] \\
 &= \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} l_e x - \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m-2} \right) \\
 & \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \frac{x^m}{m!} \left[l_e x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] = x \cdot l_e x - x \\
 & \frac{d^m}{dx^m} \frac{x^m}{m!} \left[l_e x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] = l_e x \quad (\text{nach 237}).
 \end{aligned}$$

Setzen wir $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} = p_m$, so ist

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1}{1} = 1, \quad p_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad p_3 = \frac{11}{6}, \quad p_4 = \frac{25}{12}, \quad p_5 = \frac{137}{60}, \quad p_6 = \frac{147}{60}, \\
 p_7 &= \frac{1089}{420}, \quad p_8 = \frac{2283}{840}, \quad p_9 = \frac{7129}{2520}, \quad p_{10} = \frac{7381}{2520}, \quad p_{11} = \frac{83711}{27720}, \quad p_{12} = \frac{86021}{27720}, \\
 p_{13} &= \frac{1'145993}{360360}, \quad p_{14} = \frac{1'171733}{360360}, \quad p_{15} = \frac{1'195757}{360360}, \quad p_{16} = \frac{2'436599}{720720}, \\
 p_{17} &= \frac{42'242903}{12'252240}, \quad p_{18} = \frac{42'923583}{12'252240}, \quad p_{19} = \frac{827'800317}{232'792560}, \quad p_{20} = \frac{839'439945}{232'792560}.
 \end{aligned}$$

Satz.

239.

$$\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} l_e(a + bx) = \frac{(a + bx)^m}{b^m \cdot m!} \left[l_e(a + bx) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right].$$

$$\text{Satz. } \frac{d^{-(m+n)}}{dx^{-(m+n)}} \frac{1}{(a + bx)^n}$$

240.

$$= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! (a + bx)^m}{m! b^{m+n}} \left[l_e(a + bx) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right].$$

Beweis. Nach 236 ist

$$\frac{d^{-p}}{dx^{-p}} \frac{1}{(a + bx)^n} = (-1)^p \frac{p!}{b^p \cdot (n-p)! (a + bx)^{n-p}}, \quad \text{also}$$

$$\frac{d^{-(n-1)}}{dx^{-(n-1)}} \frac{1}{(a + bx)^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{b^{n-1} \cdot (a + bx)}$$

$$\frac{d^{-n}}{x} \frac{1}{(a+bx)^n} = (-1)^n \frac{(n-1)! l_e(a+bx)}{b^n} \quad (\text{nach 215}).$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{-(m+n)}}{x} \frac{1}{(a+bx)^n} \\ = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!(a+bx)^m}{b^{m+n} \cdot m!} \left[l_e(a+bx) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \right) \right] \end{aligned}$$

(nach 238).

Durch diesen Satz können wir nun jede Integrale von $\frac{1}{(a+bx)^n}$ finden.

Wir wenden uns nun zu den Integralen von $(a+bx)^\mu$, deren Integralen Schwierigkeiten bereiten.

241. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} (a+bx)^\mu = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{b \cdot (\mu+1)}.$

Beweis. Setze $a+bx^n = z$, so ist $\frac{d}{x} z = b \cdot n \cdot x^{n-1}$ u. f. w.

Aus diesem Satze ergeben sich noch unmittelbar die Formeln.

242. **Satz.**

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{(a+bx^2)^{1/2}} = \frac{(a+bx^2)^{1/2}}{b}; \quad \frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{(a+bx^2)^{3/2}} = - \frac{1}{b(a+bx^2)^{1/2}}.$$

243. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a+bx^2)^{3/2}} = \frac{x}{a(a+bx^2)^{1/2}}.$

244. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} = \frac{1}{n \cdot b} l_e(a+bx^n).$

245. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a+bx}{a-bx};$

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a-bx^2} = \frac{1}{2(ab)^{1/2}} l_e \frac{a^{1/2} + xb^{1/2}}{a^{1/2} - xb^{1/2}}.$$

Beweis. $\frac{d}{x} l_e \frac{a+bx}{a-bx} = \frac{1}{a+bx} \frac{d}{x} \frac{a+bx}{a-bx} = \frac{2ab}{a^2 - b^2 x^2},$

mithin folgt die erste Formel. Und wenn man $a^2 = c$ und $b^2 = d$ setzt, so auch die zweite Formel.

246. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} l_e (bx + (a^2 + b^2 x^2)^{1/2});$

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a+bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} l_e [xb^{1/2} + (a+bx^2)^{1/2}].$$

Beweis. Setze $a^2 + b^2x^2 = z$, so ist $\frac{d}{dx} \frac{1}{b} \log(bx + z^{1/2})$

$$= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{bx + z^{1/2}} \right) \frac{d}{dx} (bx + z^{1/2}) = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{bx + z^{1/2}} \right) \left(b + \frac{b^2x}{z^{1/2}} \right)$$

$$= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{bx + z^{1/2}} \right) \frac{b}{z^{1/2}} (z^{1/2} + bx) = \frac{1}{z^{1/2}} = \frac{1}{(a^2 + b^2x^2)^{1/2}}.$$

Setze $a^2 = c$ und $b^2 = d$, so folgt die zweite Formel.

Satz. $\frac{d^{-1}}{dx} \frac{1}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\tan = \frac{bx}{a}\right);$ 247.

$$\frac{d^{-1}}{dx} \frac{1}{a + bx^2} = \frac{1}{(ab)^{1/2}} \arctan\left(\tan = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$$

Beweis. Nach 130 ist $\frac{d}{dz} \arctan(\tan = z) = \frac{1}{1 + z^2}$, setze $z = \frac{bx}{a}$,

so ist $\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a}$, also $\frac{d}{dx} \arctan\left(\tan = \frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{1 + z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{b}{a} \frac{1}{1 + \frac{b^2x^2}{a^2}}$

$$= \frac{ab}{a^2 + b^2x^2},$$

mithin folgt die erste Formel und setzt man $a^2 = c$ und $b^2 = d$, so folgt auch die zweite Formel.

Satz. $\frac{d^{-1}}{dx} \frac{1}{(a^2 - b^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \arcsin\left(\sin = \frac{bx}{a}\right);$ 248.

$$\frac{d^{-1}}{dx} \frac{1}{(a - bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} \arcsin\left(\sin = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$$

Beweis. Nach 129 ist $\frac{d}{dz} \arcsin(\sin = z) = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}$, setze $z = \frac{bx}{a}$,

also $\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a}$, so ist $\frac{d}{dx} \arcsin\left(\sin = \frac{bx}{a}\right) = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} \frac{dz}{dx} = \frac{b}{a} \frac{1}{\left(1 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{1/2}}$

$$= \frac{b}{(a^2 - b^2x^2)^{1/2}},$$

mithin folgt die erste und durch Setzen von $a^2 = c$ und $b^2 = d$ die zweite Formel.

Für die Winkelfolgen hat man ferner die folgenden Gleichungen.

Satz. 249.

$$\frac{d^{-1}}{dx} \cos(a + bx) = \frac{1}{b} \sin(a + bx); \quad \frac{d^{-1}}{dx} \cos bx = \frac{1}{b} \sin bx.$$

Beweis. Nach 125 ist $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$, setze also $a + bx = z$;

$\frac{d}{dx} z = b$, so ist $\frac{d}{dx} \sin(a + bx) = b \cos(a + bx)$, daraus folgt der Satz.

250. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} \sin(a + bx) = -\frac{1}{b} \cos(a + bx); \quad \frac{d}{dx}^{-1} \sin bx = -\frac{1}{b} \cos bx.$$

251. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} \cot(a + bx) = \frac{1}{b} l_e \sin(a + bx); \quad \frac{d}{dx}^{-1} \cot x = l_e \sin x.$$

Beweis. $\frac{d}{dx} l_e \sin x = \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \sin x = \cot x$, also auch $\frac{d}{dz} l_e \sin z = \cot z$.

Setze $z = a + bx$, also $\frac{d}{dx} z = b$, so folgt der Satz.

252. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} \tan(a + bx) = -\frac{1}{b} l_e \cos(a + bx); \quad \frac{d}{dx}^{-1} \tan x = -l_e \cos x.$$

253. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \left(\tan = \frac{b \tan x}{a} \right)$.

Beweis. Nach 130 ist $\frac{d}{dz} \operatorname{arc}(\tan = z) = \frac{1}{1 + z^2}$. Setze

$$z = \frac{b \cdot \tan x}{a}, \text{ also } \frac{d}{dx} z = \frac{b}{a} \frac{1}{(\cos x)^2}, \text{ so ist } \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \left(\tan = \frac{b \tan x}{a} \right)$$

$$= -\frac{1}{1 + \frac{b^2(\tan x)^2}{a^2}} \cdot \frac{b}{a} \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{\left(a^2 + b^2 \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} \right) (\cos x)^2}$$

$$= \frac{ab}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2}$$

und daraus unmittelbar der Satz.

254. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 - b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a + b \tan x}{a - b \tan x}$.

Beweis. Nach 245 ist $\frac{1}{2abz} l_e \frac{a + bz}{a - bz} = \frac{1}{a^2 - b^2 z^2}$, setze $z = \tan x$.

$$\frac{d}{dx} z = \frac{1}{(\cos x)^2}, \text{ so ist } \frac{1}{2ab} \frac{d}{dx} l_e \frac{a + b \tan x}{a - b \tan x} = \frac{1}{a^2 - b^2(\tan x)^2} \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2(\cos x)^2 - b^2(\sin x)^2} \text{ und daraus unmittelbar der Satz.}$$

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} \arcsin(ax) = x \cdot \arcsin(ax) \cdot \frac{(1 - a^2 x^2)^{1/2}}{a}$ 255.

Beweis. Es ist $\frac{d}{x} \left[x \cdot \arcsin(ax) + \frac{(1 - a^2 x^2)^{1/2}}{a} \right]$

$$= \arcsin(ax) + x \frac{a}{(1 - a^2 x^2)^{1/2}} - \frac{a^2 x}{a(1 - a^2 x^2)^{1/2}} = \arcsin(ax).$$

und daraus unmittelbar der Satz.

Satz.

256.

$\frac{d}{x}^{-1} \arctan(ax) = x \cdot \arctan(ax) - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2).$

Beweis. $\frac{d}{x} \left[x \cdot \arctan(ax) - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2) \right]$

$$= \arctan(ax) + x \frac{d}{x} \arctan(ax) - \frac{1}{2a} \frac{d}{x} \ln(1 + a^2 x^2) = \arctan(ax)$$

und daraus unmittelbar der Satz.

B. Das Integren durch Reihen.

Ein ganz allgemeines, aber nur selten zu schnell konvergierenden Reihen führendes Mittel, die Integren zu finden, ist die Entwicklung der gegebenen Gleichung in eine echte Reihe, welche man dann integren kann.

Satz. $\frac{d}{x}^{-1} f_0 x = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{a_a}{a+1} x^{a+1}; \quad \frac{d}{x}^{-m} f_0 x = \sum_{(m+a)!} \frac{a! a_a}{(m+a)!} x^{m+a}$ 257.

* wo $f_0 x = \sum a_a x^a$, a_a endlich und $x^2 < 1$ ist.

Beweis. Da $f_0 x = \sum a_a x^a$, wo a_a endlich und $x^2 < 1$ ist, so ist nach 194

$$\frac{d}{x}^{-1} f_0 x = \frac{d}{x}^{-1} (\sum a_a x^a) = \sum \frac{d}{x}^{-1} a_a x^a = \sum \frac{a_a}{a+1} x^{a+1}$$

$$\frac{d}{x}^{-m} f_0 x = \frac{d}{x}^{-m} (\sum a_a x^a) = \sum a_a \frac{d}{x}^{-m} x^a = \sum \frac{a_a \cdot a!}{(m+a)!} x^{m+a} \quad (\text{nach 195}).$$

Satz.

258.

$\frac{d}{x}^{-1} (f_0 x) \varphi_0 x = \sum a_a \frac{d}{x}^{-1} x^a \varphi_0 x; \quad \frac{d}{x}^{-m} (f_0 x) \varphi_0 x = \sum a_a \frac{d}{x}^{-m} x^a \varphi_0 x$

* wo $f_0 x = \sum a_a x^a$, a_a endlich, $x^2 < 1$ und auch $(\frac{d}{x}^{-m} x^a \varphi_0 x)^2 < 1$.

Beweis. Da $f_0 x = \sum a_a x^a$, a_a endlich und $x^2 < 1$ ist, so ist, da auch $(\frac{d}{x}^{-m} x^a \varphi_0 x)^2 < 1$,

$$\frac{d}{x}^{-1} (f_0 x) \varphi_0 x = \sum a_a \frac{d}{x}^{-1} x^a \varphi_0 x \quad \text{und} \quad \frac{d}{x}^{-m} (f_0 x) \varphi_0 x = \sum a_a \frac{d}{x}^{-m} x^a \varphi_0 x.$$

C. Das Integriren der Brüche von Folgen.

259. **Erklärung.** Ein Bruch ganzer Höhenreihen heist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner jeder eine endliche Höhenreihe von x zu ganzen Plusstufen ist.

Der Bruch ganzer Höhenfolgen heist echt, wenn die Höhenreihe des Zählers von nicht höherm Grade ist als die des Nenners; er heist unecht, wenn die Höhenreihe des Zählers von höherm Grade ist als die des Nenners.

Die Form der echten gebrochenen Höhenreihe ist

$$\frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad \text{wo } n \text{ und } m \text{ ganze Zahlen und } n \geq m \text{ ist.}$$

1. Die Zerlegung der Brüche ganzer Höhenreihen in Teilbrüche.

260. **Satz.** Jeder unechte Bruch ganzer Höhenreihen lässt sich in eine ganze Höhenreihe und in einen echten Bruch ganzer Höhenreihen zerlegen.

Beweis. Da der Bruch unecht ist, so ist die Höhenreihe des Zählers von höherm Grade als der Nenner. Teilt man also den Zähler durch den Nenner, so erhält man eine ganze Höhe, bez. Höhenreihe von x und als Rest einen echten Bruch, in welchem der Zähler von niederem, höchstens aber gleichem Grade ist, wie der Nenner.

Wir werden daher im Folgenden nur die echten Brüche ganzer Höhenreihen von der Form

$$\frac{f_x}{f_a x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad \text{wo } m \text{ und } n \text{ ganze Pluszahlen und } n \geq m \text{ ist}$$

zu betrachten haben.

Der Nenner dieses Bruches ist nach Zahlenlehre 570

$$f_a x = \prod_{a,n} a_n x^n = C(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

Hier können wir Zähler und Nenner durch C teilen, da $C \neq 0$ ist; dann fällt C fort. Ferner können mehrer der Wurzeln r_1, r_2, \dots, r_n einander gleich sein, seien also a Wurzeln gleich a , b Wurzeln gleich b u. s. w., so ist $f_a x = (x - a)^a (x - b)^b \dots (x - l)^l$ wo $b + c + \dots + l = n$ und die Größen a, b, c, \dots, l sämtlich einander ungleich sind, und gilt dann der folgende Satz.

Satz. Der echte Bruch ganzer Höhenreihen

261.

$$\frac{R_x}{f_x} = \frac{\sum_{0,m} A_a x^a}{\sum_{0,n} a_a x^a}, \text{ wo } f_x = (x-b)^b (x-c)^c (x-d)^d \dots (x-l)^l \text{ und}$$

$b + c + \dots + l = n$ ist, ist gleich

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{f_x} = & \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} \\ & + \frac{C_0}{(x-c)^c} + \frac{C_1}{(x-c)^{c-1}} + \dots + \frac{C_{c-1}}{x-c} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{L_0}{(x-l)^l} + \frac{L_1}{(x-l)^{l-1}} + \dots + \frac{L_{l-1}}{x-l} \end{aligned}$$

wo die Größen B_0, B_1, \dots, L_{l-1} sämtlich endliche bestimmte und unveränderliche Größen sind.

Beweis. Wir setzen $(x-c)^c (x-d)^d \dots (x-l)^l = \varphi_x$, dann ist also $f_x = (x-b)^b \varphi_x$. Bezeichnen wir nun mit R_{xb} und φ_{xb} die Folgen (a) R_x und φ_x , sofern in denselben $x = b$ gesetzt ist, und setzen wir

$$B_0 = \frac{R_{xb}}{\varphi_{xb}} \text{ und setzen wir } F_{01}x = \frac{R_x - B_0 \varphi_x}{x-b}, \quad (b)$$

so wird $R_x = B_0 \varphi_x + (x-b) F_{01}x$ und

$$\frac{F_{01}x}{f_x} = \frac{R_x}{(x-b)^b \varphi_x} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{F_{01}x}{(x-b)^{b-1} \varphi_x}. \quad (d)$$

Hier ist, da φ_x das Fach $x-b$ nicht mehr enthält, auch φ_{xb} ungleich Null, also nach (b) die Größe B_0 eine endliche bestimmte, unveränderliche Größe. Setzen wir in (c) den Wert für B_0 aus (a) so wird

$$F_{01}x = \frac{R_x - \frac{R_{xb}}{\varphi_{xb}} \varphi_x}{x-b}. \text{ Hier sind im Zähler } F_{01}x \text{ und } \varphi_x \text{ endliche}$$

Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen, also ist der Zähler eine solche Höhenreihe und da $F_{01}x(x-b) = R_x - \frac{R_{xb}}{\varphi_{xb}} \varphi_x$ ist, so wird der Zähler für $x = b$ Null; er enthält also noch $x-b$ als Fach und lässt sich durch $x-b$ teilen. Es ist demnach auch der Bruch

$$\frac{R_x - \frac{R_{xb}}{\varphi_{xb}} \varphi_x}{x-b} = F_{01}x \text{ eine Höhenreihe von } x \text{ zu ganzen Plusstufen.}$$

Der gegebene echte Bruch $\frac{R_x}{f_x}$ ist also nach (d) in zwei Stücke zerlegt, in $\frac{B_0}{(x-b)^b}$, wo der Zähler eine endliche bestimmte feste

GröÙe und in $\frac{F_0 x}{(x-b)^{b-1} \varphi_0 x}$, wo der Zähler und der Nenner Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen ganz von der Form des gegebenen Bruches sind, der Grad des Nenners aber um eine Einheit niedriger ist.

Wenden wir nun das gleiche Verfahren auf diesen neuen Bruch an, so erhalten wir

$$\frac{F_0 x}{(x-b)^b \varphi_0 x} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \frac{F_1 x}{(x-b)^{b-2} \varphi_1 x},$$

$$B_1 = \frac{F_1 x_b}{\varphi_1 x_b} F_0 x = \frac{F_1 x - B_1 \varphi_0 x}{x-b}.$$

Setzen wir dies gleiche Verfahren so weiter fort, so müssen wir zu der Gleichung gelangen

$$\frac{F_0 x}{(x-b)^b \varphi_0 x} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{F_b x}{\varphi_b x}.$$

Setzen wir nun ferner $\psi_0 x = (x-b)^b \dots (x-l)^l$, so ist $\varphi_0 x = (x-c)^c \psi_0 x$.

also $\frac{F_0 x}{\varphi_0 x} = \frac{F_0 x}{(x-c)^c \psi_0 x}$. Mit diesem echten Bruche ganzer Höhenreihen lassen sich wieder dieselben Umwandlungen vornehmen, wie mit dem gegebenen Bruche. Es wird also

$$\frac{F_0 x}{\varphi_0 x} = \frac{F_0 x}{(x-c)^c \psi_0 x} = \frac{C_0}{(x-c)^c} + \frac{C_1}{(x-c)^{c-1}} + \frac{C_2}{(x-c)^{c-2}} + \dots$$

$$+ \frac{C_{c-1}}{x-c} + \frac{F_c x}{\psi_c x}.$$

Indem man dies Verfahren so weiter fortsetzt, gelangt man schliesslich zu der im Satze aufgestellten Gleichung.

Uns bleibt nun noch die Aufgabe, die GröÙen B_0, B_1, \dots, L_{l-1} zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu vereinfachen, betrachten wir zuerst den Fall, wo $b=c=\dots=l=1$ ist, d. h. wo der Nenner $f_0 x = (x-b)(x-c)(x-d) \dots (x-l)$ keine gleichen Fache enthält.

262. **Satz.** Wenn in dem echten Bruche zweier Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen der Nenner $f_0 x = (x-b)(x-c) \dots (x-l)$ keine gleichen Fache enthält, so ist

$$\frac{R_x}{f_0 x} = \frac{S_{0,m} A_0 x^a}{S_{0,n} a_0 x^a} = \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \dots + \frac{L}{x-l} \text{ und ist}$$

$\frac{R_x}{f_0 x} = B$, sofern $x=b$, dagegen gleich C , sofern $x=c$, gleich D , sofern $x=d, \dots$ gesetzt wird.

Beweis. Nach 261 ist in diesem Falle

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \cdots + \frac{L}{x-1}$$

und ist nach (b) im vorigen Satze $B = \frac{F_0 b}{\varphi_0 b}$ und nach (a)

$f_0 x = (x-b)\varphi_0 x$, hieraus folgt

$$\frac{d}{dx} f_0 x = (x-b) \frac{d}{dx} \varphi_0 x + \varphi_0 x, \text{ also ist für } x=b \quad \frac{d}{dx} f_0 b = \varphi_0 b.$$

Wir haben demnach $B = \frac{F_0 b}{\varphi_0 b} = \frac{F_0 b}{\frac{d}{dx} f_0 b}$, d. h. $B = \frac{F_0 x}{\frac{d}{dx} f_0 x}$, sofern in diesen

Folgen $x=b$ gesetzt wird.

Ganz entsprechend ergibt sich für jeden andern Zähler

$$C = \frac{F_0 c}{\frac{d}{dx} f_0 c} \quad D = \frac{F_0 d}{\frac{d}{dx} f_0 d} \cdots L = \frac{F_0 l}{\frac{d}{dx} f_0 l}$$

d. h. der Zähler gleich $\frac{F_0 x}{\frac{d}{dx} f_0 x}$, sofern in dieser Folge x gleich der entsprechenden Wurzel gesetzt wird.

Als Beispiel diene der Bruch $\frac{x^2-5}{x^3+5x^2+2x-8}$,

wo der Nenner $x^3+5x^2+2x-8=(x-1)(x+2)(x+4)$ ist, dann ist

$$\frac{F_0 x}{\frac{d}{dx} f_0 x} = \frac{x^2-5}{3x^2+10x+2}, \text{ also } B = \frac{1-5}{3+10+2} = -\frac{4}{15}, \quad C = \frac{4-5}{12-10+2} = -\frac{1}{4},$$

$$D = \frac{16-5}{48-40+2} = \frac{11}{10},$$

$$\text{mithin } \frac{x^2-5}{x^3+5x^2+2x-8} = -\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{x+4}.$$

Satz. Wenn in dem vorigen Satze zwei Wurzeln b und c 263. einander conjugirte Richtgrößen sind, so sind auch ihre Zähler B und C einander conjugirte Richtgrößen und lassen sich die beiden Teilbrüche in einen Bruch von der Form $\frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2}$ zusammenziehen, aus welchem alle J größen verschwunden sind.

Beweis. Wenn in dem Nenner eine Wurzel b eine Richtgröße (komplexe Größe) $b=p+iq$ ist, so ist nach Zahlenlehre 573 auch eine zweite Wurzel c die dazu conjugirte Größe $c=p-iq$. Dann erhält also der vorige Satz die Form

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{B}{x-(p+iq)} + \frac{C}{x-(p-iq)} + \frac{D}{x-d} + \cdots + \frac{L}{x-1}.$$

Hier ist $B = \frac{F_0 x}{d_x f_0 x}$, wenn $x = p + iq$ gesetzt und $C = \frac{F_0 x}{d_x f_0 x}$, wenn

$x = p - iq$ gesetzt, d. h. beide werden Richtgrößen und zwar, wenn $B = M + iN$ ist, so wird $C = M - iN$. Fügen wir nun die beiden Brüche einander zu, so erhalten wir, da im Nenner $(x - p - iq)(x - p + iq) = (x - p)^2 + q^2$ ist,

$$\frac{(M + iN)(x - p + iq) + (M - iN)(x - p - iq)}{(x - p)^2 + q^2} = \frac{2Mx - 2(Mp + Nq)}{(x - p)^2 + q^2} = \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2},$$

wo $P = 2M$ und $Q = -2(Mp + Nq)$ ist. Also wird dann

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2} + \frac{D}{x - d} + \dots + \frac{L}{x - l}.$$

Auf gleiche Weise kann man je zwei Brüche, deren Nenner zwei conjugirte Wurzeln sind, behandeln.

Als Beispiel behandle ich

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{5x - 3}{x^3 - x^2 - 4x + 2}; \quad \frac{F_0 x}{d_x f_0 x} = \frac{5x - 3}{3x^2 - 2x - 4}$$

Wurzeln $x = 1 + i$, $x = 1 - i$, $x = -1$

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{A}{x - 1 - i} + \frac{B}{x - 1 + i} + \frac{C}{x + 1}$$

$$A = -\frac{1}{20}(11 + 13i), \quad B = -\frac{1}{20}(11 - 13i), \quad C = -8$$

$$\text{und } \frac{Px + Q}{(x - p)^2 + q^2} = -\frac{1/10(11x - 24)}{x^2 - 2x + 2}.$$

264. **Satz** Wenn in dem echten Bruche zweier Höhenreihen von x zu ganzen Plusstufen der Nenner $f_0 x = (x - b)^b \varphi_0 x$ gleiche Fache und zwar b gleiche Fache $x - b$ enthält, so ist

$$\frac{F_0 x}{f_0 x} = \frac{\sum_{0,m} A_m x^m}{\sum_{0,n} a_n x^n} = \frac{B_0}{(x - b)^b} + \frac{B_1}{(x - b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x - b} + \frac{F_{0b} x}{\varphi_0 x}$$

und setzen wir hier

$$B_0 + B_1(x - b) + \dots + B_{b-1}(x - b)^{b-1} = X$$

und bezeichnen wir mit X_b den Wert dieser Folge, wo $x = b$ gesetzt

$$\text{ist, so ist } B_0 = X_b, \quad B_1 = \frac{d}{dx} X_b, \dots, B_a = \frac{d^a}{dx^a} X_b$$

$$\text{und ist } F_0 x_b = B_0 \varphi_0 x_b, \quad \frac{d^m}{dx^m} F_0 x_b = \sum_{a=0}^m S_{m-a} \frac{d^{m-a}}{dx^{m-a}} \varphi_0 x_b$$

$$\frac{d^a}{dx^a} X_b = \frac{m!}{(m-a)!} B_a \frac{d^{m-a}}{dx^{m-a}} \varphi_0 x_b \text{ und hieraus } B_a \text{ zu berechnen.}$$

Beweis. Nach 261a ist

$$\frac{f_{0x}}{f_{0x}} = \frac{S_{0,m} A_a x^a}{S_{0,n} a_a x^a} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{F_{0x}}{\varphi_{0x}}$$

auch ist $f_{0x} = (x-b)^b \varphi_{0x}$. Hieraus ergibt sich, wenn wir Alles auf den Nenner $(x-b)^b \varphi_{0x}$ bringen

$$F_{0x} = [B_0 + B_1(x-b) + \dots + B_{b-1}(x-b)^{b-1}] \varphi_{0x} + (x-b)^b F_{00x}$$

und wenn wir $B_0 + B_1(x-b) + \dots + B_{b-1}(x-b)^{b-1} = X$ setzen, und jede Folge von x , für welche $x=b$ gesetzt ist, mit Folge x_b bezeichnen.

$$F_{0x} = X \varphi_{0x} + (x-b)^b F_{00x} \text{ und für } x=b \quad F_{0x_b} = X_b \varphi_{0x_b}.$$

Nun ist aber, wenn wir die Diffe von X_b entwickeln

$$B_0 = X_b, B_1 = \frac{d}{dx} X_b; \quad 1 \cdot 2 B_2 = \frac{d^2}{dx^2} X_b; \quad a! B_a = \frac{d^a}{dx^a} X_b.$$

Wir werden also die sämtlichen Größen B_0, B_1, \dots, B_{b-1} unmittelbar haben, wenn wir die Größen $X_b, \frac{d}{dx} X_b, \dots, \frac{d^{b-1}}{dx^{b-1}} X_b$ haben.

$$\text{Es ist aber } F_{0x_b} = X_b \varphi_{0x_b} = B_0 \varphi_{0x_b};$$

$$\frac{d}{dx} F_{0x_b} = X_b \frac{d}{dx} \varphi_{0x_b} + \varphi_{0x_b} \frac{d}{dx} X_b = B_0 \frac{d}{dx} \varphi_{0x_b} + B_1 \varphi_{0x_b}$$

und nach 92

$$\frac{d^m}{dx^m} F_{0x_b} = S_{m,a} \frac{d^{m-a}}{dx^{m-a}} \varphi_{0x_b} \frac{d^a}{dx^a} X_b = \frac{m!}{S_{(m-a),a}} B_a \frac{d^{m-a}}{dx^{m-a}} \varphi_{0x_b},$$

$$\text{da } m^a \cdot a! = \frac{m!}{a! (m-a)!} \text{ und } a! = \frac{m!}{(m-a)!} \text{ ist.}$$

Hieraus lassen sich, da F_{0x_b} und φ_{0x_b} bekannt sind, die Folgen $X_b, \frac{d}{dx} X_b, \dots, \frac{d^{b-1}}{dx^{b-1}} X_b$ berechnen.

$$\text{Als Beispiel berechne ich } \frac{f_{0x}}{f_{0x}} = \frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x^5 - x^4 - x^3 + x^2}$$

$$\text{und setze } x_b = 0, \quad \varphi_{0x} = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1, \quad F_{0x} = 1$$

$$\frac{d}{dx} \varphi_{0x} = 3x^2 - 2x - 1 \quad \frac{d}{dx} F_{0x} = 0,$$

$$\text{so ist } B_0 = 1, \quad \frac{d}{dx} F_{0x} = 0 = B_0 \frac{d}{dx} \varphi_{0x_b} + \varphi_{0x_b} B_1 = 1(-1) + 1 \cdot B_1$$

$$B_1 = 1.$$

Ferner

$$x_c = 1 \quad \varphi_{0x} = x^2(x+1) = x^3 + x^2 \quad \frac{d}{dx} \varphi_{0x} = 3x^2 + 2x$$

$$C_0 = \frac{f_{0x_c}}{\varphi_{0x_c}} = \frac{1}{2} \quad \frac{d}{dx} F_{0x_c} = 0 = C_0 \frac{d}{dx} \varphi_{0x_c} + \varphi_{0x_c} C_1 = C_0 \cdot 5 + 2C_1$$

$$C_1 = -\frac{5}{4}.$$

Endlich

$$x_d = -1 \quad D = \frac{F_0 x_d}{g_0 x_d} = \frac{1}{4}, \text{ somit ist}$$

$$\frac{1}{x^5 - x^4 - x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}.$$

Wenn in der Gleichung $f_0 x = (x-b)^b(x-c)^c \dots (x-l)^l$ zwei Wurzeln einander conjugirte Richtgrößen sind, z. B.

$f_0 x = (x-b-ic)^b(x-b+ic)^b \dots (x-l)^l$, so sind auch die Zähler derselben wieder conjugirte Richtgrößen und kann man die Teilbrüche

$$\frac{M+iN}{(x-(b+ic))^b} + \frac{M-iN}{(x-(b-ic))^b}$$

wieder entsprechend wie in Satz 263 mit einander vereinigen zu dem Nenner $((x-b)^2 + c^2)^b$.

2. Das Integriren der Teilbrüche von Höhen.

Nachdem wir die Brüche in Teilbrüche zerlegt haben, wenden wir uns nun zu dem Integriren dieser Teilbrüche und dadurch der ganzen Brüche.

265. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{Ax^m}{(a+bx)^n} = S(-1)^a \frac{A m^a a^a}{(m-n-a+1)b^{m+1}} (a+bx)^{m-n-a+1}.$$

Beweis. Wir setzen $a+bx=z$, $b=\frac{d}{x}z$, $x=\frac{z-a}{b}$, dann

$$\begin{aligned} \text{ist } \frac{Ax^m}{(a+bx)^n} &= \frac{A(z-a)^m}{b^m \cdot z^n} = \frac{A}{b^m \cdot z^n} (z-a)^m \\ &= \frac{A}{b^m z^n} S(-1)^a \cdot m^a z^{m-a} a^a = \int \frac{(-1)^a A \cdot m^a \cdot a^a}{b^m} z^{m-n-a} \\ &= \int \frac{(-1)^a A \cdot m^a \cdot a^a}{b^m} (a+bx)^{m-n-a}, \text{ also ist} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{Ax^m}{(a+bx)^n} = \int \frac{(-1)^a \cdot A \cdot m^a \cdot a^a}{(m-n-a+1)b^{m+1}} (a+bx)^{m-n-a+1}.$$

266. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-r} \frac{Ax^m}{(a+bx)^n} = S(-1)^a \frac{A \cdot a^a \cdot m^a (m-n-a)!}{b^{m+r} (m+r-n-a)!} (a+bx)^{m+r-n-a}.$$

Beweis. Unmittelbar nach 265.

267. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1} \frac{B}{x-b} = B I_0(x-b)$ * wo $x > b$.

Beweis. Unmittelbar nach 197.

268. **Satz.** Wenn $\frac{F_x}{f_0 x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$

und $f_0 x = (x-b)(x-c) \dots (x-l)$ ist, wo die Wurzeln sämmtlich einander ungleich, auch $x > b$, $x > c, \dots x > l$ und $B, C, \dots L$ nach

261 bestimmt find, fo ist

$$\frac{d^{r-1} E_x}{f_x} = B \cdot l_e(x-b) + C \cdot l_e(x-c) + \dots + L \cdot l_e(x-l).$$

Beweis. Unmittelbar aus 267 und 262.

Satz.

269.

$$\frac{d^{-(r+1)} E_x}{f_x} = \frac{B(x-b)^r}{r!} \left[l_e(x-b) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right) \right]$$

* wo $x > b$ und $r > 0$.

Beweis. Unmittelbar nach 240, wenn wir $n = 1$, $m = r$ setzen.

$$\text{Satz. Wenn } \frac{E_x}{f_x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad 270.$$

und $f_x = (x-b)(x-c)\dots(x-l)$ ist, wo die Wurzeln sämmtlich einander ungleich, auch $x > b$, $x > c, \dots x > l$ und $r > 0$ ist, auch $B, C, \dots L$ nach 261 bestimmt find, fo ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{-(r+1)} E_x}{f_x} &= \frac{B(x-b)^r}{r!} l_e(x-b) + \frac{C(x-c)^r}{r!} l_e(x-c) + \dots \\ &+ \frac{L(x-l)^r}{r!} l_e(x-l) \\ &+ [B(x-b)^r + C(x-c)^r + \dots + L(x-l)^r] \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Beweis. Unmittelbar nach 269 und 262.

Satz. Wenn $n > 1$, $x > b$ und $r > 0$ ist, fo ist

271.

$$\frac{d^{-r} E_x}{(x-b)^n} = \frac{(-1)^r r! B}{(n-r)! (x-b)^{n-r}} \quad * \text{ wo } r < n \text{ ist}$$

$$\frac{d^{-r} E_x}{(x-b)^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! B l_e(x-b) \quad \text{wo } r = n \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{-r} E_x}{(x-b)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! B}{(r-n)!} (x-b)^{r-n} \left[l_e(x-b) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-n} \right) \right] \end{aligned}$$

wo $r > n$ ist.

Beweis. Der erste Teil des Satzes unmittelbar nach 233, der zweite unmittelbar nach 234 und dem ersten Teile, der dritte Teil unmittelbar nach 240.

$$\text{Satz. Wenn } \frac{E_x}{f_x} = \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad 272.$$

und $f_x = (x-b)^b (x-c)^c \dots (x-l)^l$

wo f_x gleiche Wurzeln enthält, auch $x > b$, $x > c, \dots x > l$ und $B_0, B_1, \dots B_{l-1}$ nach 264 bestimmt find, auch $r > 0$ ist, fo ist

$$\frac{d^{-r} B_0 x}{f_0 x} = \frac{d^{-r} B_0}{(x-b)^0} + \frac{d^{-r} B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{d^{-r} B_{b-1}}{x-b} \\ + \frac{d^{-r} C_0}{(x-c)^c} + \frac{d^{-r} C_1}{(x-c)^{c-1}} + \dots + \frac{d^{-r} C_{c-1}}{x-c} \\ + \dots \\ + \frac{d^{-r} L_0}{(x-l)^l} + \frac{d^{-r} L_1}{(x-l)^{l-1}} + \dots + \frac{d^{-r} L_{l-1}}{x-l}$$

wo $\frac{d^{-r}}{x}$ von den Teilbrüchen nach 270 genommen werden.

Beweis. Unmittelbar nach 264

Durch die vorhergehenden Sätze können wir ganz allgemein jede Integrale beliebigen Grades von jedem Bruche von Höhenreihen mit ganzen Plusstufen entwickeln. Für die Fälle, wo es sich um erste Integrale handelt von Brüchen, deren Nenner Jgrößen als Wurzeln enthält, hat man die folgenden Sätze entwickelt, welche vielfach in Gebrauch sind und daher noch erwähnenswert sind.

273. Satz.

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{(4ac - b^2)^{1/2}} \arctan \left(\frac{b + 2cx}{(4ac - b^2)^{1/2}} \right) \\ * \text{ wo } 4ac - b^2 > 0 \\ = \frac{2}{b + 2cx} \quad * \text{ wo } 4ac - b^2 = 0 \\ = \frac{1}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \log \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2} + b + 2cx}{(b^2 - 4ac)^{1/2} - (b + 2cx)} \\ * \text{ wo } 4ac - b^2 < 0 \text{ und } (b^2 - 4ac)^{1/2} > b + 2cx \\ = \frac{1}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \log \frac{b + 2cx + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{b + 2cx - (b^2 - 4ac)^{1/2}} \\ * \text{ wo } 4ac - b^2 < 0 \text{ und } (b^2 - 4ac)^{1/2} < b + 2cx.$$

Beweis. Es ist $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2}$

$$= \frac{d^{-1}}{x} \frac{c}{ac + bcx + c^2 x^2} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{c}{(ac - \frac{1}{4} b^2) + (cx + \frac{1}{2} b)^2}$$

Wir setzen hier $y = cx + \frac{1}{2} b = \frac{b + 2cx}{2}$, also $\frac{d}{x} y = c$

und $(ac - \frac{1}{4} b^2)^{1/2} = \alpha$, $(4ac - b^2)^{1/2} = 2\alpha$.

1. Es sei $ac - \frac{1}{4} b^2 > 0$ oder $4ac - b^2 > 0$, also α reell, so ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{\frac{dy}{x}}{a^2 + y^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\tan = \frac{y}{a}\right) \quad (\text{nach 247}),$$

$$\text{also} \quad = \frac{2}{(4ac - b^2)^{1/2}} \arctan\left(\tan = \frac{b + 2cx}{(4ac - b^2)^{1/2}}\right).$$

2. Es sei $4ac - b^2 = 0$, dann ist $a = 0$, also

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{\frac{dy}{x}}{y^2} = -\frac{1}{y} = -\frac{2}{b + 2cx}. \quad (\text{nach 196}).$$

3. Es sei $4ac - b^2 < 0$, also $b^2 - 4ac > 0$ und sei $(b^2 - 4ac)^{1/2} > b + 2cx$. Dann setzen wir $(\frac{1}{4}b^2 - ac)^{1/2} = \alpha$, also $\alpha > y$, dann ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{\frac{dy}{x}}{-\alpha^2 + y^2} = \frac{d^{-1}(-1)\frac{dy}{x}}{\alpha^2 - y^2} = -\frac{1}{2\alpha} \log \frac{\alpha + y}{\alpha - y}$$

(nach 245), also

$$= -\frac{1}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \log \frac{(b^2 - 4ac)^{1/2} + b + 2cx}{(b^2 - 4ac)^{1/2} - b - 2cx}.$$

Da sonst der Log von einer Strichgröße zu nehmen wäre.

4. Es sei $4ac - b^2 < 0$, also $b^2 - 4ac > 0$ und sei $(b^2 - 4ac)^{1/2} < b + 2cx$. Dann setzen wir wieder $(\frac{1}{4}b^2 - ac)^{1/2} = \alpha$, dann ist $\alpha < y$ und es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} &= \frac{d^{-1}}{x} \frac{\frac{dy}{x}}{y^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha} \log \frac{y + \alpha}{y - \alpha} \quad (\text{nach 245}), \text{ also} \\ &= -\frac{1}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \log \frac{b + 2cx + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{b + 2cx - (b^2 - 4ac)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Für diese Formel lassen sich die höhern Integren nicht mehr ableiten, sofern nicht $4ac - b^2 = 0$ ist.

Satz.

274.

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c} \log(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2}.$$

Beweis. Es ist nach 112

$$\frac{d}{x} \log(a + bx + cx^2) = \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2}, \text{ also ist}$$

$$\log(a + bx + cx^2) = \frac{d^{-1}}{x} \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} \quad (\text{und nach 195})$$

$$= b \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} + 2c \frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{a + bx + cx^2},$$

mithin ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c} l_c(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2}$$

und letztere GröÙe nach 273 bekannt.

275. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} = \frac{B}{2c} l_c(a + bx + cx^2) + \frac{2Ac - Bb}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2}$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} &= B \frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{a + bx + cx^2} + A \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} \\ &= \frac{B}{2c} l_c(a + bx + cx^2) - \frac{Bb}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} + A \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2} \\ &\quad \text{(nach 274)} \\ &= \frac{B}{2c} l_c(a + bx + cx^2) + \frac{2Ac - Bb}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a + bx + cx^2}. \end{aligned}$$

276. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a + bx + cx^2)^{a+1}} = \frac{b + 2cx}{a(4ac - b^2)(a + bx + cx^2)^a} + \frac{(2a - 1)2c}{a(4ac - b^2)} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a + bx + cx^2)^a}$

oder $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{a+1}} = \frac{\alpha}{a\lambda T^a} + \frac{(2a - 1)2c}{a\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^a}$,

wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$.

Beweis. Wir setzen $a + bx + cx^2 = T$, $4ac - b^2 = \lambda$, und $b + 2cx = \alpha$, dann ist $\frac{d}{dx} T = b + 2cx$,

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha}{T^a} = -\alpha \frac{\alpha^2}{T^{a+1}} + 2c \frac{1}{T^a}, \text{ auch ist}$$

$$cT = ac + bcx + cx^2 = ac - \frac{1}{4}b^2 + (cx + \frac{1}{2}b)^2,$$

$$\text{also } 4cT = 4ac - b^2 + (2cx + b)^2 = \lambda + \alpha^2,$$

$$\text{also } \alpha^2 = (b + 2cx)^2 = 4cT - \lambda, \text{ demnach ist}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha}{T^a} = +\alpha\lambda \frac{1}{T^{a+1}} - (4cT - \lambda) \frac{1}{T^a} = \alpha\lambda \frac{1}{T^{a+1}} - 2c(2a - 1) \frac{1}{T^a}.$$

Und wenn man die Integren nimmt

$$\frac{\alpha}{T^a} = \alpha\lambda \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{a+1}} - 2c(2a - 1) \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^a}, \text{ mithin}$$

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{a+1}} = \frac{\alpha}{a\lambda T^a} + \frac{(2a - 1)2c}{a\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^a}.$$

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}} = \sum_{0, n-1} \frac{(2n+1-2c)! 2^c c^c \alpha}{n(n-1) \dots (n-c) \lambda^{c+1} T^{n-c}} + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot 2^n c^n}{n! \lambda^n} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$ 277.

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$ und wo $(2n+1-2c)! = (2n+1-2)(2n+1-4) \dots (2n+1-2c)$ ist, und für $c=0$ $(2n+1-2c)! = 1$ gesetzt ist.

Beweis: 1. Dieser Satz gilt für $n=1$, denn es ist nach 276

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^2} = \frac{\alpha}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}.$$

2. Wenn der Satz für n gilt, so gilt er auch für $n+1$, denn es ist nach 276

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+2}} = \frac{\alpha}{(n+1)\lambda T^{n+1}} + \frac{(2(n+1)-1)2c}{(n+1)\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}}$$

mithin, wenn wir nach der Voraussetzung $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}}$ entwickeln,

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+2}} &= \frac{\alpha}{(n+1)\lambda T^{n+1}} \\ &+ \frac{(2(n+1)+1-2)2c}{(n+1)\lambda} \sum_{0, n-1} \frac{(2n+1-2c)! 2^c c^c \alpha}{n(n-1) \dots (n-c) \lambda^{c+1} T^{n-c}} \\ &+ \frac{(2(n+1)-1)(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot 2^{n+1} c^{n+1}}{(n+1)! \lambda^{n+1}} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T} \end{aligned}$$

und setzen wir $b=c+1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+2}} &= \sum_{0, (n+1)-1} \frac{(2(n+1)+1-2b)! 2^b c^b \alpha}{(n+1)n(n-1) \dots (n+1-b) \lambda^{b+1} T^{n+1-b}} \\ &+ \frac{(2(n+1)-1)(2n-1) \dots 3 \cdot 1 \cdot 2^{n+1} c^{n+1}}{(n+1)! \lambda^{n+1}} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}. \end{aligned}$$

Der Satz gilt also, wenn er für n gilt, auch für $n+1$. Nun gilt er für 1, also auch für 2, 3... kurz allgemein.

Wir erhalten für:

$$n=1, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^2} = \frac{\alpha}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

$$n=2, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^3} = \frac{\alpha}{2\lambda T^2} + \frac{3c\alpha}{\lambda^2 T} + \frac{6c^2}{\lambda^2} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

$$n=3, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^4} = \frac{\alpha}{3\lambda T^3} + \frac{5c\alpha}{3\lambda^2 T^2} + \frac{10c^2\alpha}{\lambda^3 T} + \frac{20c^3}{\lambda^3} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

$$n=4, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^5} = \frac{\alpha}{4\lambda T^4} + \frac{7c\alpha}{6 \cdot \lambda^2 T^3} + \frac{35c^2\alpha}{6 \cdot \lambda^3 T^2} + \frac{35c^3\alpha}{\lambda^4 T} + \frac{70c^4}{\lambda^4} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

$$n=5, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^5} = \frac{\alpha}{5\lambda T^5} + \frac{9c\alpha}{10\lambda^2 T^4} + \frac{21 \cdot c^2 \alpha}{5 \cdot \lambda^3 T^3} + \frac{21c^3 \alpha}{\lambda^4 T^2} + \frac{126c^4 \alpha}{\lambda^5 T} + \frac{252c^5}{\lambda^5} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

$$n=6, \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^6} = \frac{\alpha}{6\lambda T^6} + \frac{11c\alpha}{15\lambda^2 T^5} + \frac{33c^2 \alpha}{10\lambda^3 T^4} + \frac{77c^3 \alpha}{5\lambda^4 T^3} + \frac{77c^4 \alpha}{\lambda^5 T^2} + \frac{462c^5 \alpha}{\lambda^6 T} + \frac{924c^6}{\lambda^6} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T}$$

278. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1}} = - \frac{1}{(2n-m+1)c} \frac{x^{m-1}}{T^n} - \frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}$

wo $T = a + bx + cx^2$ gesetzt ist.

Beweis. Es ist $\frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1) \frac{x^{m-2}}{T^n} - n \frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^{n+1}}$

und wenn man rechts das erste Glied mit $\frac{T}{T}$ vervielfacht, und für T im Zähler den Wert $T = a + bx + cx^2$ setzt, so ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1)a \frac{x^{m-2}}{T^{n+1}} - (n-m+1)b \frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} - (2n-m+1)c \frac{x^m}{T^{n+1}}.$$

Hieraus ergibt sich die entsprechende Integerngleichung.

$$\frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1)a \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1}} - (n-m+1)b \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} - (2n-m+1)c \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1}} \text{ oder}$$

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1}} = - \frac{1}{(2n-m+1)c} \frac{x^{m-1}}{T^n} - \frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}.$$

Nach dieser Formel kann man nun die Formeln entwickeln

$$m=1, \frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{T^{n+1}} = - \frac{1}{2ncT^n} - \frac{b}{2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}}$$

$$m=2, \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^2}{T^{n+1}} = - \frac{x}{(2n-1)cT^n} - \frac{(n-1)b}{(2n-1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x}{T^{n+1}} + \frac{a}{(2n-1)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}}$$

$$m=3, \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^3}{T^{n+1}} = - \frac{x^2}{(2n-2)cT^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-2)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^2}{T^{n+1}} + \frac{2a}{(2n-2)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}}$$

u. f. w.

Durch Anwendung dieser Formeln kann man dann auch für

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^h}{(a + bx + cx^2)^{n+1}}$$
 die Formeln entwickeln.

279. **Satz.** $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x \cdot T^{n+1}} = \frac{d^{-1}}{y} \frac{y^{2n+1}}{(c + by + ay^2)^{n+1}}$

* wo $y = \frac{1}{x}$ oder $x = \frac{1}{y}$ ist.

Beweis. Man setze $y = \frac{1}{x}$, also $x = \frac{1}{y}$ und $\frac{d}{dy}x = -\frac{1}{y^2}$,

dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x(a+bx+cx^2)^{n+1}} &= \frac{d}{dx}^{-1} \frac{y}{\left(a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{d}{dx}^{-1} \frac{y^{2n+3}}{(ay^2+by+c)^{n+1}} = \frac{d}{dy}^{-1} \frac{y^{2n+3}}{(ay^2+by+c)^{n+1}} \frac{dx}{dy} \\ &= -\frac{d}{dy}^{-1} \frac{y^{2n+1}}{(ay^2+by+c)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Diese Formel kann man dann integren und in dem Ergebnisse wieder $\frac{1}{x}$ statt y setzen.

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^m T^{n+1}} &= -\frac{1}{(m-1)a x^{m-1} T^n} \\ &- \frac{(n+m-1)b}{(m-1)a} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^{m-1} T^{n+1}} - \frac{(2n+m-1)c}{(m-1)a} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^{m-2} T^{n+1}}. \end{aligned} \quad 280.$$

Beweis. Setzen wir in 278 statt m nun $-m+2$, da der Satz auch für $-m$ gilt, indem er die Umkehrung einer Diff-Formel ist, welche für alle möglichen m und n richtig bleibt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^{m-2} T^{n+1}} &= -\frac{1}{(2n+m-1)c} \cdot \frac{1}{x^{m-1} T^n} \\ &- \frac{(n+m-1)b}{(2n+m-1)c} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^{m-1} T^{n+1}} - \frac{(m-1)a}{(2n+m-1)c} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x^m T^{n+1}} \end{aligned}$$

und hieraus, wenn man die letzte Integre auf die linke Seite stellt, unmittelbar den Satz.

3. Das Integren von Brüchen mit der Tiefe zweiten Grades.

Wenn in dem gegebenen Bruche Tiefen vorkommen, so lassen sich die Integren nur noch unter gewissen Bedingungen gewinnen, welche wir im Folgenden besprechen wollen.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{(a+bx)^n}{(a+bx)^{1/2}} = \frac{d}{dx}^{-1} (a+bx)^{n-1/2} = \frac{2(a+bx)^{n+1/2}}{(2n+1)b}. \quad 281.$$

Beweis. Nach 232 ist $\frac{d}{dx}^{-1} (a+bx)^\mu = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}$, setzen wir hier $\mu = n - \frac{1}{2}$, so folgt unmittelbar der Satz.

282. **Satz.** $\frac{d^{-1} x^m (a + bx)^n}{(a + bx)^{1/2}} = \frac{d^{-1} x^m (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}$

$$= \frac{2x^m (a + bx)^{n+1/2}}{(2m + 2n + 1)b} - \frac{2ma}{(2m + 2n + 1)b} \frac{d^{-1} x^{m-1} (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}.$$

Beweis. Wenn man teilweise integriert nach 212, so erhält man

$$\frac{d^{-1} x^m (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}} = x^m \frac{d^{-1} (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}$$

$$= m \frac{d^{-1} x^{m-1} (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}$$

und nach 281

$$= \frac{2x^m (a + bx)^{n+1/2}}{(2n + 1)b} - \frac{2m}{(2n + 1)b} \frac{d^{-1} x^{m-1} (a + bx)^{n+1/2}}{(a + bx)^{1/2}}$$

Wenn man diese Gleichung mit $(2n + 1)b$ vervielfacht und im letzten Gliede $(a + bx)^{n+1/2} = (a + bx)(a + bx)^{n-1/2}$ setzt, so erhält man

$$(2n + 1)b \frac{d^{-1} x^m (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}} = 2x^m (a + bx)^{n+1/2} \\ - 2ma \frac{d^{-1} x^{m-1} (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}} - 2mb \frac{d^{-1} x^{m-1} (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}.$$

Bringt man hier das letzte Glied allein auf die linke Seite, so hat man die Gleichung des Satzes.

283. **Satz.**

$$\frac{d^{-1} (A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}} = \int_0^m A_0 \frac{d^{-1} x^0 (a + bx)^{n-1/2}}{(a + bx)^{1/2}}.$$

Um ferner die Integre von $\frac{1}{(a + bx + cx^2)^{1/2}}$ zu gewinnen, schlagen wir denselben Weg ein, den wir in 273 betraten.

284. **Satz.**

$$\frac{d^{-1} 1}{(a + bx + cx^2)^{1/2}} = \frac{1}{c^{1/2}} \log \left[\frac{1}{2} b + cx + c^{1/2} (a + bx + cx^2)^{1/2} \right]$$

* wo $c > 0$

$$= \frac{1}{(-c)^{1/2}} \arcsin \left[\frac{-2cx - b}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \right]$$

* wo $c < 0$

Beweis: 1. Es sei $+c$ eine Plusgröße, dann ist

$$ac + bcx + c^2 x^2 = (ac - \frac{1}{4}b^2) + (\frac{1}{2}b + cx)^2.$$

Setzen wir hier $ac - \frac{1}{4}b^2 = \alpha^2$, und $\frac{1}{2}b + cx = y$, also $c = \frac{dy}{x}$, oder $\frac{dx}{y} = \frac{1}{c}$, so ist

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} &= x^{\frac{d}{2}-1} \frac{c^{1/2}}{(ac+bcx+c^2x^2)^{1/2}} = x^{\frac{d}{2}-1} \frac{c^{1/2}}{(\alpha^2+y^2)^{1/2}} \\
 &\quad \text{und nach 211} \\
 &= \frac{d}{y} \frac{c^{1/2}}{c(\alpha^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{c^{1/2}y} x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(\alpha^2+y^2)^{1/2}} \\
 &\quad \text{und nach 246} \\
 &= \frac{1}{c^{1/2}} l_0(y + (\alpha^2+y^2)^{1/2}) \\
 &= \frac{1}{c^{1/2}} l_0[1/2b + cx + (ac+bcx+c^2x^2)^{1/2}] \\
 &= \frac{1}{c^{1/2}} l_0[1/2b + cx + c^{1/2}(a+bx+cx^2)^{1/2}].
 \end{aligned}$$

2. Es sei $+c$ eine Strichgröße, und $-c = \gamma$, wo γ eine Plusgröße, dann ist

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} &= x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx-\gamma x^2)^{1/2}} = x^{\frac{d}{2}-1} \frac{\gamma^{1/2}}{(\alpha\gamma + b\gamma x - \gamma^2 x^2)^{1/2}} \\
 &= \gamma^{1/2} x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(1/4b^2 + \alpha\gamma) - (\gamma x - 1/2b)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Setzen wir hier

$$1/4b^2 + \alpha\gamma = \alpha^2 \text{ und } \gamma x - 1/2b = y; \quad x = \frac{y + 1/2b}{\gamma} \quad \frac{dx}{x} = \frac{1}{\gamma}, \text{ so ist}$$

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} &= \frac{\gamma^{1/2}}{y} x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(\alpha^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{1}{\gamma^{1/2}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\alpha}\right) \\
 &\quad \text{(nach 248)} \\
 &= \frac{1}{(-c)^{1/2}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{-2cx - b}{(b^2 - 4ac)^{1/2}}\right)
 \end{aligned}$$

wo wieder $\gamma = -c$ gesetzt ist.

3. Wenn $c=0$, so wird $a+bx+cx^2 = a+bx$ und führt auf Satz 281 zurück.

Satz.

285.

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a+1/2}} &= \frac{2(b+2c)}{(2a-1)(4ac-b^2)} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a-1/2}} \\
 &\quad + \frac{(a-1)2c}{(2a-1)(4ac-b^2)} x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{a-1/2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{oder } \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{a+1/2}} = \frac{2a}{(2a-1)\lambda} \frac{1}{T^{a-1/2}} + \frac{(a-1)8c}{(2a-1)\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{a-1/2}}$$

$$* \text{ wo } T = a + bx + cx^2, \quad a = b + 2c, \quad \lambda = 4ac - b^2.$$

Beweis. Nach Satz 276 ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1}} = \frac{a}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^n}$$

Setzen wir hier $n = a - 1/2$, so folgt unmittelbar der Satz.

$$286. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1/2}} = \frac{2a}{(2n-1)\lambda} \frac{1}{T^{n-1/2}}$$

$$+ \sum_{1, n-1} \frac{2a \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-c)(8c)^c}{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots (2n-(2c+1))\lambda^{c+1}} \frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}}$$

$$* \text{ wo } T = a + bx + cx^2, \quad a = b + 2cx, \quad \lambda = 4ac - b^2.$$

Beweis: 1. Dieser Satz gilt für $n=1$, denn es ist nach 285

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{1+1/2}} = \frac{2a}{\lambda} \frac{1}{T^{1/2}}$$

2. Wenn der Satz für n gilt, so gilt er auch für $n+1$, wenn wir $a = n+1$ setzen, denn es ist nach 285

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{(n+1)+1/2}} &= \frac{2a}{(2(n+1)-1)\lambda} \frac{1}{T^{(n+1)-1/2}} \\ &+ \frac{((n+1)-1)8c}{(2(n+1)-1)\lambda} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1/2}} \quad \text{und nach der Annahme} \\ &= \frac{2a}{(2(n+1)-1)\lambda} \frac{1}{T^{(n+1)-1/2}} + \frac{((n+1)-1)2c}{(2(n+1)-1)\lambda} \left[\frac{2a}{(2(n+1)-3)\lambda} \frac{1}{T^{n+1-3/2}} \right. \\ &+ \left. \sum_{1, n-1} \frac{2a(n-1)(n-2) \cdots (n-c)(8c)^c}{(2(n+1)-3)(2n-3) \cdots (2n-(2c+1))\lambda^{c+1}} \frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}} \right] \\ &= \frac{2a}{(2(n+1)-1)\lambda} \frac{1}{T^{(n+1)-1/2}} \\ &+ \sum_{1, n-1} \frac{2a((n+1)-1)((n+1)-2) \cdots ((n+1)-(c+1))(8c)^{c+1}}{(2(n+1)-1)(2(n+1)-3) \cdots (2(n+1)-(2(c+1)))\lambda^{c+2}} \frac{1}{T^{(n+1)-\frac{2(c+1)+1}{2}}} \end{aligned}$$

d. h. die Formel gilt auch für $n+1$, wo $c+1$ bis $(n+1)-1$ genommen wird. Die Formel gilt also allgemein.

$$287. \quad \text{Satz.}$$

$$\frac{d^{-1}}{x} T^{n+1/2} = \frac{2a}{(n+1)8c} T^{n+1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c} \frac{d^{-1}}{x} T^{n-1/2}$$

$$* \text{ wo } T = a + bx + cx^2, \quad a = b + 2cx, \quad \lambda = 4ac - b^2.$$

Beweis. Wir setzen in 285 $a = -n$, dann wird $a + 1/2 = -(n - 1/2)$ und $a - 1/2 = -(n + 1/2)$ und wir erhalten

$$\frac{d}{x}^{-1} T^{n-1/2} = -\frac{2a}{(2n+1)\lambda} T^{n+1/2} + \frac{(n+1)8c}{(2n+1)\lambda} \frac{d}{x}^{-1} T^{n+1/2}.$$

Setzen wir nun das letzte Glied allein auf die linke Seite und vervielfachen beide Seiten mit $\frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c}$, so erhalten wir

$$\frac{d}{x}^{-1} T^{n+1/2} = \frac{2a}{(n+1)8c} T^{n+1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c} \frac{d}{x}^{-1} T^{n-1/2}.$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{x}^{-1} T^{n+1/2} = \frac{2a \cdot T^{n+1/2}}{(n+1)8c} \quad 288.$$

$$+ \sum_{1,n} \frac{2a(2n+1)(2n-1) \dots (2n+3-2c)\lambda^c}{(n+1)n(n-1) \dots (n+1-c)(8c)^{c+1}} T^{n+1/2-c}$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n-1) \dots (2n+1-2c)\lambda^{c+1}}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots (n+1-c)(8c)^{c+1}} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{T^{1/2}}$$

* wo $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$ ist.

Beweis: 1. Der Satz gilt für $n=0$, denn es ist nach 287

$$\frac{d}{x}^{-1} T^{1/2} = \frac{2a}{8c} T^{1/2} + \frac{\lambda}{8c} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{T^{1/2}}.$$

2. Wenn der Satz für n gilt, so gilt er auch für $n+1$, denn es ist nach 287, wenn wir für n nun $n+1$ setzen

$$\frac{d}{x}^{-1} T^{(n+1)+1/2} = \frac{2a}{((n+1)+1)8c} T^{(n+1)+1/2} + \frac{(2(n+1)+1)\lambda}{(n+1+1)8c} \frac{d}{x}^{-1} T^{n+1/2}$$

und nach der Annahme

$$= \frac{2a}{((n+1)+1)8c} T^{(n+1)+1/2} + \frac{(2(n+1)+1)\lambda}{((n+1)+1)8c} \left[\frac{2a}{(n+1)8c} T^{n+1/2} \right.$$

$$+ \sum_{1,n} \frac{2a(2n+1)(2n-1) \dots (2n+3-2c)\lambda^c}{(n+1)n(n-1) \dots (n+1-c)(8c)^{c+1}} T^{n+1/2-c}$$

$$\left. + \frac{(2n+1)(2n-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \lambda^{n+1}}{(n+1) \cdot n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 (8c)^{n+1}} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{T^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{2a T^{(n+1)+1/2}}{((n+1)+1)8c} +$$

$$\sum_{1,n} \frac{2a(2(n+1)+1)(2(n+1)-1) \dots (2(n+1)+3-2(c+1))\lambda^{c+1}}{((n+1)+1)((n+1)-1) \dots ((n+1)+1-(c+1))(8c)^{c+2}} T^{(n+1)+1/2-(c+1)}$$

$$+ \frac{(2(n+1)+1)(2(n+1)-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \lambda^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)((n+1)-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 (8c)^{(n+1)+1}} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{T^{1/2}}$$

d. h. die Formel gilt auch für $n + 1$, wo $c + 1$ bis $n + 1$ genommen wird. Die Formel gilt also ganz allgemein.

$$289. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1/2}} = -\frac{1}{(2n-m)c} \cdot \frac{x^{m-1}}{T^{n-1/2}} \\ - \frac{(2n+1-2m)b}{(2n-m)2c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1/2}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m)c} \frac{d^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1/2}}.$$

Beweis. Unmittelbar aus Satz 277, wenn man statt n die Größe $n - 1/2$ einführt.

$$290. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^m T^{n+1/2}} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}T^{n-1/2}} \\ - \frac{(2(n+m)-3)b}{(m-1)2a} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-1}T^{n+1/2}} - \frac{(2n-m-2)c}{(m-1)a} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-2}T^{n+1/2}}.$$

Beweis. Unmittelbar aus 279, wenn man statt n die Größe $n - 1/2$ einführt.

Ein sehr fruchtbarer Weg, um Brüche, welche Tiefen enthalten, in Brüche mit Höhen zu verwandeln, ist die Einführung einer neuen Veränderlichen, durch welche die Tiefe in eine Höhe umgewandelt wird. Die Einführung geschieht nach dem Satze 211.

So setzt man

$$1. \quad (\alpha + \beta x)^{1/2} = y, \text{ also } x = \frac{y^2 - \alpha}{\beta} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{\beta}.$$

$$2. \quad (\alpha + \beta x)^{\frac{1}{n}} = y, \text{ also } x = \frac{y^n - \alpha}{\beta} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{\beta}.$$

3. Wenn $(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{1/2}$ vorkommt, so setzt man

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{1/2} - \beta x}{\alpha} = y, \text{ also } x = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 - y^2}{2y} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{1 + y^2}{2y^2} \\ (\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{1/2} = \alpha \frac{1 + y^2}{2y}.$$

4. Wenn $(\alpha^2 - \beta^2 x^2)^{1/2}$ vorkommt, so setzt man

$$\left(\frac{\alpha - \beta x}{\alpha + \beta x} \right)^{1/2} = y, \text{ also } x = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{4\alpha}{\beta} \frac{y}{(1 + y^2)^2} \\ (\alpha^2 - \beta^2 x^2)^{1/2} = \frac{2\alpha y}{1 + y^2}.$$

$$5. \quad (a + bx + cx^2)^{1/2} = y(\alpha + \beta x + x^2)^{1/2} = y(y - x) = y \frac{\alpha + \beta y + y^2}{\beta + 2y}, \text{ da} \\ x = \frac{y^2 - \alpha}{\beta + 2y}. \text{ Ferner } \frac{dx}{dy} = \frac{\alpha + \beta y + y^2}{(\beta + 2y)^2}, \text{ also nach 211}$$

$$\frac{a-1}{x} \frac{1}{(a+bx+cx^2)^{1/2}} = \frac{a-1}{y} \frac{\beta+2y}{\gamma(\alpha+\beta y+y^2)y^x} = \frac{a-1}{y} \frac{\beta+2y}{\gamma(\alpha+\beta y+y^2)} \frac{2(\alpha+\beta y+y^2)}{(\beta+2y)^2} = \frac{a-1}{y} \frac{2}{\gamma(\beta+2y)} = \frac{1}{y} \log(\beta+2y).$$

$$6. (a+bx-cx^2)^{1/2} = \gamma(\alpha+\beta x-x^2)^{1/2} = \gamma((x-a_1)(a_2-x))^{1/2} \\ = \gamma(x-a_1)y = \gamma \frac{(a_2-a_1)y}{1+y^2}, \text{ da } a_2-x = (x-a_1)y^2, \text{ also } x = \frac{a_2+a_1y^2}{1+y^2}.$$

$$\text{Ferner } \frac{a}{y^x} = \frac{2(a_1-a_2)y}{(1+y^2)^2}, \text{ also nach 211}$$

$$\frac{a-1}{x} \frac{1}{(a+bx-cx^2)^{1/2}} = \frac{a-1}{x} \frac{1+y^2}{\gamma(a_2-a_1)y} \frac{a}{y^x} \\ = \frac{a-1}{y} \frac{1+y^2}{\gamma(a_2-a_1)y} \frac{2(a_1-a_2)y}{(1+y^2)^2} = \frac{a-1}{y} - \frac{2}{\gamma(1+y^2)} = -\frac{2}{\gamma} \arctan(y).$$

Satz. Die Brüche mit Tiefen verwandelt man in Brüche mit 291. Höhen durch Einführung einer neuen Veränderlichen nach Satz 211, und nimmt dann die Integre.

4. Das Integren von Brüchen mit beliebigen Tiefen.

Wenn $\frac{a-1}{x} x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ zu suchen ist, wo m, n, p und q ganze Zahlen sind, so kann man die Tiefe durch Einführen einer neuen Veränderlichen entfernen, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Satz. Um $\frac{a-1}{x} x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ zu finden, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, setze $a+bx^n = z^q$, dann ist

$$\frac{a-1}{x} x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}} \frac{d}{z} (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1}.$$

Beweis. Da $a+bx^n = z^q$ gesetzt ist, so ist $x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$,

$$\text{mithin } \frac{d}{z} x = \frac{q}{nb} z^{q-1} \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}, \text{ also}$$

$$\frac{a-1}{x} x^{m-1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{d}{z} (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} \cdot z^p \cdot \frac{q}{nb} z^{q-1} \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \\ = \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}} \frac{d}{z} (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1}.$$

293. **Satz.** Um $\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} (a + bx^n)^p$ zu finden, wenn $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist, setze $ax^{-n} + b = z^q$, dann ist

$$\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} (a + bx^n)^p = -q \cdot a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \frac{z^{p+q-1}}{(z^q - b)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1}}.$$

Beweis. Da $ax^{-n} + b = z^q$ gesetzt ist, so ist $x = \left(\frac{a}{z^q - b} \right)^{\frac{1}{n}}$

und $\frac{d}{dx} = -q a^{\frac{1}{n}} \frac{z^{q-1}}{n (z^q - b)^{\frac{1}{n} + 1}}$, also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} (a + bx^n)^p &= \frac{d}{dx}^{-1} x^{m + \frac{pn}{q} - 1} (ax^{-n} + b)^p \\ &= \frac{d}{dz}^{-1} \left(\frac{a}{z^q - b} \right)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} - \frac{1}{n}} z^{p+q-1} \cdot \left(-q a^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n (z^q - b)^{\frac{1}{n} + 1}} \right) \\ &= -q a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \frac{d}{dz}^{-1} \frac{z^{p+q-1}}{(z^q - b)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1}}. \end{aligned}$$

Wenn weder $\frac{m}{n}$ noch $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl giebt, so kann man nach Satz 212 die Rückleitung oder Reduktion versuchen.

294. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} (a + bx^n)^s = \frac{x^m}{m} (a + bx^n)^s - \frac{bns}{m} \frac{d}{dx}^{-1} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1}.$$

Beweis. Nach 212 ist, da $\frac{d}{dx} (a + bx^n) = bnx^{n-1}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} (a + bx^n)^s x^{m-1} &= (a + bx^n)^s \frac{x^m}{m} - \frac{d}{dx}^{-1} \left(\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} \right) \frac{d}{dx} (a + bx^n)^s \\ &= \frac{x^m (a + bx^n)^s}{m} - \frac{d}{dx}^{-1} \frac{s}{m} x^m (a + bx^n)^{s-1} bnx^{n-1} \\ &= \frac{x^m}{m} (a + bx^n)^s - \frac{bns}{m} \frac{d}{dx}^{-1} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1}. \end{aligned}$$

295. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} (a + bx^n)^s = \frac{x^{m-n} (a + bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)} - \frac{m+n}{bn(s+1)} \frac{d}{dx}^{-1} x^{m-n-1} (a + bx^n)^{s+1}.$

Beweis. Nach 294 ist, wenn man das letzte Glied allein auf die linke Seite bringt,

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1} = \frac{x^m (a + bx^n)^s}{bn^s} - \frac{m}{bn^s} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s$$

und setzen wir hier m für $m + n$ und s für $s - 1$, also $m - n$ für m und $s + 1$ für s , so ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s &= \frac{x^{m-n} (a + bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)} - \\ &- \frac{m-n}{bn(s+1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-n-1} (a + bx^n)^{s+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s &= \frac{x^m (a + bx^n)^{s+1}}{am} \\ &- \frac{b(m + ns + n)}{am} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^s. \end{aligned} \quad 296.$$

Beweis. Es ist $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s$

$$= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n) (a + bx^n)^{s-1}$$

$$= a \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1} + b \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1},$$

andererseits ist nach 294

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s = \frac{x^m (a + bx^n)^s}{m} - \frac{bn^s}{m} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1}.$$

Setzen wir diese beiden Werte gleich und bringen das erste Glied

$a \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1}$ allein auf die linke Seite, also

$$\begin{aligned} a \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1} &= \frac{x^m (a + bx^n)^s}{m} \\ &- \left(\frac{bn^s}{m} - b \right) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun endlich s für $s - 1$, also $s + 1$ für s , so ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s &= \frac{x^m (a + bx^n)^{s+1}}{am} - \\ &- \frac{b(m + ns + n)}{am} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m+n-1} (a + bx^n)^s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-1} (a + bx^n)^s &= \frac{x^{m-n} (a + bx^n)^{s+1}}{b(m + ns)} \\ &- \frac{a(m - n)}{b(m + ns)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} x^{m-n-1} (a + bx^n)^s. \end{aligned} \quad 297.$$

Beweis. Setzen wir m für $m + n$, also $m - n$ für m und bringen das letzte Glied in 296 allein auf die linke Seite, so folgt unmittelbar der Satz.

$$298. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s = \frac{x^m (a + bx^n)^s}{m + ns} \\ + \frac{ans}{m + ns} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1}.$$

Beweis. Setzen wir die in 296 benutzte identische Formel

$$\frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s = a \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1} \\ + b \frac{d^{-1}}{x} x^{m+n-1} (a + bx^n)^{s-1}$$

und entwickeln wir das letzte Glied nach Satz 295, so erhalten wir

$$\frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s = a \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1} \\ + b \left[\frac{x^m (a + bx^n)^s}{bns} - \frac{m}{bns} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s \right]$$

und wenn wir hier das erste und das letzte Glied in ein Glied vereinigen

$$\frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s = \frac{x^m (a + bx^n)^s}{m + ns} + \frac{ans}{m + ns} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^{s-1}$$

$$299. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^s = - \frac{x^m (a + bx^n)^{s+1}}{an(s+1)} \\ + \frac{m + n + ns}{an(s+1)} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx^n)^{s+1}.$$

Beweis. Setzen wir s für $s - 1$, also $s + 1$ für s , und bringen wir das letzte Glied in 298 allein auf die linke Seite, so folgt unmittelbar der Satz.

Die obigen Formeln gestatten nun eine Reihe von Rückleitungen. Nach 294 kann man m vergrößern und gleichzeitig s vermindern, nach 295 kann man m vermindern und gleichzeitig s vergrößern. Nach 296 kann man m vergrößern nach 297 kann man m vermindern, während s unverändert bleibt; endlich nach 299 kann man s vergrößern und nach 298 kann man s vermindern, während m unverändert bleibt.

D. Die Integren von Stufen, Logen, von Winkeln und Bogenfolgen.

1. Die Integren von Stufenfolgen oder von Exponentialgrößen.

$$300. \quad \text{Satz.} \quad \frac{d^{-1}}{x} f_0 e^{ax} = \frac{1}{a} \frac{d^{-1}}{y} \frac{1}{y} f_0 y \quad * \text{ wo } y = e^{ax}.$$

Beweis. Wir setzen $e^{ax} = y$, also $x = \frac{\log y}{a}$ $\frac{dx}{y} = \frac{1}{ay}$ und

wenden nun den Satz 211 an $\frac{d^{-1}}{x} f_0 y = \frac{d^{-1}}{y} f_0 y \frac{dx}{y} = \frac{d^{-1}}{y} \frac{1}{ay} f_0 y$.

Einige Beispiele werden die Anwendung dieses Satzes zeigen.

$$1) \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{e^{ax}} + \frac{1}{e^{-ax}} = \frac{1}{a} \frac{a^{-1}}{y} \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \frac{a^{-1}}{y} \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctan(y)$$

$$(\text{nach 268}) = \frac{1}{a} \arctan(e^{ax})$$

$$2) \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{(1+e^{ax})^{1/2}} = \frac{1}{a} \frac{a^{-1}}{y} \frac{1}{y} \frac{1}{(1+y)^{1/2}}. \text{ Setzen wir } 1+y = z^2, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} y &= z^2 - 1, \frac{dy}{z} = 2z \\ &= \frac{1}{a} \frac{a^{-1}}{z} \frac{1}{z^2 - 1} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2z = \frac{2}{a} \frac{a^{-1}}{z} \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{a} \frac{1}{e^{\frac{z}{2}} + 1} \\ &\text{da } \frac{a}{x} \frac{1}{e^{\frac{z}{2}} + 1} = \frac{2}{z^2 - 1} \text{ nach 112 und 94 ist.} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}(1+e^{ax})}} = \frac{1}{a} \frac{1}{(1+e^{ax})^{1/2}}. \text{ Da } z = (1+y)^{1/2} = (1+e^{ax})^{1/2} \text{ ist.} \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} x^m e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} e^{ax}. \quad 301.$$

Beweis. Wenden wir den Satz 212 an, so ist, da $\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$,

$$\frac{d^{-1}}{x} x^m e^{ax} = x^m \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} - \frac{d^{-1}}{x} m x^{m-1} \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \frac{d^{-1}}{x} x^{m-1} e^{ax}.$$

$$\text{Satz.} \quad 302.$$

$$\frac{d^{-1}}{x} x^m e^{ax} = e^{ax} \left[\frac{x^m}{a} - \frac{m}{a^2} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^3} x^{m-2} - \dots + (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}} \right]$$

$$+ e^{ax} \cdot \left[\frac{(-1)^a m(m-1) \dots (m-a+1)}{a^{a+1}} x^{m-a} \right]$$

* m ganze Pluszahl.

Beweis. Unmittelbar aus 300.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^m} e^{ax} = - \frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-1}} e^{ax}. \quad 303.$$

Beweis. Setzen wir in 301 $-m$ statt $m-1$, also $-m+1$ statt m , und bringen das letzte Glied allein auf die linke Seite, so folgt unmittelbar der Satz.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} \frac{e^{ax}}{x} = \log x + \int_1^{\frac{(ax)^a}{a!}} \frac{1}{a!} \quad 304.$$

$$= \log x + \frac{1}{1} \frac{ax}{1} + \frac{1}{2} \frac{(ax)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{(ax)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Beweis. Nach 120 ist $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$ und dies für $x=0$ gleich ae , mithin ist nach 101

$$e^{ax} = \sum \frac{(ax)^a}{a!} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}e^{ax}}{x} &= \frac{d^{-1}}{x} \left[\frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2x}{1 \cdot 2} + \frac{a^3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right] \\ &= \log x + \frac{1}{1} \cdot \frac{ax}{1} + \frac{1}{2} \frac{a^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{a^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \log x + \sum_{1,} \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax)^a}{a!}. \end{aligned}$$

305.

Satz.

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^m} \cdot e^{ax} = -e^{ax} \left[\sum_{1, m-1} \frac{a^{a-1}}{(m-1)(m-2) \dots (m-a)x^{m-a}} \right] + \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^{-1}e^{ax}}{x}.$$

Beweis. 1. Der Satz gilt für $m=1$, denn es ist

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x} \cdot e^{ax} = \frac{d^{-1}e^{ax}}{x}.$$

2. Wenn der Satz für m gilt, so gilt er auch für $m+1$, denn es ist nach 303

$$\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m+1}} \cdot e^{ax} = - \frac{e^{ax}}{((m+1)-1)x^{(m+1)-1}} + \frac{a}{(m+1)-1} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x^m} e^{ax}$$

und nach Annahme

$$\begin{aligned} &= -e^{ax} \left[\frac{1}{((m+1)-1)x^{(m+1)-1}} + \frac{a}{(m+1)-1} \sum_{1, m-1} \frac{a^{a-1}}{(m-1)(m-2) \dots (m-a)x^{m-a}} \right] \\ &\quad + \frac{a}{(m+1)-1} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^{-1}e^{ax}}{x} \\ &= -e^{ax} \left[\sum_{0, (m-1)} \frac{a^{(a+1)-1}}{((m+1)-1)((m+1)-2) \dots ((m+1)-(a+1))x^{(m+1)-(a+1)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^{(m+1)-1}}{((m+1)-1)!} \frac{d^{-1}e^{ax}}{x} \right]. \end{aligned}$$

Der Satz gilt also auch für $m+1$, wo a von 0 bis $m-1$, also $a+1$ von 1 bis $(m+1)-1$ genommen wird, d. h. der Satz gilt allgemein.

Wenn andere Folgen von x in Verbindung mit e^{ax} gegeben sind, so kann man die obigen Sätze benutzen, um sie auf die einfachste Form zu bringen und dann die Folge in eine unendliche Reihe entwickeln. Oder man versucht das teilweise Integren

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} e^{ax} f_0 x = \frac{1}{a} e^{ax} f_0 x - \frac{1}{a} \frac{d}{dx}^{-1} e^{ax} \frac{d}{dx} f_0 x. \quad 306.$$

Beweis. Unmittelbar nach 212.

2. Die Integren von Logfolgen oder Logarithmischen Diffen.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} f_0 l_e x * \frac{d}{dy}^{-1} e^y f_0 y \quad * \text{ wo } l_e x = y. \quad 307.$$

Beweis. Wir setzen $l_e x = y$, dann ist $x = e^y$, $\frac{d}{dy} x = e^y$, also

$$\frac{d}{dx}^{-1} f_0 l_e x = \frac{d}{dx}^{-1} f_0 y = \left(\frac{d}{dy}^{-1} f_0 y \right) \frac{d}{dy} x = \frac{d}{dy}^{-1} e^y f_0 y.$$

Nach diesem Satze kann man die Gleichungen integren, welche nur Folgen von $l_e x$ enthalten.

$$\text{Satz.} \quad 308.$$

$$\frac{d}{dx}^{-1} (l_e x)^m = x [S(-1)^a m(m-1) \dots (m-(a-1)) (l_e x)^{m-a}]$$

* wo m ganze Pluszahl.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} (l_e x)^m &= \frac{d}{dy}^{-1} e^y y^m && \text{nach 307, wo } l_e x = y \\ &= e^y [y^m - m y^{m-1} + m(m-1) y^{m-2} - \dots + (-1)^m m!] && (\text{nach 302}) \\ &= e^y [S(-1)^a m(m-1) \dots (m-(a-1)) y^{m-a}] \\ &= x [S(-1)^a m(m-1) \dots (m-(a-1)) (l_e x)^{m-a}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{l_e x} &= l_e(l_e x) + \frac{1}{1} \frac{l_e x}{1} + \frac{1}{2} \frac{(l_e x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{(l_e x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad 309. \\ &= l_e(l_e x) + \sum_{1,} \frac{1}{a} \frac{(l_e x)^a}{a!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{l_e x} &= \frac{d}{dy}^{-1} e^y \frac{1}{y} && \text{nach 307, wo } l_e x = y \\ &= l_e y + \frac{1}{1} \cdot \frac{y}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{3!} + \dots \\ &= l_e y + \sum_{1,} \frac{1}{a} \cdot \frac{y^a}{a!} && (\text{nach 304}) \\ &= l_e(l_e x) + \frac{1}{1} \cdot \frac{l_e x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(l_e x)^2}{2!} + \dots \\ &= l_e(l_e x) + \sum_{1,} \frac{1}{a} \cdot \frac{(l_e x)^a}{a!}. \end{aligned}$$

310. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(lex)^m} = -x \left[\sum_{1,m-1} \frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)(lex)^{m-a}} \right] \\ + \frac{1}{(m-1)!} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{lex}.$$

Beweis.

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(lex)^m} = \frac{d}{y}^{-1} \frac{e^y}{y^m} \quad \text{nach 307, wo } lex = y \\ = -e^y \left[\sum_{1,m-1} \frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)y^{m-a}} \right] \\ + \frac{1}{(m-1)!} \frac{d}{y}^{-1} \frac{e^y}{y} \quad \text{(nach 305)} \\ = -x \left[\sum_{1,m-1} \frac{1}{(m-1)(m-2)\cdots(m-a)(lex)^{m-a}} \right] \\ + \frac{1}{(m-1)!} \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{lex}.$$

311. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1} x'' f_0(lex) = \frac{d}{y}^{-1} e^{(u+1)y} f_0 y$ * wo $lex = y$.Beweis. Wir setzen $lex = y$, also $x = e^y$, $\frac{d}{y} x = e^y$, dann ist nach 211

$$\frac{d}{x}^{-1} x'' f_0(lex) = \frac{d}{y}^{-1} e''^y (f_0 y) e^y = \frac{d}{y}^{-1} e^{(u+1)y} f_0 y.$$

312. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x} (lex)^m = \frac{(lex)^{m+1}}{m+1}$ * wo $m \geq -1$.

$$\text{Beweis. } \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x} (lex)^m = \frac{d}{y}^{-1} \frac{y^m}{y} = \frac{y^{m+1}}{m+1} = \frac{(lex)^{m+1}}{m+1}.$$

313. **Satz.** $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x \cdot lex} = le(lex).$

$$\text{Beweis. } \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x \cdot lex} = \frac{d}{y}^{-1} \frac{1}{y} = le y = le(lex).$$

314. **Satz.**

$$\frac{d}{x}^{-1} x'' (lex)^m = x'' + 1 \left[\frac{(lex)^m}{\mu + 1} - \frac{m(lex)^{m-1}}{(\mu + 1)^2} \right. \\ \left. + \frac{m(m-1)(lex)^{m-2}}{(\mu + 1)^3} - \cdots + (-1)^m \frac{m!}{(\mu + 1)^{m+1}} \right] \\ = x'' + 1 \left[\sum_{0,m} \frac{m(m-1)\cdots(m-(a-1))(lex)^{m-a}}{(\mu + 1)^{a+1}} \right].$$

Beweis. $\frac{d}{dx}^{-1} x'' (l_e x)^m$

$$= \frac{d}{dy}^{-1} e^{(\mu+1)y} y^m \quad \text{und nach 295}$$

$$= e^{(\mu+1)y} \left[\frac{y^m}{\mu+1} - \frac{m y^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1) y^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \dots + \frac{(-1)^m \cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}} \right]$$

$$= x^{\mu+1} \left[\frac{(l_e x)^m}{\mu+1} - \frac{m(l_e x)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(l_e x)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \dots + \frac{(-1)^m \cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}} \right]$$

In allen Fällen, wo nicht reine Folgen von $l_e x$ gegeben sind, muss die gegebene Folge in eine Reihe entwickelt und dann integriert werden, so selbst schon bei der einfachen Folge $\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{x} l_e(1+x)$ muss $l_e(1+x)$ in eine Reihe entwickelt werden, um integriert zu werden.

3. Die Integren von Winkelfolgen oder von goniometrischen Funktionen.

Wir betrachten hier zuerst die Gleichungen, in denen nur Winkelfolgen einer Veränderlichen vorkommen. Um diese leicht behandeln zu können, führt man die verschiedenen Winkelfolgen auf eine einzige Winkelfolge zurück und zwar entweder auf $\sin x$, oder auf $\cos x$, oder auf $\tan x$, oder auf $\tan^{1/2} x$.

a. Zurückführung aller Winkelfolgen auf $\sin x$.

$$\text{Bekanntlich ist } \cos x = (1 - (\sin x)^2)^{1/2}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{(1 - (\sin x)^2)^{1/2}};$$

führt man in dieser Weise alle Folgen auf $\sin x$ zurück, so hat man nur noch $\frac{d}{dx}^{-1} f_0 \sin x$ zu behandeln, wobei stets vorausgesetzt werden soll, dass x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthalten, also echt sei.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} f_0 \sin x = \frac{d}{dy}^{-1} \frac{f_0 y}{(1 - y^2)^{1/2}} \quad * \text{ wo } \sin x = y. \text{ 315.}$$

Beweis. Nach 211 ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} f_0 \sin x &= \frac{d}{dx}^{-1} f_0 y = \left(\frac{d}{dy}^{-1} f_0 y \right) \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{d}{dy}^{-1} \frac{f_0 y}{(1 - y^2)^{1/2}}; \quad \text{da } x = \arcsin y, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(1 - y^2)^{1/2}} \quad (\text{nach 129}).$$

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} \sec x = l_e \tan(1/4 \pi + 1/2 x). \quad 316.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} \sec x &= \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{(1 - (\sin x)^2)^{1/2}} = \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{(1 - y^2)^{1/2}} = \frac{d}{dy}^{-1} \frac{1}{1 - y^2} \\ &= {}^{1/2} \log \frac{1+y}{1-y} = {}^{1/2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} x \right), \end{aligned}$$

da $\frac{d}{dx} \log \frac{1+y}{1-y} = \frac{2}{1-y^2}$ nach 112 und 94 und

da $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = (\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x))^2$ nach Zahlenlehre 485 ist.

317. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \operatorname{cosec} x = \log \tan \frac{1}{2} x.$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1} \operatorname{cosec} x &= \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{\sin x} = \frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{y} = \frac{d}{dy}^{-1} \frac{1}{y(1-y^2)^{1/2}} = - \log \frac{1+(1-y^2)^{1/2}}{y} \\ &= - \log \frac{1+\cos x}{\sin x} = \log \frac{\sin x}{1+\cos x} = \log \tan \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

(nach Zahlenlehre 472).

318. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^q$

$$(1) = \frac{(\sin x)^{p+1} (\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p+2} (\cos x)^{q-2}$$

$$(2) = - \frac{(\sin x)^{p-1} (\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^{q+2}$$

$$(3) = \frac{(\sin x)^{p+1} (\cos x)^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p+2} (\cos x)^q$$

$$(4) = - \frac{(\sin x)^{p-1} (\cos x)^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^q$$

$$(5) = \frac{(\sin x)^{p+1} (\cos x)^{q-1}}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^{q-2}$$

$$(6) = \frac{(\sin x)^{p+1} (\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^{q+2}.$$

Beweis. Wir setzen $\sin x = y$, dann ist $\cos x = (1 - y^2)^{1/2}$,
 $x = \arcsin y$ $\frac{d}{dy} x = \frac{1}{(1 - y^2)^{1/2}}$, also $\frac{d}{dx} y = (1 - y^2)^{1/2}$

$$\frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^q = \frac{d}{dy}^{-1} y^p (1 - y^2)^{1/2 q} \frac{d}{dy} x = \frac{d}{dy}^{-1} y^p (1 - y^2)^{1/2 (q-1)}.$$

Setzen wir also $m-1=p$ oder $m=p+1$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$,
 $s=q-1$, so folgt nach Satz 296

$$\frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^q$$

$$= \frac{y^{p+1}(1-y^2)^{q-1}}{p+1} \dots \frac{q-1}{p+1} \frac{d}{dx}^{-1} y^{p+2}(1-y^2)^{q-2}$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-2} \frac{d}{dx} y$$

$$= (\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1} \dots \frac{q-1}{p+1} \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^{p+2}(\cos x)^{q-2},$$

also gilt die Formel (1) des Satzes.

Ebenso folgt die Formel (2) nach 295, die Formel (3) nach Satz 296, die Formel (4) nach Satz 297, die Formel (5) nach Satz 298 und die Formel (6) nach Satz 299.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^q \quad (1) \text{ 319.}$$

$$= -\frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q} \left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0,1,2(p-1)} \frac{(p-1)(p-3) \dots (p+1-2\alpha)(\sin x)^{p-1-2\alpha}}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (p+q-2\alpha)} \right]$$

* wo p ungerade.

$$= -\frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q} \left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0,1,2(p-1)} \frac{(p-1)(p-3) \dots (p+1-2\alpha)(\sin x)^{p-1-2\alpha}}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (p+q-2\alpha)} \right] \quad (2)$$

$$+ \frac{(p-1)(p-3) \dots 3 \cdot 1 \frac{d}{dx}^{-1} (\cos x)^q}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (q+2)} \quad \text{* wo p gerade.}$$

Beweis. Unmittelbar, wenn man 318 (4) wiederholt anwendet.

$$\text{Satz. } \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\cos x)^q \quad (1) \text{ 320.}$$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q} \left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0,1,2(q-1)} \frac{(q-1)(q-3) \dots (q+1-2\alpha)(\cos x)^{q-1-2\alpha}}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (p+q-2\alpha)} \right]$$

* wo q ungerade.

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q} \left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0,1,2(q-1)} \frac{(q-1)(q-3) \dots (q+1-2\alpha)(\cos x)^{q-1-2\alpha}}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (p+q-2\alpha)} \right] \quad (2)$$

$$+ \frac{(q-1)(q-3) \dots 3 \cdot 1 \frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p}{(p+q-2)(p+q-4) \dots (p+2)}$$

* wo q gerade.

Beweis. Unmittelbar, wenn man 318 (5) wiederholt anwendet.

Ebenso ergeben sich die Formeln für $\frac{d}{dx}^{-1} (\sin x)^p (\sec x)^q$ aus 318 (6)

und für $\frac{d}{dx}^{-1} (\csc x)^p (\cos x)^q$ aus 318 (3).

321. (1) Satz. $\frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^p$

$$= -\frac{\cos x}{p} \left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0, 1/2(p-1)} \frac{(p-1)(p-3) \dots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4) \dots (p-2a)} \right]$$

* wo p ungerade.

$$(2) = -\frac{\cos x}{p} \left[(\sin x)^{p-1} + \sum_{0, 1/2 p-1} \frac{(p-1)(p-3) \dots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{(p-2)(p-4) \dots (p-2a)} + \frac{(p-1)(p-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot x}{(p-2)(p-4) \dots 4 \cdot 2} \right] \quad * \text{ wo p gerade.}$$

Beweis. Unmittelbar aus 319, wenn man $q = 0$ setzt, denn dann ist $(\cos x)^q = (\cos x)^0 = 1$ und $(\cos x)^{q+1} = (\cos x)^1 = \cos x$, und im letzten Gliede für gerades p $\frac{d}{dx}^{-1}(\cos x)^q = \frac{d}{dx}^{-1}(\cos x)^0 = \frac{d}{dx}^{-1}1 = x$.

322. (1) Satz. $\frac{d}{dx}^{-1}(\cos x)^q$

$$= \frac{\sin x}{q} \left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0, 1/2(q-1)} \frac{(q-1)(q-3) \dots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4) \dots (q-2a)} \right]$$

* wo q ungerade.

$$(2) = \frac{\sin x}{q} \left[(\cos x)^{q-1} + \sum_{0, 1/2 q-1} \frac{(q-1)(q-3) \dots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{(q-2)(q-4) \dots (q-2a)} + \frac{(q-1)(q-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot x}{(q-2)(q-4) \dots 4 \cdot 2} \right] \quad * \text{ wo q gerade.}$$

Beweis. Unmittelbar aus 320, wenn man $p = 0$ setzt, denn dann ist $(\sin x)^p = (\sin x)^0 = 1$, $(\sin x)^{p+1} = (\sin x)^1 = \sin x$ und im letzten Gliede für gerades q $\frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^p = \frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^0 = \frac{d}{dx}^{-1}1 = x$.

323. (1) Satz. $\frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^p$

$$= \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}} \left[\frac{\cos p x}{p} - p \cdot \frac{\cos(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{\cos(p-4)x}{p-4} - \dots - (-1)^{1/2(p-1)} \cdot p^{1/2(p-1)} \frac{\cos x}{1} \right] \quad * \text{ wo p ungerade.}$$

$$(2) = \frac{(-1)^{1/2 p}}{2^{p-1}} \left[\frac{\sin p x}{p} - p \cdot \frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin(p-4)x}{p-4} - \dots + (-1)^{1/2 p-1} p^{1/2 p-1} \frac{\sin 2x}{2} + (-1)^{1/2 p} p^{1/2 p} \frac{x}{2} \right]$$

* wo p gerade,

oder

$$\frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^p = \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}} \left[\sum_{0, 1/2(p-1)} (-1)^a p^a \frac{\cos(p-2a)x}{p-2a} \right] \quad (1)$$

* wo p ungerade.

$$+ \frac{(-1)^{1/2p}}{2^{p-1}} \left[\sum_{0, 1/2p-1} (-1)^a p^a \frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + (-1)^{1/2} p^{1/2} \cdot \frac{x}{2} \right] \quad (2)$$

* wo p gerade.

Beweis. Nach Zahlenlehre 514 ist unmittelbar für ungerades p

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1}(\sin x)^p &= \frac{(-1)^{1/2(p-1)}}{2^{p-1}} \frac{d}{dx}^{-1} \left[\sin p x - p \cdot \sin(p-2)x \right. \\ &\quad \left. + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \sin(p-4)x - \dots + (-1)^{1/2(p-1)} p^{1/2(p-1)} \cdot \sin x \right] \\ &= \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}} \left[\frac{\cos p x}{p} - p \cdot \frac{\cos(p-2)x}{p-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{\cos(p-4)x}{p-4} - \dots + (-1)^{1/2(p-1)} p^{1/2(p-1)} \cos x \right] \end{aligned}$$

und ebenso der Satz für gerades p .

Satz.

324.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1}(\cos x)^p &= \frac{1}{2^{p-1}} \left[\frac{\sin p x}{p} + p \frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin(p-4)x}{p-4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + p^{1/2(p-1)} \cdot \sin x \right] \quad * \text{ wo } p \text{ ungerade.} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \left[\frac{\sin p x}{p} + p \frac{\sin(p-2)x}{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin(p-4)x}{p-4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + p^{1/2p-1} \frac{\sin 2x}{2} + p^{1/4} \frac{x}{2} \right] \quad * \text{ wo } p \text{ gerade,} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1}(\cos x)^p &* \frac{1}{2^{p-1}} \left[\sum_{0, 1/2(p-1)} p^a \cdot \frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} \right] \quad * \text{ wo } p \text{ ungerade.} \\ &* \frac{1}{2^{p-1}} \left[\sum_{0, 1/2p-1} p^a \cdot \frac{\sin(p-2a)x}{p-2a} + p^{1/2p} \cdot \frac{x}{2} \right] \quad * \text{ wo } p \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Beweis. Aus Zahlenlehre 513 ganz wie der Beweis zu 323.

Satz.

325.

$$\frac{d}{dx}^{-1}(\tan x)^p = \sum_{0, 1/2(p-3)} (-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2(p+1)} \tan x \quad (1)$$

* wo p ungerade.

$$+ \sum_{0, 1/2p-1} (-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2} x \quad * \text{ wo } p \text{ gerade.} \quad (2)$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus 318 (2), wenn man $-q$ statt q setzt, da $(\sin x)^{p-1-2a} \cdot (\cos x)^{-p+1+2a} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{p-1-2a} = (\tan x)^{p-1-2a}$ ist. Bei ungeradem p wird dann das letzte Glied $= (-1)^{1/2p} \frac{d^{p-1}}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = (-1)^{1/2p+1} \cos x$. Bei geradem p wird das letzte Glied $= (-1)^{1/2p} \frac{d^{p-1}}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^0 = (-1)^{1/2p} \frac{d^{p-1}}{dx} 1 = (-1)^{1/2p} \cdot x$.

b. Zurückführung aller Winkelfolgen auf $\cos x$.

Da $\sin x = (1 - (\cos x)^2)^{1/2}$ und $\tan x = \frac{(1 - (\cos x)^2)^{1/2}}{\cos x}$ ist, so ist die Zurückführung aller Winkelfolgen auf $\cos x$ leicht, und hat man nur noch $\frac{d^{p-1}}{dx} f_0 \cos x$ zu behandeln, wobei stets vorausgesetzt werden soll, dass x zwischen $-\pi$ und π und also echt ist.

326. **Satz.** $\frac{d^{p-1}}{dx} f_0 \cos x = - \frac{d^{p-1}}{dy} \frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}}$ * wo $\cos x = y$.

Beweis. Nach 211 ist

$$\frac{d^{p-1}}{dx} f_0 \cos x = \frac{d^{p-1}}{dx} f_0 y = \left(\frac{d^{p-1}}{dy} f_0 y \right) \frac{dx}{dy} = - \frac{d^{p-1}}{dy} \frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}},$$

da $x = \arccos y$, also $\frac{dx}{dy} = - \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}}$ (nach 129).

Die Zurückführung ist daher von der auf $\sin x$ so wenig verschieden, dass eine weitere Behandlung derselben nicht erforderlich erscheint.

c. Die Zurückführung aller Winkelfolgen auf $\tan x$.

Bekanntlich ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, also $(\tan x)^2 = \frac{1 - (\cos x)^2}{(\cos x)^2}$; mithin

$$(\cos x)^2 (1 + (\tan x)^2) = 1 \text{ oder } \cos x^2 = \frac{1}{1 + (\tan x)^2} \text{ und}$$

$$(\sin x)^2 = (\tan x)^2 \cdot (\cos x)^2 = \frac{(\tan x)^2}{1 + (\tan x)^2}. \text{ Also wenn wir } \tan x = y$$

setzen $(\cos x)^2 = \frac{1}{1+y^2}$, $(\sin x)^2 = \frac{y^2}{1+y^2}$, $x = \arctan y$, mithin

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2} \quad (\text{nach 130}).$$

Man kann also Alles auf die Form $\frac{d^p}{dy^p} f_0 \tan x$ zurückführen.

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} f \tan x = \frac{d^{-1}}{y} \frac{f_0 \cdot y}{1 + y^2}$ * wo $\tan x = y$. 327.

Beweis. Nach 211 ist

$$\frac{d^{-1}}{x} f \tan x = \frac{d^{-1}}{x} f_0 y = \left(\frac{d^{-1}}{y} f_0 y \right) \frac{d}{y} x = \frac{d^{-1}}{y} \frac{f_0 y}{1 + y^2}.$$

Diese Zurückführung hat den Vorteil, dass wenn $f \tan x$ keine Tiefen enthält, auch $\frac{d^{-1}}{x} f \tan x$ keine Tiefen enthält. Wir entwickeln hiernach die folgenden leichten Sätze.

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \tan x \right)$. 328.

Beweis. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a^2 + b^2(\tan x)^2)(\cos x)^2}$

Setzen wir nun $\tan x = y$, so haben wir nach 327 und den Vorbemerkungen

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} &= \frac{d^{-1}}{y} \frac{1 + y^2}{a^2 + b^2 y^2} \frac{d}{y} x = \frac{d^{-1}}{y} \frac{1}{a^2 + b^2 y^2} \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left(\tan = \frac{b}{a} y \right) \quad (\text{nach 247}) \\ &= \frac{1}{ab} \arctan = \left(\frac{b}{a} \tan x \right). \end{aligned}$$

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{(\cos x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(\cos x) \sin x}{2a^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} + \frac{1}{2ab} \arctan \left(\tan = \frac{b \tan x}{a} \right)$. 329.

Beweis. Nach 327 und den Vorbemerkungen und nach demselben Verfahren wie in Satz 328.

Satz. 330.

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{(\sin x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} &= - \frac{(\cos x) \sin x}{2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} \\ &+ \frac{1}{2ab} \arctan \left(\tan = \frac{b \tan x}{a} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Ganz entsprechend wie zu Satz 329.

Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(b^2 - a^2)(\cos x) \sin x}{2a^2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} + \frac{b^2 - a^2}{2a^3b^3} \arctan \left(\tan = \frac{b \tan x}{a} \right)$. 331.

Beweis. Unmittelbar durch Addition oder Zuftügung von 329 und 330.

d. Die Zurückführung der Winkelfolgen auf $\tan^{1/2}x$.

Setzen wir $\tan^{1/2}x = t$, so haben wir nach Zahlenlehre 471

$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ und nach der Einleitung zu c vor N. 327

$$(\sin x)^2 = \frac{(\tan x)^2}{1 + (\tan x)^2} = \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}, \text{ also } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ und}$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad {}^{1/2}x = \arctan(t), \quad \frac{d}{dx} = \frac{2}{1+t^2}.$$

332. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} F \tan^{1/2}x = \frac{d}{t}^{-1} (Ft) \cdot \frac{2}{1+t^2}$ * wo $\tan^{1/2}x = t$.

Beweis. Da $\tan^{1/2}x = t$ ist, so ist ${}^{1/2}x = \arctan(t)$, mithin nach 130 $\frac{d}{dx} = \frac{2}{1+t^2}$, also ist, wenn wir $t = \tan^{1/2}x$ einführen

$$\frac{d}{dx}^{-1} F \tan^{1/2}x = \frac{d}{x}^{-1} Ft = \frac{d}{t}^{-1} (Ft \frac{d}{dx}) = \frac{d}{t}^{-1} Ft \frac{2}{1+t^2}.$$

333. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{a \cos x + b \sin x + c}$

$$= \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \arctan \left(\tan = \frac{b + (c-a) \tan^{1/2}x}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \right)$$

* wo $a^2 + b^2 < c^2$

$$= \frac{2}{b + (c-a) \tan^{1/2}x} \quad * \text{ wo } a^2 + b^2 = c^2$$

$$= \frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} + b + (c-a) \tan^{1/2}x}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} - (b + (c-a) \tan^{1/2}x)} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} > b + (c-a) \tan^{1/2}x$

$$= \frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{b + (c-a) \tan^{1/2}x + (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}{b + (c-a) \tan^{1/2}x - (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} < b + (c-a) \tan^{1/2}x$.

Beweis. Wenn wir $\tan^{1/2}x = t$ setzen, so ist nach den Vorbemerkungen vor 332

$$\frac{d}{dx}^{-1} \frac{1}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{d}{t}^{-1} \frac{2}{c + a + 2bt + (c-a)t^2}$$

also nach 273, wenn wir hier ${}^{1/2}(c+a)$ für a und ${}^{1/2}(c-a)$ für c setzen

$$= \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \arctan \left(\tan = \frac{b + (c-a)t}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \right) \quad * \text{ wo } a^2 + b^2 < c^2$$

$$= \frac{2}{b + (c-a)t} \quad * \text{ wo } a^2 + b^2 = c^2$$

$$= -\frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \log \left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} + b + (c - a)t}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} - (b + (c - a)t)} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} > b + (c - a)t$

$$= -\frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \log \left[\frac{b + (c - a)t + (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}{b + (c - a)t - (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ und $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} < b + (c - a)t$

und wenn wir hier $\tan \frac{1}{2} x = t$ setzen, die Formeln des Satzes.

Wenn $a = c$ ist, so kann man die Formeln 333 nicht anwenden, dann gilt der folgende Satz.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a(1 + \cos x) + b \sin x} \quad 334.$$

$$= \frac{1}{b} \log(a + b \tan \frac{1}{2} x) \quad * \text{ wo } a = c.$$

Beweis. Da $a = c$, so haben wir die zweite Formel und diese wird nach Zahlenlehre 472

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a(1 + \cos x) + b \sin x} &= \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a + b \tan \frac{1}{2} x)(1 + \cos x)} \\ &= \frac{d}{t(a + bt)} \left(\frac{1}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \right) \frac{dx}{t} = \frac{d}{t(a + bt)} \frac{1 + t^2}{2t} \frac{dx}{t} = \frac{d}{t(a + bt)} \frac{1}{a + bt} \\ &= \frac{1}{b} \log(a + bt) = \frac{1}{b} \log(a + b \tan \frac{1}{2} x). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun demnächst die Gleichungen, in denen außer den Winkelfolgen der Veränderlichen auch andere Folgen der Veränderlichen vorkommen und zwar zunächst Höhen der Veränderlichen und demnächst auch Stufenfolgen der Veränderlichen.

e. Gleichungen mit x^n und $\sin x$ bez. $\cos x$.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} x^n \sin ax =$$

$$= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{d^{-1}}{x} x^{n-2} \sin ax. \quad 335.$$

Beweis. Nach Satz 212 und nach 201 ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1}}{x} x^n \sin ax &= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a} \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} \cos ax \\ &= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a} \frac{x^{n-1} \sin ax}{a} - \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{d^{-1}}{x} x^{n-2} \sin ax. \end{aligned}$$

336. Satz. $\frac{d^{-1}}{x} x^n \sin ax$

$$= -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^3} x^{n-2} \cos ax \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{a^4} x^{n-3} \sin ax \\ = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \int \frac{n(n-1) \cdots (n-2a)}{a^{2a+2}} x^{n-1-2a} \sin ax \\ - \int \frac{n(n-1) \cdots (n-2a-1)}{a^{2a+3}} x^{n-2-2a} \cos ax.$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 335.

337. Satz. $\frac{d^{-1}}{x} \frac{\sin ax}{x^n} = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a \cos ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} \\ - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)} \frac{d^{-1}}{x} \frac{\sin ax}{x^{n-2}}.$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 335, wenn man $-n+2$ für n setzt und das letzte Glied allein auf die linke Seite stellt.

338. Satz. $\frac{d^{-1} \sin ax}{x^n}$

$$* \int_{0,1/2}^{n-2} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \sin ax}{(n-1)(n-2) \cdots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + \int_{0,1/2}^{n-2} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a+1} \cos ax}{(n-1)(n-2) \cdots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2n} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{d^{-1} \sin ax}{x} \\ * \text{ wo } n \text{ gerade}$$

$$* \int_{0,1/2}^{n-3} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \sin ax}{(n-1)(n-2) \cdots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + \int_{0,1/2}^{n-5} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a+1} \cos ax}{(n-1)(n-2) \cdots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2(n-1)} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{d^{-1} \cos ax}{x} \\ * \text{ wo } n \text{ ungerade.}$$

Beweis. Unmittelbar aus 337.

339. Satz. $\frac{d^{-1} \sin ax}{x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{ax}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{a^5 x^5}{1 \cdot 2 \cdots 5} - \cdots \\ = \int_{2a+1}^{(-1)^a} \frac{a^{2a+1} x^{2a+1}}{(2a+1)!}.$

Beweis. Nach 73 ist $\sin ax = \sum (-1)^a \frac{a^{2a+1} x^{2a+1}}{(2a+1)!}$, mithin ist

$$\frac{d^{-1} \sin ax}{x} = \sum (-1)^a \frac{a^{2a+1}}{(2a+1)!} \frac{d^{-1} x^{2a}}{x} = \sum \frac{(-1)^a a^{2a+1} x^{2a+1}}{(2a+1)!}.$$

Satz. $\frac{d^{-1} \cos ax}{x} = \log x - \frac{1}{2} \frac{a^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4} \frac{a^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$ 340.

$$= \log x + \sum_{1,} (-1)^a \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^{2a} x^{2a}}{(2a)!}.$$

Beweis. Nach 73 ist $\cos ax = 1 + \sum_{1,} (-1)^a \frac{a^{2a} x^{2a}}{(2a)!}$, mithin ist

$$\frac{d^{-1} \cos ax}{x} = \frac{d^{-1} 1}{x} + \sum_{1,} (-1)^a \frac{a^{2a}}{(2a)!} \frac{d^{-1} x^{2a-1}}{x}$$

$$= \log x + \sum_{1,} (-1)^a \frac{1}{2a} \cdot \frac{a^{2a} x^{2a}}{(2a)!}.$$

Satz. $\frac{d^{-1} x^n \cos ax}{x} = \frac{x^n \sin ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \cos ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^3} \frac{d^{-1} x^{n-2} \cos ax}{x}$ 341.

Beweis. Ganz wie 335.

Satz. 342.

$$\begin{aligned} \frac{d^{-1} x^n \cos ax}{x} &= \frac{x^n \sin ax}{a} + \sum (-1)^a \frac{n(n-1) \dots (n-2a) x^{n-1-2a} \cos ax}{a^{2a+2}} \\ &+ \sum \frac{(-1)^a n(n-1) \dots (n-2a-1) x^{n-2-2a} \sin ax}{a^{2a+3}}. \end{aligned}$$

Beweis. Unmittelbar aus 336.

Satz. $\frac{d^{-1} \cos ax}{x^n} = - \frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a \sin ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)} \frac{d^{-1} \cos ax}{x^{n-2}}.$ 343.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 342, wenn man $-n+2$ für n setzt und das letzte Glied allein auf die linke Seite setzt.

Satz. $\frac{d^{-1} \cos ax}{x^n} = \sum_{0,1,2 \dots} (-1)^a \frac{a^{2a} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a) x^{n-1-2a}}$ 344.

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0, 1/2n-2} (-1)^a \frac{a^{2a+1} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\
& + (-1)^{1/2n} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} \frac{d^{-1} \cos ax}{x} \quad * \text{ wo } n \text{ gerade.} \\
& \frac{a}{2} \sum_{0, 1/2(n-3)} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\
& + \sum_{0, 1/2(n-5)} (-1)^a \frac{a^{2a+1} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\
& + (-1)^{1/2(n-1)} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{d^{-1} \sin ax}{x} \\
& \quad * \text{ wo } n \text{ ungerade.}
\end{aligned}$$

Beweis. Unmittelbar aus 343.

$$345. (1) \text{ Satz. } \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$(2) \quad \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

Beweis. Nach Satz 212 ist

$$\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx \quad \text{und ist}$$

$$\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx, \quad \text{also ist, wenn wir die}$$

Glieder mit $\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx$ allein auf die linke Seite schaffen,

$$\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{b^2},$$

$$\text{d. h. } \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx = e^{ax} \frac{(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}, \quad \text{und ebenso, wenn wir die}$$

Glieder mit $\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx$ allein auf die linke Seite schaffen,

$$\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned}
346. \quad \text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} x^n e^{ax} \sin bx &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[x^n e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) \right. \\
&\quad \left. - na \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \sin bx + nb \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \cos bx \right].
\end{aligned}$$

Beweis. Nach 212 ist, wenn man Satz 345 anwendet

$$\frac{d^{-1}}{x} x^n (e^{ax} \sin bx) = x^n \frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx - \frac{d^{-1}}{x} \left(\frac{d^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx \right) \frac{d}{x} x^n$$

$$= \frac{x^n e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{d^{-1}}{x} \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) n x^{n-1}}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[x^n e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) - n a \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \sin bx + n b \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \cos bx \right].$$

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} x^n e^{ax} \cos bx = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[x^n e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) - n a \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \cos bx - n b \frac{d^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \sin bx \right]. \quad 347.$$

Beweis. Ebenso wie der Beweis zu 346.

$$\text{Satz. } \frac{d^{-1}}{x} x^n e^{ax} \sin bx \quad 348.$$

$$= \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a(a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)) \sin bx - (b(a^2 + b^2)x - 2ab) \cos bx]$$

$$\text{und } \frac{d^{-1}}{x} x^n e^{ax} \cos bx$$

$$= \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a(a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)) \cos bx + (b(a^2 + b^2)x - 2ab) \sin bx].$$

Beweis. Unmittelbar aus 346 und 345, bez. 347 und 345.

4. Die Integren von Bogenfolgen oder von kyklometrischen Funktionen.

Die Bogenfolgen lassen sich leicht auf Winkelfolgen zurückführen. Denn es ist unmittelbar, wenn $\arcsin(x) = y$ ist $x = \sin y$, $\frac{d}{dy} x = \cos y$, also

$\frac{d}{x}^{-1} f_{\arcsin}(x) = \frac{d}{y}^{-1} (f_y) \cos y$ und ebenso einfach bei den andern Bogenfolgen.

$$\text{Satz.} \quad 349.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} f_{\arcsin}(x) = \frac{d}{y}^{-1} (f_y) \cos y \quad * \text{ wo } \arcsin(x) = y.$$

$$\text{Satz.} \quad 350.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} f_{\arccos}(x) = -\frac{d}{y}^{-1} (f_y) \sin y \quad * \text{ wo } \arccos(x) = y.$$

$$\text{Satz.} \quad 351.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} f_{\arctan}(x) = \frac{d}{y}^{-1} (f_y) (\sec y)^2 \quad * \text{ wo } \arctan(x) = y.$$

$$\text{Satz.} \quad 352.$$

$$\frac{d}{x}^{-1} f_{\operatorname{arccot}}(x) = -\frac{d}{y}^{-1} (f_y) (\operatorname{cosec} y)^2 \quad * \text{ wo } \operatorname{arccot}(x) = y.$$

Hiernach lassen sich leicht integren die Gleichungen

$$\frac{d}{x}^{-1} e^{ax} \arcsin(x) = \frac{d}{y}^{-1} e^{ay} \cos y \quad * \text{ wo } \arcsin(x) = y$$

$$\frac{d}{dx}^{-1}(\arcsin x)^m = \frac{d}{dy}^{-1} y^m \cos y \quad * \text{ wo } \arcsin x = y$$

$$\frac{d}{dx}^{-1}(e^x \arccos x) = \frac{d}{y}^{-1} e^y \sin y \quad * \text{ wo } \arccos x = y$$

$$\frac{d}{dx}^{-1}(\arccos x)^m = \frac{d}{y}^{-1} y^m \sin y \quad * \text{ wo } \arccos x = y.$$

353. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1}(f(x) \arcsin x) = \arcsin x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) - \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

Beweis. Nach 212 ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}^{-1}(\arcsin x)(f(x)) &= \arcsin x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) - \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{d}{dx} \arcsin x \\ &= \arcsin x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) - \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \\ &\quad (\text{nach 129}). \end{aligned}$$

Ganz ebenso ergeben sich die folgenden Sätze.

354. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1}(f(x) \arccos x) = \arccos x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) + \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

355. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1}(f(x) \arctan x) = \arctan x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) - \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{1}{1+x^2}.$$

356. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1}(f(x) \operatorname{arccot} x) = \operatorname{arccot} x \frac{d}{dx}^{-1} f(x) + \frac{d}{dx}^{-1}(f(x)) \frac{1}{1+x^2}.$$

Hieraus ergeben sich z. B. unmittelbar, wenn man $f(x) = 1$, bez. $f(x) = x^{m-1}$ setzt, die folgenden Sätze:

357. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \arcsin x = x \cdot \arcsin x + (1-x^2)^{1/2}.$

358. **Satz.** $\frac{d}{dx}^{-1} \arccos x = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$

359. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} \arcsin x = \frac{x^m}{m} \arcsin x - \frac{1}{m} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{x^m}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

360. **Satz.**

$$\frac{d}{dx}^{-1} x^{m-1} \arctan x = \frac{x^m}{m} \arctan x - \frac{1}{m} \frac{d}{dx}^{-1} \frac{x^m}{1+x^2}.$$

Dritter Abschnitt der Folgelehre: Die dehnende Folgelehre oder die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen.

12. Die allgemeinen Sätze über die Folgen mehrer Veränderlichen.

Für die Lehre von den Folgen oder Funktionen zweier und mehrer Veränderlichen musste ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden, wenn man zu brauchbaren Ergebnissen gelangen wollte. Die geehrten Leser werden gebeten, diesen neuen Weg zu betreten und zu prüfen; sie werden dann sehen, dass die Lehre von den Folgen zweier und mehrer Veränderlichen ebenso reiche Ergebnisse liefert, wie die Lehre von den Folgen einer Veränderlichen.

Erklärung. Die Folge (Funktion) zweier Veränderlichen heist eine Folge, wenn die Formel zwei Veränderliche x und y enthält. 361.

Das Zeichen für die Folge der beiden Veränderlichen x und y ist $f_0(x, y)$ gelesen „Folge von x und y “.

Erklärung. Die Folge (Funktion) mehrer Veränderlichen heist eine Folge, wenn die Formel mehr als zwei Veränderliche x, y, z, t, u, \dots enthält. 362.

Das Zeichen für die Folge mehrer Veränderlichen x, y, z, \dots ist $f_0(x, y, z, \dots)$ gelesen „Folge von $x, y, z, u. \text{ f. w.}$ “

Erklärung. Stetig heist die Folge zweier oder mehrer Veränderlichen, wenn sie für jede der Veränderlichen stetig ist, sofern die andern Veränderlichen nur endliche Werte haben. 363.

Innerhalb bestimmter Grenzen heist die Folge stetig, wenn sie innerhalb dieser Grenzen für jede der Veränderlichen stetig ist.

364. **Erklärung.** Unabhängig von einander heissen die Veränderlichen, wenn sich nicht eine derselben als Folge oder Funktion der andern darstellen lässt.

Abhängig von den Grösen u, t, \dots heissen die Veränderlichen x, y, z, \dots , wenn sich letztere als Folgen der ersten darstellen lassen.

365. **Satz.** Die steigende Höhenreihe zweier oder mehrer Veränderlichen ist stets echt (konvergent), wenn das Quader jeder Veränderlichen kleiner als Eins und zugleich keine der Vorzahlen unendlich ist.

Beweis. Unmittelbar aus 24.

366. **Satz.** Jede stetige Reinforme (stetige reelle Funktion) zweier oder mehrer Veränderlichen kann, sofern das Quader jeder der Veränderlichen kleiner als eins ist, einer steigenden Höhenreihe dieser Veränderlichen gleichgesetzt werden, und diese ist, sofern in ihr nicht eine der Vorzahlen unendlich wird, eine echte Reihe.

Beweis. Unmittelbar aus 29.

367. **Satz.** Jede stetige Richtfolge (stetige komplexe Funktion) zweier oder mehrer Veränderlichen kann, sofern das Quader jeder der Veränderlichen kleiner als eins ist, einer Richtgröse $a + ib$ gleich gesetzt werden, in welcher jede der beiden Zahlen a und b eine echte steigende Höhenreihe der Veränderlichen darstellt.

Beweis. Unmittelbar aus 30.

368. **Erklärung.** Der Diff x, y, z, \dots oder der Differentialquotient nach x, y, z, \dots einer Folge heist die Summe aus dem Diff x dieser Folge, aus dem Diff y dieser Folge, aus dem Diff z dieser Folge u. f. w. oder

$$\frac{d}{x, y, z, \dots} f_0 = \frac{d}{x} f_0 + \frac{d}{y} f_0 + \frac{d}{z} f_0 + \dots$$

369. **Erklärung.** In der Diffrechnung (Differentialrechnung) nennt man den m ten Diff nach x, y, z, \dots einer Folge gewöhnlich den m ten Volldiff oder m ten vollständigen Differentialquotienten der Folge, dagegen den einzelnen Diff der Form $\frac{d^a}{x} \frac{d^b}{y} \frac{d^c}{z} f_0(x, y, z, \dots)$, einen Teildiff oder partiellen Differentialquotienten.

Obwohl nach unserer Bezeichnung diese Benennung nicht nötig ist, nehme ich sie doch auf, um mich an die gewöhnliche Bezeichnung möglichst anzuschliessen.

Unter den Teildiffen haben nun aber auch die einzelnen Diffe einen sehr verschiedenen Wert. Um die wichtigsten Verschiedenheiten zu betrachten, unterscheiden wir den Eindiff und die Mehrdiffe, ferner den Eckdiff mit seinem Ergänzungsdiffe und endlich den Mitteldiff. Für die Betrachtung dieser verschiedenen Diffe geben wir nach 366 der stetigen Folge die Form einer steigenden Höhenreihe $\sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$.

Erklärung. Den m ten Eindiff nach x nennen wir den m ten ^{370.} Diff einer Folge von zwei oder mehrer Veränderlichen, sofern in dieser Folge nur die Glieder genommen werden, in denen nur Höhen von x vorkommen, dagegen jedes Glied fortgelassen wird, in denen irgend eine andere Veränderliche vorkommt.

Das Zeichen des m ten Eindiffs von x ist $\frac{1}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$ und es ist $\frac{1}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$.

Beispiele werden wir bei den Folgen zweier Veränderlichen kennen lernen.

Satz. Der m te Eindiff nach x einer Folge mehrer Veränder- ^{371.} lichen ist gleich dem m ten Diffe nach x einer Folge einer Veränderlichen, oder es ist

$$\frac{1}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a,0,0,\dots} x^a.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots &= \frac{d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots && (\text{nach } 370) \\ &= \frac{d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a && (\text{nach Zahlenlehre } 319) \\ &= \sum_{a,b,c,\dots} \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a,0,0,\dots} x^a && (\text{nach } 104). \end{aligned}$$

Erklärung. Den Eck-Mdiff nach x nennen wir den m ten ^{372.} Diff einer Folge von zwei oder mehrer Veränderlichen, in welchem zwar die Höhen aller Veränderlichen vorkommen, in welchem aber der m te Diff nur nach einer Veränderlichen x genommen ist.

Den ersten Ergänzungsdiff nach y zu dem Eck-Mdiffe nach x nennen wir den n ten Diff derselben Folge, in welchem die Höhen der ersten Veränderlichen x sämtlich kleiner sind als m , während die Höhen der andern Veränderlichen beliebig sind, in welchem aber der n te Diff nur nach einer zweiten Veränderlichen y genommen ist. Den o ten Ergänzungsdiff zum $o-1$ ten Ergänzungsdiffe nennen wir den o ten Diff derselben Folge, in welchem die Höhen für jede $(o-c)$ te vorhergehende Veränderliche sämtlich kleiner sind als die Diffstufe dieser Veränderlichen, während die Höhen der weiteren

Veränderlichen beliebig find, in welchem aber der s te Diff nur nach einer und zwar der $s + 1$ ten Veränderlichen genommen ist.

Das Zeichen des Eck-Mdiffs nach x ist $\frac{e d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$
und es ist $\frac{e d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$.

Das Zeichen des ersten Ergänzungs-Ndiffs nach y ist $1 \cdot \frac{e d^n}{y} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$ und es ist

$1 \cdot \frac{e d^n}{y} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{d^n}{y} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$ wo $a < m$ ist.

Das Zeichen des s ten Ergänzungs-Sdiffs nach u ist

$s \cdot \frac{e d^s}{u} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$ und es ist

$s \cdot \frac{e d^s}{u} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{d^s}{u} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots t^s u^s \dots$

wo $a < m$, $b < n$, $c < p \dots t < r$ ist, d. h. als die beim $s - 1$ Ergänzungs-diffe genommene Diffstufe nach t .

Beispiele werden wir bei den Folgen zweier und bei den Folgen mehrer Veränderlichen kennen lernen.

373. **Satz.** Der Eck-Mdiff nach x einer Folge mehrer Veränderlichen ist gleich dem m ten Diffe nach x einer Folge einer Veränderlichen, indem man alle andern Veränderlichen als Unveränderliche oder Konstante behandelt,

oder es ist

$$\frac{e d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \sum_{a!}^{(m+a)!} a_{m+a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$$

Beweis. Es ist $\frac{e d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \frac{d^m}{x} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$

• (nach 372)

$$= \sum_{a!}^{(m+a)!} a_{m+a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots \quad (\text{nach 104}).$$

374. **Satz.** Der erste Ergänzungs-Ndiff nach y zu dem Eck-Mdiffe nach x einer Folge mehrer Veränderlichen ist gleich dem Eck-Ndiffe nach y , sofern man bei den Höhen von x $a < m$ nimmt, oder es ist

$$1 \cdot \frac{e d^n}{y} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots = \sum_{b!}^{(n+b)!} a_{a,n+b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots,$$

wo $a < m$ ist.

Und ebenso ist der s te Ergänzungs-Sdiff nach u einer Folge mehrer Veränderlichen gleich dem Eck-Sdiffe nach u , sofern man bei allen vorhergehenden Veränderlichen die Höhe $a < m$, $b < n \dots t < r$ nimmt, oder es ist

$${}^{oo}\frac{d^s}{u}\sum_{a,b,c,\dots,t,u,\dots}x^ay^bz^c\dots t^tu\dots$$

$$= \frac{(s+u)!}{u!} a_{a,b,c,\dots,t,s+u,\dots} x^ay^bz^c\dots t^tu\dots$$

wo $a < m$, $b < n$, $c < p \dots t < r$ ist.

Beweis. Es ist ${}^{1o}\frac{d^n}{y}\sum_{a,b,c,\dots}x^ay^bz^c\dots = \frac{d^n}{y}\sum_{a,b,c,\dots}x^ay^bz^c\dots$

wo $a < m$ (nach 372)

$$= \frac{(n+b)!}{b!} a_{a,n+b,c,\dots} x^ay^bz^c\dots \text{ wo } a < m \quad (\text{nach 104})$$

2. Es ist ${}^{oo}\frac{d^s}{u}\sum_{a,b,c,\dots,t,u,\dots}x^ay^bz^c\dots t^tu\dots$ (nach 372)

$$= \frac{d^s}{u}\sum_{a,b,c,\dots,t,u,\dots}x^ay^bz^c\dots t^tu\dots, \text{ wo } a < m, b < n, \dots t < r \text{ ist}$$

$$= \frac{(s+u)!}{u!} a_{a,b,c,\dots,t,s+u,\dots} x^ay^bz^c\dots t^tu\dots \quad (\text{nach 104})$$

wo $a < m$, $b < n$, $\dots t < r$ ist.

Erklärung. Den Mitteldiff einer Folge von zwei oder mehr³⁷⁵. Veränderlichen nennen wir jeden Diff dieser Folge, wo wenigstens nach zwei Veränderlichen die Diffe genommen sind.

Das Zeichen des Mitteldiffs ist

$$\frac{d^m}{x} \frac{d^n}{y} \frac{d^p}{z} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$$

Satz. Der Mitteldiff nach x, y, z einer Folge mehrer Veränder-³⁷⁶. lichen ist $\frac{d^m}{x} \frac{d^n}{y} \frac{d^p}{z} \sum_{a,b,c,\dots} x^a y^b z^c \dots$

$$= \frac{(m+a)!}{a!} \frac{(n+b)!}{b!} \frac{(p+c)!}{c!} a_{m+a,n+b,p+c,\dots} x^a y^b z^c \dots$$

Nach diesen allgemeinen Sätzen über die Folgen mehrer Veränderlichen wenden wir uns nun zunächst zu den Sätzen über die Folgen zweier Veränderlichen.

13. Die Diffe und die Integren von den Folgen zweier Veränderlichen.

Von den Folgen mehrer Veränderlichen haben bisher fast nur die Folgen zweier Veränderlichen eine Behandlung erfahren; aber auch bei diesen erscheinen die meisten Aufgaben bei der bisherigen Art der Bearbeitung unlöslich. Hier musste daher ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden, wenn wir zu einem weitem Fortschritte der Wissenschaft gelangen wollten.

Zunächst musste die steigende Höhenreihe, auf welche jede stetige Folge nach Nummer 366 zurückgeführt werden kann, behandelt und ihr eine leicht überfichtliche Form gegeben werden.

Dann muss die Ableitung der Diffe von gegebenen Folgen und zwar fowohl der Teildiffe, als auch der Volldiffe und der verschiedenen Arten der Teildiffe gegeben werden.

Beweis. Unmittelbar nach 373.

a. Die Ableitung der Diffe (der Differentialquotienten).

$$\text{Satz. } \frac{d^m}{x} \frac{d^n}{y} f_0(x, y) = \frac{d^n}{y} \frac{d^m}{x} f_0(x, y).$$

379.

Es giebt daselbe, ob man das mte Diff x vom nten Diff y , oder ob man das nte Diff y vom mten Diff x derselben Folge von zwei Veränderlichen nimmt.

Beweis. I. Man entwickle $f_0(x + h, y + k)$ und zwar zunächst in der Weise, dass man sich zunächst nur x in $x + h$ ändern lässt, während y zunächst unverändert bleibt, dann erhält man nach 100

$$f_0(x + h, y) = f_0(x, y) + h \frac{d}{x} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{x^2} f_0(x, y) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{x^3} f_0(x, y) + \dots$$

Hierin lasse man nun nach 100 sich y in $y + k$ verändern, so erhält man $f_0(x + h, y + k)$

$$\begin{aligned} &= f_0(x, y) + k \frac{d}{y} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{y^2} f_0(x, y) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{y^3} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + h \frac{d}{x} f_0(x, y) + kh \frac{d}{y} \frac{d}{x} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} h \frac{d^2}{y^2} \frac{d}{x} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{x^2} f_0(x, y) + k \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{y} \frac{d^2}{x^2} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{x^3} f_0(x, y) + \dots \\ &= \sum_a \frac{k^a}{a!} \frac{h^b}{b!} \frac{d^a}{y^a} \frac{d^b}{x^b} f_0(x, y). \end{aligned}$$

II. Man entwickle $f_0(x + h, y + k)$ demnächst in der Weise, dass man zuerst y sich in $y + k$ verwandeln lässt, während x zunächst unverändert bleibt, dann erhält man nach 100

$$f_0(x, y + k) = f_0(x, y) + k \frac{d}{y} f_0(x, y) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{y^2} f_0(x, y) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{y^3} f_0(x, y) + \dots$$

Hierin lasse man nun nach 100 sich x in $x + h$ verändern, so erhält man $f_0(x + h, y + k)$

$$\begin{aligned} &= f_0(x, y) + h \frac{d}{x} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{x^2} f_0(x, y) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{x^3} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + k \frac{d}{y} f_0(x, y) + hk \frac{d}{x} \frac{d}{y} f_0(x, y) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} k \frac{d^2}{x^2} \frac{d}{y} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{y^2} f_0(x, y) + h \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{x} \frac{d^2}{y^2} f_0(x, y) + \dots \\ &\quad + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3}{y^3} f_0(x, y) + \dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{b! a!}^{h^b k^a} \frac{d^b}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y)$$

III. Also folgt

$$\sum_{a! b!}^{k^a h^b} \frac{d^a}{x} \frac{d^b}{y} f_0(x, y) = \sum_{b! a!}^{h^b k^a} \frac{d^b}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y).$$

Und da diese Formel gelten muss für jeden Wert des h und des k , sofern beide nur genügend klein bleiben, so folgt nach 28

$$\frac{d^a}{y} \frac{d^b}{x} f_0(x, y) = \frac{d^b}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y), \quad \text{was zu beweisen war.}$$

380. **Satz.** $\frac{d^a}{x} \frac{d^n}{y} \frac{d^m}{x} f_0(x, y) = \frac{d^n}{y} \frac{d^{m+1}}{x} f_0(x, y).$

Beweis. Es ist $\frac{d^a}{x} \frac{d^n}{y} \frac{d^m}{x} f_0(x, y) = \frac{d^a}{x} \left(\frac{d^n}{y} \frac{d^m}{x} f_0(x, y) \right)$ (nach 82)

$$= \frac{d^a}{x} \left(\frac{d^m}{x} \frac{d^n}{y} f_0(x, y) \right) \quad (\text{nach 379})$$

$$= \frac{d^{m+1}}{x} \frac{d^n}{y} f_0(x, y) \quad (\text{nach 84})$$

$$= \frac{d^n}{y} \frac{d^{m+1}}{x} f_0(x, y) \quad (\text{nach 379}).$$

381. **Satz des Volldiffs.** $\frac{d^n}{x, y} f_0(x, y) = \sum_{n^a} \frac{d^{n-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y).$

Beweis. 1. Der Satz gilt für $n=1$, denn es ist

$$\frac{d}{x, y} f_0(x, y) = \frac{d}{x} f_0(x, y) + \frac{d}{y} f_0(x, y) \quad \text{nach 368.}$$

2. Wenn der Satz für $\frac{d^n}{x, y}$ gilt, so gilt er auch für $\frac{d^{n+1}}{x, y}$; denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{x, y} f_0(x, y) &= \frac{d}{x, y} \frac{d^n}{x, y} f_0(x, y) && (\text{nach 84}) \\ &= \frac{d}{x, y} \left(\sum_{n^a} \frac{d^{n-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) \right) && (\text{nach Annahme}) \\ &= \frac{d}{x} \left(\sum_{n^a} \frac{d^{n-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) \right) + \frac{d}{y} \left(\sum_{n^a} \frac{d^{n-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) \right) && (\text{nach 368}) \\ &= \sum_{n^a} \frac{d^{n+1-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) + \sum_{n^a} \frac{d^{n-a}}{x} \frac{d^{a+1}}{y} f_0(x, y) && (\text{nach 84, 371}) \\ &= \sum_{n^a} \frac{d^{n+1-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) + \sum_{n^a} \frac{d^{n+1-(a+1)}}{x} \frac{d^{a+1}}{y} f_0(x, y). \end{aligned}$$

Und wenn wir hier die Glieder zusammenfassen, welche gleiche Differenzen, d. h. a im ersten Stücke und $(a-1)+1$ im zweiten Stücke, d. h. wenn wir im zweiten Stücke $a-1$ statt a setzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{x, y} f_0(x, y) &= \sum (n \cdot a + n \cdot a + 1) \frac{d^{(n+1)-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) \\ &= \sum (n + 1) \cdot a \frac{d^{(n+1)-a}}{x} \frac{d^a}{y} f_0(x, y) \text{ (nach Zahlenlehre 391).} \end{aligned}$$

3. Nun gilt der Satz für $n = 1$, also gilt er ganz allgemein.

Die Formel entspricht ganz der Formel des binomischen Lehrsatzes 49.

$$\begin{aligned} \text{Es ist darnach } \frac{d^2}{x, y} f_0(x, y) &= \frac{d^2}{x} f_0(x, y) + 2 \frac{d}{x} \frac{d}{y} f_0(x, y) + \frac{d^2}{y} f_0(x, y) \\ \frac{d^3}{x, y} f_0(x, y) &= \frac{d^3}{x} f_0(x, y) + 3 \frac{d^2}{x} \frac{d}{y} f_0(x, y) + 3 \frac{d}{x} \frac{d^2}{y} f_0(x, y) + \frac{d^3}{y} f_0(x, y) \\ \frac{d^4}{x, y} f_0(x, y) &= \frac{d^4}{x} f_0(x, y) + 4 \frac{d^3}{x} \frac{d}{y} f_0(x, y) + 6 \frac{d^2}{x} \frac{d^2}{y} f_0(x, y) + 4 \frac{d}{x} \frac{d^3}{y} f_0(x, y) + \frac{d^4}{y} f_0(x, y). \end{aligned}$$

b. Die Aufstellung der Integren und Integrale zu gegebenen Diffen mit zwei Veränderlichen.

Die Lehre von den Integren und den Integralen gegebener Diffe mit zwei Veränderlichen ist bis jetzt so wenig entwickelt, dass es eine Seltenheit ist, wenn man eine Integre oder ein Integral für einen gegebenen Diff aufstellen kann. Es kommt dies einerseits daher, dass man nicht die Integren und die Integrale unterschieden hat, und andererseits daher, dass man nur die Integrale der Volldiffe (vollständigen Differentiale) behandelt hat. Da aber fast nie ein Volldiff mit allen feinen zu einander passenden Gliedern gegeben ist, so kann man gegenwärtig auch die Diffe mit zwei Veränderlichen fast nie integrieren. Ja die Diffe höherer Stufen erscheinen den Mathematikern noch ganz unlösbar; an diese hat man sich überhaupt noch nicht gewagt.

Soll hier ein besseres Ergebniss erzielt werden, so muss ein ganz neuer Weg eingeschlagen werden. Ueberdies sind in den weitaus meisten Fällen uns Teildiffe (partielle Differentialquotienten) gegeben, für welche die Integre bez. das Integral gefunden werden soll. Auch dies zwingt uns, einen ganz neuen Weg zu versuchen.

Aber auch nicht jede zwei gegebenen Teildiffe lassen sich integrieren. Es kommt nicht selten vor, dass zwei gegebene Teildiffe gar nicht auf ein und dieselbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden können. Das bekannteste Beispiel bieten die beiden Teildiffe

$$\frac{d}{x} \sum_{a, b} x^a y^b = by \quad \frac{d}{y} \sum_{a, b} x^a y^b = cx,$$

denn leitet man aus erstem den Diff nach y , aus letzterm den Diff nach x ab, so ergibt sich aus dem erstem

$$\frac{d}{y} \sum_{a, b} x^a y^b = b, \text{ aus dem letztern } \frac{d}{x} \sum_{a, b} x^a y^b = c,$$

während beide Diffe doch nach 379 einander gleich sein müssten, wenn sie aus derselben ursprünglichen Folge abgeleitet wären. Sie können mithin nicht aus derselben ursprünglichen Folge abgeleitet sein; sie können demnach auch nicht durch Integrieren auf dieselbe ursprüngliche Folge zurückgeführt werden; sie sind nicht integrabel. Es kommt nun darauf an, festzustellen, welche gegebenen Teildiffe zweier Veränderlichen integrabel sind, welche nicht. Wir haben zu diesem

Zwecke bereits oben die Teildiffe in drei verschiedene Gruppen geteilt und betrachten nun diese Gruppen besonders.

382. **Satz.** Jede zwei gegebenen Teildiffe zweier Veränderlichen sind integrierbar, wenn das eine derselben ein Eckdiff, das andere ein Ergänzungsdiff desselben ist.

Und zwar ist, wenn $\frac{d^m}{dx} F_0(x, y) = \sum_{c,a,b} c_{a,b} x^a y^b$ und $\frac{d^n}{dy} F_0(x, y) = \sum_{c,a,b} c_{c,b} x^c y^b$ die beiden gegebenen Diffe sind, die Integrale $\varphi_0(x, y) = \sum_{a,m+a,b} a_{m+a,b} x^{m+a} y^b + \sum_{a,c,n+b} a_{c,n+b} x^c y^{n+b}$, wo $c < m$.
 $a_{m+a,b} = \frac{a!}{(m+a)!} c_{a,b}$ und $a_{c,n+b} = \frac{b!}{(n+b)!} c_{c,b}$ ist.

Das Integral aber hat die mn Willkürlichen $\sum w_{a,b}$, wo $a < m$ und zugleich $b < n$ ist oder es ist das Integral $F_0(x, y) = \sum w_{a,b} + \varphi_0(x, y)$, wo $a < m$, und zugleich $b < n$ ist.

Beweis. 1. Da die gegebenen Teildiffe ein Eckdiff und ein Ergänzungsdiff desselben sein sollen, so setze

$$\frac{d^m}{dx} F_0(x, y) = \sum_{c,a,b} c_{a,b} x^a y^b = \sum_{a!} \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a,b} x^{m+a} y^b, \text{ also}$$

$$a_{m+a,b} = \frac{a!}{(m+a)!} c_{a,b}$$

$$\frac{d^n}{dy} F_0(x, y) = \sum_{c,a,b} c_{c,b} x^c y^b = \sum_{b!} \frac{(n+b)!}{b!} a_{c,n+b} x^c y^{n+b}, \text{ also}$$

$$a_{c,n+b} = \frac{b!}{(n+b)!} c_{c,b}$$

und nehme nun für jeden derselben die Integrale, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx} \frac{d^m}{dx} F_0(x, y) &= \sum_{(m+a)!} \frac{a!}{(m+a)!} \cdot \frac{(m+a)!}{a!} a_{m+a,b} x^{m+a} y^b \\ &= \sum_{a,m+a,b} a_{m+a,b} x^{m+a} y^b \end{aligned} \quad (\text{nach 197})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dy} \frac{d^n}{dy} F_0(x, y) &= \sum_{(n+b)!} \frac{b!}{(n+b)!} \cdot \frac{(n+b)!}{b!} a_{c,n+b} x^c y^{n+b} \\ &= \sum_{c,n+b} a_{c,n+b} x^c y^{n+b} \end{aligned} \quad (\text{nach 197})$$

$$\text{also die Integrale } \varphi_0(x, y) = \sum_{a,m+a,b} a_{m+a,b} x^{m+a} y^b + \sum_{c,n+b} a_{c,n+b} x^c y^{n+b}$$

$$\text{wo } c < m \text{ nach 378, } a_{m+a,b} = \frac{a!}{(m+a)!} c_{a,b} \text{ und } a_{c,n+b} = \frac{b!}{(n+b)!} c_{c,b}.$$

wenn man das m te Volldiff nimmt, sämmtlich fort. Dagegen darf man nicht willkürliche Folgen dieser Art setzen, wo $a' + b' + c' + \dots \geq m$ ist, denn diese würden als Diffe im m ten Volldiffe bleiben.

Diese getrennten Eckdiffe kommen häufig dort vor, wo man bei Versuchen die eine Veränderliche unverändert lässt und nur die andere Veränderliche sich ändern lässt. Man erhält dann den Eckdiff der einen Veränderlichen und entsprechend demnächst den Eckdiff der andern Veränderlichen; muss dann aber noch prüfen, ob nicht auch solche Glieder von Einfluss sind, in denen beide Veränderliche zugleich ändern. Dies führt uns auf die letzte Art der Teildiffe.

Wenn die getrennten Eckdiffe 1te Diffe sind, so hat das Integral nur eine Willkürliche $w_{0,0,0,\dots}$; wenn es 2te Diffe sind, so hat das Integral ausser dieser Willkürlichen für jede Veränderliche noch eine Willkürliche $w_{1,0,0,\dots}x + w_{0,1,0,\dots}y + w_{0,0,1,\dots}z + \dots$, wenn es dritte Eckdiffe sind, so hat das Integral ausser diesen Willkürlichen für jede Veränderliche noch eine und $\frac{1}{2}$ Willkürliche, nämlich $w_{2,0,0,\dots}x^2 + w_{0,2,0,\dots}y^2 + w_{0,0,2,\dots}z^2 + \dots$
 $+ w_{1,1,0,\dots}xy + w_{1,0,1,\dots}xz + w_{0,1,1,\dots}yz + \dots$

Satz. Wenn bei mehreren Veränderlichen für jede Veränderliche 385. ein getrennter höherer Eckdiff gegeben ist, so findet man die Integre, welche diesen Eckdiffen genügt, indem man für jede der Veränderlichen ihren getrennten Eckdiff ganz so integert, wie bei den Folgen einer Veränderlichen und die gewonnenen Integren zufügt oder addirt. Oder

Wenn $\frac{d^m}{dx} f_0(x, y, z, \dots) = \sum a_a x^a$, $\frac{d^n}{dy} f_0(x, y, z, \dots) = \sum b_b y^b$,
 $\frac{d^p}{dz} f_0(x, y, z, \dots) = \sum c_c z^c$ ist, so ist die Integre, welche allen diesen Gleichungen genügt

$$f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{a!}{(m+a)!} a_a x^{m+a} + \sum \frac{b!}{(n+b)!} b_b y^{n+b} + \sum \frac{c!}{(p+c)!} c_c z^{p+c} + \dots$$

Das Integral ist gleich dieser Integren plus der Summe der willkürlichen Folgen $w_{a',b',c',\dots} x^{a'} y^{b'} z^{c'} \dots$, wo $a' < m$, $b' < n$, $c' < p$ u. f. w. ist.

Beweis: Wenn wir

$f_0(x, y, z, \dots) = \sum e_a x^{m+a} + \sum e_b y^{n+b} + \sum e_c z^{p+c} + \dots$ setzen, wo e_a, e_b, e_c, \dots keine Veränderliche enthalten, so ist

$$\frac{d^m}{dx} f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{(m+a)!}{a!} e_a x^a \quad \frac{d^n}{dy} f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{(n+b)!}{b!} e_b y^b$$

$$\frac{d^p}{dz} f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{(p+c)!}{c!} e_c z^c, \dots$$

Die $f_0(x, y, z, \dots)$ genügt also allen gegebenen Gleichungen, wenn wir $\frac{(m+a)!}{a!} e_a = a_a$, $\frac{(n+b)!}{b!} e_b = b_b$, $\frac{(p+c)!}{c!} e_c = c_c, \dots$

oder $e_a = \frac{a!}{(m+a)!} a_a$, $e_b = \frac{b!}{(n+b)!} b_b$, $e_c = \frac{c!}{(p+c)!} c_c, \dots$ setzen.

Es ist also

$$f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{a!}{(m+a)!} a_a x^{m+a} + \sum \frac{b!}{(n+b)!} b_b y^{n+b} + \sum \frac{c!}{(p+c)!} c_c z^{p+c} + \dots$$

die Integre, welche den gegebenen Gleichungen genügt.

Für das Integral ergibt sich noch die Summe von Folgen mit willkürlichen Beständigen $\sum_{a', b', c', \dots}^w x^{a'} y^{b'} z^{c'} \dots$, wo $a' < m$, $b' < n$,

$c' < p, \dots$ ist, da alle diese Glieder sowohl im $\frac{d^m}{dx}$, wie im $\frac{d^n}{dy}$, u. f. w. fortfallen, und also ganz ohne Einfluss auf die gegebenen Differentialgleichungen sind.

386. **Erklärung.** Der m te Eckdiff nach x heist ein trennbarer, wenn er sich durch Rechnung in einen getrennten Eckdiff verwandeln lässt.

Für zwei Veränderliche ergeben sich die folgenden Sätze.

387. **Satz.** Die Folge $\frac{d^{-m}}{dx} (f_x) \phi_y + \frac{d^{-n}}{dy} (F_x) \phi_y = 0$ ist eine Folge mit trennbaren Eckdiffen. Dieselbe ergibt

$$\frac{d^{-m}}{dx} \frac{f_x}{F_x} + \frac{d^{-n}}{dy} \frac{\phi_y}{\phi_y} = 0, \quad * \text{ wenn } F_x \text{ und } \phi_y \geq 0.$$

Beweis: Die getrennten Eckdiffe ergeben sich, wenn man die Folge durch $(F_x) \phi_y$ dividirt.

Wir werden im folgenden Paragraphen noch weitere trennbare Eckdiffe kennen lernen, welche durch Einführung neuer Veränderlicher getrennt werden können.

388. **Erklärung.** Die Eckdiffe mehrer Veränderlichen $\frac{d^m}{dx}$, $\frac{d^n}{dy}$, $\frac{d^p}{dz}, \dots$ heissen einander ergänzende Eckdiffe oder Ergänzungsdiffe, wenn in jedem Eckdiffe nur solche Höhen der andern Veränderlichen vorkommen, in denen die Stufen (Exponenten) jeder dieser Veränderlichen kleiner sind, als die Stufe des Eckdiffs derselben Veränderlichen, oder mit andern Worten, wo im m ten Eckdiffe der einen Veränderlichen x , nur solche Höhen von $y^a z^b \dots$ vorkommen, in denen a kleiner als n , b kleiner als p , u. f. w. ist.

Das Zeichen der Ergänzungsdiffe ist $\frac{e d^m}{dx} f_0(x, y, z, \dots)$.

Die Eckdiffe $\sum_x^a \sum_{a,b} x^a y^b$ und $\sum_y^b \sum_{b,c} y^b z^c$ z. B. sind einander ergänzende Eckdiffe, wenn $b < 4$ und $c < 3$ ist.

Satz. Die einander ergänzenden Eckdiffe zweier oder mehrer 389. Veränderlichen lassen sich integren. Man erhält die Integre, indem man den Eckdiff jeder Veränderlichen nur nach seiner Veränderlichen integert, alle andern Veränderlichen in diesem Eckdiffe als unveränderlich behandelt und die Integren zufügt.

Das Integral hat, wenn m, n, p, \dots die Stufen der Eckdiffe von x, y, z, \dots sind, die $mnp \dots$ willkürlichen Folgen $c \quad x^a y^b z^c \dots$, wo a, b, c, \dots zugleich $a < m, b < n, c < p, \dots$ ist.

Beweis: Sei $F_0(x, y, z, \dots) = \sum_{a,b,c,\dots} c \quad x^a y^b z^c \dots$ das Integral zu den gegebenen Ergänzungsdiffen, so fallen in dem m ten Eckdiffe nach x alle Glieder fort, in denen $a < m$ ist, ebenso im n ten Eckdiffe nach y alle Glieder fort, in denen $b < n$, im p ten Eckdiffe nach z alle Glieder fort, in denen $c < p$ ist, u. f. w., also fallen sämtliche Glieder fort, in denen zugleich $a < m, b < n, c < p, \dots$ ist. Alle diese Glieder des Integrals können also Folgen mit willkürlichen Beständigen sein.

Für die Integre $f_0(x, y, z, \dots)$ setzen wir diese sämtlichen willkürlichen Folgen gleich Null. Sei nun die Integre $f_0(x, y, z, \dots)$, und seien die gegebenen Ergänzungsdiffe, d. h.

$$\frac{d^m}{dx} f_0(x, y, z, \dots) = \sum_{a_1, b_1, c_1, \dots} a \quad x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots, \text{ wo } b_1 < n, c_1 < p, \dots \text{ ist,}$$

$$\frac{d^n}{dy} f_0(x, y, z, \dots) = \sum_{a_2, b_2, c_2, \dots} a \quad x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \dots, \text{ wo } a_2 < m, c_2 < p, \dots \text{ ist,}$$

$$\frac{d^p}{dz} f_0(x, y, z, \dots) = \sum_{a_3, b_3, c_3, \dots} a \quad x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3} \dots, \text{ wo } a_3 < m, b_3 < n, c_3 < q, \dots \text{ ist,}$$

⋮

so genügt diesen Diffen die Integre

$$f_0(x, y, z, \dots) = \sum_{m+a_1, b_1, c_1, \dots} c \quad x^{m+a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots$$

$$+ \sum_{a_2, n+b_2, c_2, \dots} c \quad x^{a_2} y^{n+b_2} z^{c_2} \dots + \sum_{a_3, b_3, p+c_3, \dots} c \quad x^{a_3} y^{b_3} z^{p+c_3} \dots,$$

+ ...

wo $a_2, a_3, \dots < m$, ferner $b_1, b_3, \dots < n$, auch $c_1, c_3, \dots < p, \dots$ ist. Denn es ist dann

$$\frac{d^m}{dx} f_0(x, y, z, \dots) = \sum_{a_1!} \frac{(m+a_1)!}{a_1!} c \quad x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots,$$

wo $b_1 < n, c_1 < p, \dots$

$$\frac{d^n}{y} f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{(n + b_2)!}{b_2!} c_{a_2, n + b_2, c_2, \dots} x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \dots,$$

wo $a_2 < m$, $c_2 < p, \dots$

$$\frac{d^p}{z} f_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{(p + c_3)!}{c_3!} c_{a_2, b_2, p + c_3, \dots} x^{a_2} y^{b_2} z^{c_3} \dots,$$

wo $a_3 < m$, $b_3 < n, \dots$

⋮

$$\text{Und zwar ist dann } a_{a_1, b_1, c_1, \dots} = \frac{(m + a_1)!}{a_1!} c_{m + a_1, b_1, c_1, \dots},$$

$$\text{also } c_{m + a_1, b_1, c_1, \dots} = \frac{a_1!}{(m + a_1)!} a_{a_1, b_1, c_1, \dots}$$

$$\text{und ebenso folgt } c_{a_2, n + b_2, c_2, \dots} = \frac{b_2!}{(n + b_2)!} a_{a_2, b_2, c_2, \dots}$$

$$c_{a_2, b_2, p + c_3, \dots} = \frac{c_3!}{(p + c_3)!} a_{a_2, b_2, c_3, \dots},$$

also ist die Integre

$$\begin{aligned} f_0(x, y, z, \dots) &= \sum \frac{a_1!}{(m + a_1)!} a_{a_1, b_1, c_1, \dots} x^{m + a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots \\ &+ \sum \frac{b_2!}{(n + b_2)!} a_{a_2, b_2, c_2, \dots} x^{a_2} y^{n + b_2} z^{c_2} \dots \\ &+ \sum \frac{c_3!}{(p + c_3)!} a_{a_2, b_2, c_3, \dots} x^{a_2} y^{b_2} z^{p + c_3} \dots + \dots, \end{aligned}$$

wo $b_1 < n$, $c_1 < p, \dots$, $a_2 < m$, $c_2 < p, \dots$, $a_3 < m$, $b_3 < n, \dots, \dots$

Die Bestimmung der willkürlichen Vorzahlen für ein bestimmtes Integral geschieht hier ganz entsprechend wie bei der Integration von Diffen mit einer Veränderlichen.

390. **Erklärung.** Die Eckdiffe zweier oder mehrer Veränderlichen heissen ergänzbare Eckdiffe, wenn sie sich durch Umformung bez. durch Einführung neuer Veränderlicher in Ergänzungsdiffe umwandeln lassen.

Wir werden diese Art der Eckdiffe in den folgenden Paragraphen kennen lernen und besprechen.

391. **Satz.** Wenn die r gegebenen Teildiffe Mitteldiffe sind, so kann man von denselben fast nie zu einer ursprünglichen Folge zurückkehren, sie sind dann nicht integrabel. In jedem Falle giebt es keine bestimmte Integre, sondern man kann noch höchst willkürliche Folgen der Form $\sum w_{a_1, b_1, c_1, \dots} x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots + \sum w_{a_2, b_2, c_2, \dots} x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \dots$
 $+ \sum w_{a_3, b_3, c_3, \dots} x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3} \dots + \dots$ hinzufügen, sofern nur, wenn m, n, p, \dots

die kleinsten Stufen der Teildiffe nach x , nach y , nach z, \dots find, entweder $a_1 < m$, $b_1 < n$, oder $c_1 < p, \dots$ ist.

Beweis: a. Für die Mitteldiffe zweier Veränderlichen.

Sei der eine Teildiff $\frac{d^m}{dx} \frac{d^n}{dy} f_0(x, y) = \varphi_0(x, y)$ der andre Teildiff $\frac{d^p}{dx} \frac{d^q}{dy} f_0(x, y) = \psi_0(x, y)$ und sei $m > p$, und zwar $m = p + r$, so kann man durch weitere Ableitung von Diffen aus $\frac{d^p}{dx} \frac{d^q}{dy} f_0(x, y)$ zu $\frac{d^m}{dx} \frac{d^q}{dy} f_0(x, y) = \frac{d^r}{dx} \psi_0(x, y)$ übergehen. Sei nun ferner $q > n$ und sei $q = n + s$, so kann man durch weitere Ableitung von $\frac{d^m}{dx} \frac{d^n}{dy} f_0(x, y)$ zu $\frac{d^m}{dx} \frac{d^q}{dy} f_0(x, y) = \frac{d^s}{dy} \varphi_0(x, y)$ übergehen. Sollten nun beide Teildiffe derselben ursprünglichen Folge entsprechen, so müsste $\frac{d^r}{dx} \psi_0(x, y) = \frac{d^m}{dx} \frac{d^q}{dy} f_0(x, y) = \frac{d^s}{dy} \varphi_0(x, y)$ sein. Da dies im Allgemeinen nicht der Fall sein kann, so giebt es dann also auch nicht eine ursprüngliche Folge, welcher jene beiden Teildiffe entsprechen, dieselben sind also dann nicht integrabel.

In jedem Falle giebt es keine bestimmte Integre, vielmehr kann man einer jeden solchen Integren die höchst willkürlichen Folgen $\sum w_{a,b} x^a y^b + \sum w_{c,b} x^c y^b$ zufügen, sofern nur $a < p$ und $b < n$ bleibt.

b. Für die Mitteldiffe mehrer Veränderlichen.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem ersten Teile des Beweises, wenn man schrittweise von 2 zu mehr Veränderlichen vorgeht.

15. Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen.

a. Die allgemeinen Sätze.

Bei den Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen lassen die bisherigen Lehrbücher es noch an Strenge der Form fehlen. Die Herren Mathematiker benutzen ohne Bedenken die Formeln $\frac{dy}{dx} f_0(x, y) = \varphi_0(x, y)$ und $dy f_0(x, y) = dx \varphi_0(x, y)$, obwohl dieselben weder gelten, wenn $dx = 0$, noch wenn $dx \geq 0$ ist, und halten es gar nicht der Mühe wert, ihr Verfahren zu rechtfertigen und zu beweisen. Ihnen genügt es, wenn

sie damit nur rechnen und neue Sätze bez. Formeln ableiten können. Will man hier zu wissenschaftlicher Strenge der Form kommen, so muss ein neuer Weg eingeschlagen werden.

Es wird zweckmäßig sein, den Gang, der hierfür einzuschlagen ist, wenn man der Strenge der Form nichts vergeben will, einleitend anzugeben, und dadurch die Sätze vorzubereiten. Nach Satz 95 ist $\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial u} y \cdot \frac{\partial}{\partial x} u$ und nach Satz 96 ist $\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial u} x}$, mithin ist $\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial u} y : \frac{\partial}{\partial u} x$. Führt man nun, sofern alle Diffe nach

einer und derselben Veränderlichen u genommen werden, für die Diffe nach u die einfachen Zeichen $\frac{\partial}{\partial u} x, \frac{\partial}{\partial u} y, \frac{\partial}{\partial u} z, \dots$ ein, so dass also $\frac{\partial}{\partial u} x$ (gelesen Diff von x) das einfachere Zeichen für $\frac{\partial}{\partial u} x$ ist, oder mit andern Worten $\frac{\partial}{\partial u} x = \frac{\partial}{\partial u} x$ gesetzt ist, und dass ebenso $\frac{\partial}{\partial u} y = \frac{\partial}{\partial u} y, \frac{\partial}{\partial u} z = \frac{\partial}{\partial u} z, \dots$ gesetzt ist, so haben wir

$\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial u} y : \frac{\partial}{\partial u} x = \frac{\frac{\partial}{\partial u} y}{\frac{\partial}{\partial u} x}$, also einen einfachen Bruch zweier Diffe (Differentialquotienten),

für welchen alle Gesetze der Zahlenlehre gelten.

Dann kann man also auch statt $\frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) + \varphi_0(x, y) = 0$, auch

(*) $\frac{\frac{\partial}{\partial u} y}{\frac{\partial}{\partial u} x} f_0(x, y) + \varphi_0(x, y) = 0$ und also auch $\frac{\partial}{\partial u} y f_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial u} x \varphi_0(x, y) = 0$ schreiben.

Für das Integriren hat man ferner nach Satz 211

$\left(\frac{\partial}{\partial x}^{-1} f_0\right) \frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial y}^{-1} f_0 y$. Hieraus folgt, wenn man in der obigen Gleichung (*)

$\frac{\partial}{\partial u} y = \frac{\partial}{\partial u} y$ und $\frac{\partial}{\partial u} x = x$ einführt, und die Integre nimmt, also

$\left(\frac{\partial}{\partial u}^{-1} f_0(x, y)\right) \frac{\partial}{\partial u} y + \left(\frac{\partial}{\partial u}^{-1} \varphi_0(x, y)\right) \frac{\partial}{\partial u} x = 0$, so wird hieraus

$\frac{\partial}{\partial y}^{-1} f_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}^{-1} \varphi_0(x, y) = 0$.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Entwicklung der Sätze über.

392. **Erklärung.** Bei den Diffe (Differentialquotienten) von zwei oder mehr Veränderlichen nennen wir, sofern alle diese Diffe nach einer und derselben Veränderlichen genommen sind, die Diffe nach dieser Veränderlichen einfache Diffe und bezeichnen diese durch das einfache Diffzeichen, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots$ gelesen Diff von x , Diff von y u. f. w.

Bemerkt sei nochmals, dass dieses einfache Diffzeichen immer nur das Zeichen eines Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial u} x$ ist und bleibt.

393. **Satz.** Die einfachen Diffe $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots$ sind gleich den Diffe (Differentialquotienten) $\frac{\partial}{\partial u} x, \frac{\partial}{\partial u} y, \frac{\partial}{\partial u} z, \dots$, sofern alle Diffe nach u genommen sind.

Beweis. Unmittelbar nach 392.

Satz. Der Diff von einer Veränderlichen nach einer zweiten 394. Veränderlichen ist gleich dem einfachen Diff von der ersten geteilt durch den einfachen Diff von der zweiten Veränderlichen; für diesen Bruch gelten alle Gesetze der Zahlenlehre oder

$$\frac{dy}{dx} = (dy) : dx = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Beweis. } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du} \right) \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{nach 95})$$

$$= \left(\frac{dy}{du} \right) : \frac{dx}{du} \quad (\text{nach 96})$$

$$= dy : dx = \frac{dy}{dx} \quad (\text{nach 392}).$$

Für diesen Bruch gelten, wie für jeden Bruch, alle Gesetze der Zahlenlehre nach Zahlenlehre 180—187.

Bemerkt möge hier werden, dass dieser Satz nur für den ersten Diff, nicht aber für höhere Diffe gilt. Bereits $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (dy : dx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{du} : \frac{dx}{du} \right)$ giebt nach 94 gediff't, durchaus nicht $\frac{d^2}{dx^2} y = d^2y : d^2x$.

Erklärung. Eine Diffgleichung (Differentialgleichung) 395. erster Ordnung von zwei oder mehr Veränderlichen heist eine Summe von Gliedern, deren jedes das Zeug oder Produkt ist einer Folge (Funktion) dieser Veränderlichen und des ersten Diffs von einer Veränderlichen nach einer Veränderlichen oder Die Form derselben ist

$$\frac{d}{dx} x f_1(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dy} y f_2(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dz} z f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0.$$

Satz. Jeder Diffgleichung erster Ordnung mehrer Veränder- 396. lichen kann man die Form einer Summe geben, in der jedes Glied das Zeug oder Produkt ist einer Folge (Funktion) der Veränderlichen und des einfachen Diffs einer der Veränderlichen oder Man kann ihr die Form geben

$$dx f_1(x, y, z, \dots) + dy f_2(x, y, z, \dots) + dz f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0.$$

Beweis. Nach 395 ist die Form dieser Gleichung

$$\frac{d}{dx} x f_1(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dy} y f_2(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dz} z f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0.$$

Nach 86 ist aber $\frac{d}{dx} x = 1$, und nach 394 ist $\frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dx}$,

$\frac{d}{dx} z = \frac{dz}{dx}$, Führt man diese Werte in die Gleichung ein und ver-

vielfacht oder multipliziert man die Gleichung dann mit $\underline{d}x$, so ergibt sich unmittelbar der Satz.

397. **Satz.** Die erste Integre nach x einer Diffgleichung (Differentialgleichung) erster Ordnung von zwei oder mehrn Veränderlichen erhält man, indem man in jedem Gliede der Diffgleichung statt des ersten Diff's nach x die erste Integre nach x setzt oder

$$\frac{\underline{d}^{-1}}{x} \left[\frac{\underline{d}}{x} x f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}}{y} y f_1(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}}{z} z f_2(x, y, z, \dots) + \dots \right] \\ = \frac{\underline{d}^{-1}}{x} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}^{-1}}{y} f_1(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}^{-1}}{z} f_2(x, y, z, \dots) + \dots$$

Beweis. Nach 192 ist

$$\frac{\underline{d}^{-1}}{x} \left[\frac{\underline{d}}{x} x f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}}{y} y f_1(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}}{z} z f_2(x, y, z, \dots) + \dots \right] \\ = \frac{\underline{d}^{-1}}{x} \frac{\underline{d}}{x} x f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}^{-1}}{x} \frac{\underline{d}}{y} y f_1(x, y, z, \dots) \\ + \frac{\underline{d}^{-1}}{x} \frac{\underline{d}}{z} z f_2(x, y, z, \dots) + \dots$$

$$= \frac{\underline{d}^{-1}}{x} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}^{-1}}{y} f_1(x, y, z, \dots) + \frac{\underline{d}^{-1}}{z} f_2(x, y, z, \dots) + \dots,$$

da $\frac{\underline{d}}{x} x = 1$ nach 86, und da $\frac{\underline{d}^{-1}}{x} (f_0 y) \frac{\underline{d}}{x} y = \frac{\underline{d}^{-1}}{y} f_0 y$ nach 211 ist.

Für die weitem Betrachtungen der Diffgleichungen wird es erforderlich sein, die Bedingungen zu unterscheiden, unter welchen die Veränderlichen unabhängig von einander sind, und die, unter welchen sie abhängig von einander sind.

398. **Erklärung.** Unabhängig von den Veränderlichen t, u, v, \dots heißen die Veränderlichen x, y, z, \dots , wenn sich die letztern nicht als Folgen oder Funktionen der erstern darstellen lassen.

Abhängig von den Veränderlichen t, u, v, \dots heißen die Veränderlichen x, y, z, \dots , wenn sich letztere als Folgen oder Funktionen der erstern darstellen lassen.

Unabhängig von einander oder frei heißen die Veränderlichen, wenn sich nicht eine derselben als Folge oder Funktion der andern darstellen lässt.

399. **Satz.** Wenn eine Veränderliche abhängig ist von einer andern Veränderlichen, so ist auch die zweite abhängig von der ersten, und wenn eine Veränderliche unabhängig ist von einer zweiten, so ist auch die zweite unabhängig von der ersten.

Beweis. Unmittelbar aus der Erklärung 398. Denn wenn $y = f_x x$, so kann auch daraus $x = \varphi_y y$ abgeleitet werden; dagegen

wenn y nicht einer Folge (Funktion) von x gleichgesetzt werden kann, so darf auch nicht $x = \varphi y$ gesetzt werden, da hieraus $y = f_x x$ abgeleitet werden könnte.

b. Die Diffgleichungen abhängiger Veränderlicher und die Einführung neuer Veränderlicher.

Die Diffgleichungen (Differentialgleichungen) zweier und mehrer Veränderlichen bieten, wie wir gesehen haben, vielfach Schwierigkeiten, welche sich nur beseitigen lassen, indem man neue Veränderliche einführt. Es kommt dies grosenteils daher, dass man Veränderliche zu Grunde gelegt hat, welche selbst Folgen (Funktionen) anderer Veränderlichen sind, und welche daher die Gesetze nicht in ihrer einfachen Gestalt erkennen lassen. Durch Einführung neuer Veränderlicher kann diesem Uebel vielfach abgeholfen werden und gelingt die Lösung von Aufgaben, welche nach den frühern Sätzen unlösbar erschienen.

In den früheren §§ haben die Formeln die Form gehabt $\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \varphi(x)$, wo der Diff x die eine Seite, eine Folge von x die andere Seite der Gleichung bildete. Bei den Diffgleichungen aber erscheinen ein oder mehrere Diffe als Glieder oder auch als Fache (Factoren) eines Gliedes in einer Gleichung; die Gleichung kann dann erst gelöst werden, wenn es gelingt, die Gleichung so umzugestalten, dass man sie auf eine der früheren Formen zurückführt.

Für diese Umgestaltung ist die Einführung neuer Veränderlicher oft sehr nützlich; man kann den Diffe (Differentialquotienten) eine einfachere Gestalt geben, ohne dass der Strenge der Form dadurch etwas vergeben wird.

Erklärung. Gleichstufig oder homogen heissen die Folgen 400. (Funktionen) zweier oder mehrer Veränderlichen, wenn in der auf Null gebrachten Summe derselben in allen Gliedern die Summe der Stufen (Exponenten) aller Veränderlichen gleich ist, oder wenn $S_a x^a y^b z^c \dots = 0$, *wo $a + b + c + \dots = m$.

Satz. Jede Diffgleichung (Differentialgleichung) zweier Veränderlichen mit gleichstufigen Folgen ist durch Einführung einer neuen Veränderlichen trennbar und lässt sich integrieren und zwar ist, wenn $y = xz$ gesetzt wird und $\frac{d}{dx}(S_a x^{m-a} y^a) + \frac{d}{dy}(S_b x^{m-b} y^b) = 0$ gegeben ist, die Integrale $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x} + \frac{d^{-1}}{z} \frac{S_b z^b}{S_a z^a + S_b z^{b+1}} = 0$.

Beweis. Gegeben ist $\frac{d}{dx}(S_a x^{m-a} y^a) + \frac{d}{dy}(S_b x^{m-b} y^b) = 0$.

Setzen wir $y = xz$, also $\frac{d}{dy} = z \frac{d}{dx} + x \frac{d}{dz}$, so ist $\frac{d}{dx}(S_a x^m z^a) + (S_b x^m z^b)(z \frac{d}{dx} + x \frac{d}{dz}) = 0$, und diese durch x^m geteilt, da $x > 0$ ist $(S_a z^a + S_b z^{b+1}) \frac{d}{dx} x + x (S_b z^b) \frac{d}{dz} z = 0$ dies durch $(S_a z^a + S_b z^{b+1}) x$ geteilt, ergibt

$\frac{1}{x} dx + \frac{8b_b z^b}{8a_a z^a + 8b_b z^{b+1}} dz = 0$, mithin nach 397, die Diffe nach x genommen, $\frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{x} + \frac{d^{-1}}{z} \frac{8b_b z^b}{8a_a z^a + 8b_b z^{b+1}} = 0$.

402. **Erklärung.** Folgen, welche sich gleichstufig machen lassen, nennen wir gleichstufbare Folgen.

Da die Folgen für jeden Wert der Veränderlichen gelten müssen, so kann man sie in manchen Fällen dadurch gleichstufig machen, dass man statt der gegebenen neue Veränderliche einführt.

403. **Satz.** Die Gleichung $(a + bx + cy) dx + (e + fx + gy) dy = 0$ lässt sich, sofern $bg > cf$ ist, gleichstufig machen, indem man $x = t + \alpha$ und $y = u + \beta$ setzt, wo α und β Beständige sind. — Sie lässt sich getrennt machen, wenn $bg = cf$ ist.

Im erstern Falle setze $\alpha = \frac{ec - ag}{bg - cf}$, $\beta = \frac{af - eb}{bg - cf}$; dann ist

$$(bt + cu) dt + (ft + gu) du = 0.$$

Im zweiten Falle setze $bx + cy = z$, dann wird

$$dx + \frac{(eb + fz) dz}{abc - eb^2 + (bc - fb)z} = 0.$$

Beweis. 1. Setze $x = t + \alpha$, $y = u + \beta$, dann wird die Gleichung $(a + b\alpha + c\beta + bt + cu) dt + (e + f\alpha + g\beta + ft + gu) du = 0$.

Setze

$$a + b\alpha + c\beta = 0, e + f\alpha + g\beta = 0, \text{ so wird } \alpha = \frac{ec - ag}{bg - cf}, \beta = \frac{af - eb}{bg - cf}$$

Dann ist die Gleichung gleichstufig. Aber wenn $bg - cf = 0$ ist, so ist diese Einführung unbrauchbar.

2. In diesem Falle wird die obige Gleichung, da $bg = cf$ oder $\frac{f}{b} = \frac{g}{c}$ ist, $adx + edy + (bx + cy) \left(dx + \frac{f}{b} dy \right) = 0$. Setze hier

$$bx + cy = z, \text{ oder } y = \frac{z}{c} - \frac{b}{c}x, \text{ also } dy = \frac{dz}{c} - \frac{b}{c}dx$$

so erhalten wir

$$adx + \frac{e}{c} dz - \frac{eb}{c} dx + z \left(dx + \frac{f}{bc} dz - \frac{f}{c} dx \right) = 0 \text{ oder mit } bc \text{ multipliziert } (abc - eb^2 + z(bc - fb)) dx + (eb + fz) dz = 0$$

$$dx + \frac{(eb + fz) dz}{abc - eb^2 + (bc - fb)z} = 0,$$

3. Wird in diesem Falle $bc - fb = 0$, d. h. $f = c$, so folgt

$$\frac{dx}{abc - eb^2} + \frac{(eb + cz)dz}{2ebz + cz^2} = 0, \text{ also } x + \frac{2ebz + cz^2}{2(abc - eb^2)} = 0.$$

Ganz in gleicher Weise lassen sich Gleichungen der Form

$$(a + bx + cy)\frac{dx}{x} + (e + fx + gy)\frac{dy}{y} = 0$$

gleichstufig machen.

Die Diffgleichungen von einander abhängiger Veränderlicher haben für die strengen Wissenschaften einen nur geringen Wert und sind vielfach bearbeitet; hier übergehe ich dieselben.

Viel wichtiger sind die Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher, zu denen wir uns jetzt wenden.

c. Die Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher.

Satz. Wenn zwei Veränderliche unabhängig von einander sind, 404. so sind auch alle Diffe der einen nach der andern entweder Null oder Eins geteilt durch Null, und umgekehrt, wenn alle Diffe der einen Veränderlichen nach der andern Null oder Eins geteilt durch Null sind, so sind die beiden Veränderlichen unabhängig von einander.

Beweis. Wenn $\frac{d^a}{x} y = c$ wäre, wo $c \geq 0$ und auch $\geq \frac{1}{0}$, so folgte $y = \frac{d^{-a}}{x} c = \frac{c}{a!} x^a$ (nach 195), d. h. es wäre y gleich einer Folge von x , also nicht unabhängig von x . Wenn also y unabhängig von x sein soll, so muss $\frac{d}{x} y$ entweder Null oder Eins geteilt durch Null sein. Sei $\frac{d}{x} y = 0$, so ist $\frac{d}{y} x = \frac{1}{0}$ nach 96, sei $\frac{d}{x} y = \frac{1}{0}$, so ist $\frac{d}{y} x = 0$.

Satz. In jeder Diffgleichung erster Ordnung $= 0$, in welcher 405. die Veränderlichen unabhängig von einander sind, ist jedes Glied gleich Null oder wenn x, y, z, \dots unabhängig von einander sind und wenn $\frac{d}{x} x f_1(x, y, z, \dots) + \frac{d}{y} y f_2(x, y, z, \dots) + \frac{d}{z} z f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0$ ist, so ist $f_1(x, y, z, \dots) = 0, f_2(x, y, z, \dots) = 0, f_3(x, y, z, \dots) = 0$ u. s. w.

Beweis. Wenn

$$\frac{d}{x} x f_1(x, y, z, \dots) + \frac{d}{y} y f_2(x, y, z, \dots) + \frac{d}{z} z f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0$$

ist, so ist, da y, z, \dots unabhängig von x sind, nach 400 $\frac{d}{x} y = 0$,

$\frac{d}{x} z = 0, \dots$, mithin ist, da nach 86 $\frac{d}{x} x = 1$ ist, $f_1(x, y, z, \dots) = 0$.

Ebenso folgt, da auch x, z, \dots unabhängig von y sind, $f_2(x, y, z, \dots) = 0$, ebenso, da auch x, y, u, \dots unabhängig von z sind, $f_3(x, y, z, \dots) = 0$ u. s. w.

406. **Satz.** Für jede Diffgleichung erster Ordnung $= 0$, in welcher die Veränderlichen unabhängig von einander sind, $\varphi_0(x, y, z, \dots) = \frac{d}{dx} f_1(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dy} f_2(x, y, z, \dots) + \frac{d}{dz} f_3(x, y, z, \dots) + \dots = 0$, erhält man die Integren

$$\frac{d^{-1}}{dx} f_1(x, y, z, \dots) = 0, \frac{d^{-1}}{dy} f_2(x, y, z, \dots) = 0, \frac{d^{-1}}{dz} f_3(x, y, z, \dots) = 0.$$

Beweis. Nach 401 folgt aus der gegebenen Gleichung die Formel $\varphi x = \frac{d}{dx} f_1(x, y, z, \dots) = 0$, mithin ist

$$\frac{d^{-1}}{dx} \varphi_0(x, y, z, \dots) = \frac{d^{-1}}{dx} \left[\frac{d}{dx} f_1(x, y, z, \dots) \right] = \frac{d^{-1}}{dx} f_{01}(x, y, z, \dots) \text{ u. s. w.}$$

407. **Satz.** Für die Gleichungen aller von einander unabhängigen Größen gelten die Gesetze des ersten Abschnittes der Ausdehnungslehre.

Beweis. Die Erklärungen sind in beiden Wissenschaften ganz dieselben und folgen daher auch dieselben Gesetze, da auch für beide Wissenschaften alle Gesetze der Zahlenlehre gelten.

Wegen der weiteren Sätze über die Gleichungen mit mehreren von einander unabhängigen Größen kann ich mich auf die Ausdehnungslehre beziehen, wo die Sätze über Einführung neuer Veränderlicher und über das Gebiet von n freien Größen vollständig erörtert ist. Ebenso findet man die weiteren Sätze über die Diffe (Differentialquotienten) und über die Integren und Integrale in der Erweiterungalehre und kann hier darauf verwiesen werden.

Vierter Abschnitt der Folgelehre:

Die erweiternde Folgelehre oder die Lehre von den erweiterten Folgen oder Funktionen.



Erklärung. Erweiterte Folgen oder Funktionen werden die 408. Folgen oder Funktionen genannt, für welche ganz neue, eigentümliche Gesetze gelten.

Solche erweiterten Folgen oder Funktionen sind die Fourierschen, die Bernouillischen, die Gamma, die elliptischen Funktionen u. s. w. Es sind die Gesetze derselben von grosser Wichtigkeit.

Bei meinem vorgerückten Alter aber und bei den vielen mir noch anderweitig vorliegenden Arbeiten muss ich es mir versagen, auf dieselben einzugehen und dies um so mehr, da ich hier noch nicht neue Wege eingeschlagen habe.

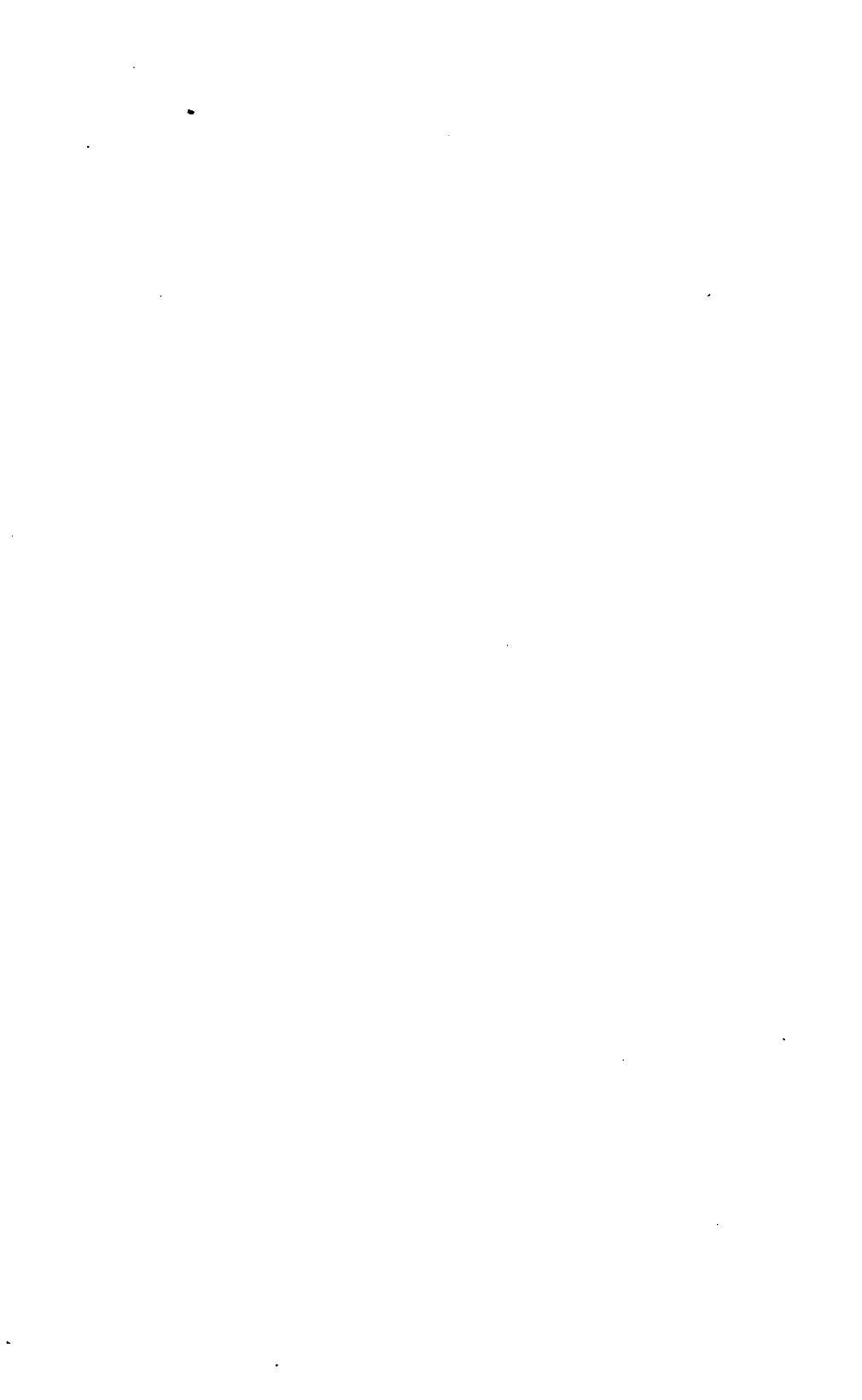


Die
Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft
von den extensiven Größen

der
niedere Zweig der Synthese.

Dritter Zweig
der
Formenlehre oder Mathematik.





V o r w o r t.

Die Geschichte der Ausdehnungslehre oder der Wissenschaft von den extensiven Größen ist eine sehr kurze.

Die Idee derselben ist zuerst um 1700 n. Chr. von Leibniz angeregt. Er nennt dieselbe eine geometrische Charakteristik und rühmt von ihr, dass sie für jede Aufgabe der Raumlehre zugleich Lösung, Zeichnung und Beweis auf einfache Weise gebe, dass sie ebenso die Bewegungslehre oder Mechanik neu begründe und für die Erforschung des innern Baues der Körper Grotes leisten müsse, ja dass sie auch auf andere Dinge der Außenwelt die reichsten Anwendungen zulasse.

Nach Leibniz hat diese Idee lange geruht.

Zwar hat mein Vater, der Professor Justus Grassmann „Raumlehre Teil II“ Berlin 1824 Seite 194 und ferner „Trigonometrie“ Berlin 1835 Seite 10 das Rechteck bezüglich das Parallelogramm als das wahre geometrische Produkt und die Konstruktion desselben als die eigentliche geometrische Multiplikation aufgefasst. Zwar hat „Möbius barycentrischer Kalkül“ Leipzig 1827 die Addition der Punkte und Bellavitis in „Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto“ 1835 und 1837 die geometrische Addition der Strecken, sowie unabhängig von ihm auch „Möbius Mechanik des Himmels, Leipzig 1843“ gleichfalls die geometrische Addition der Strecken gelehrt. Aber alle diese Versuche blieben doch nur vereinzelt und kamen nicht zu einer allgemeinen Auffassung der Sache, sondern blieben nur in einzelnen geometrischen Betrachtungen befangen.

Der erste, der die Idee der Ausdehnungslehre als eines neuen Zweiges der reinen Mathematik aufgefasst und ausgebildet hat, ist mein Bruder

Hermann Grassmann gewesen. Derselbe machte im Winter 1839 bis 1840 eine große Arbeit über die Ebbe und Flut, studierte dazu Lagrange *mécanique analytique* und Laplace *mécanique céleste*, versuchte bei diesen Arbeiten die Sache durch Addition bez. Multiplikation der Bewegungen zu vereinfachen, und kam so zunächst zu einer Reihe von Gesetzen über Addition und Multiplikation von Strecken bez. Bewegungen. Er verfolgte die Sache in den folgenden Jahren weiter und gab „Die lineale Ausdehnungslehre“ Leipzig 1844 heraus. In diesem Werke geht er noch vorwiegend von geometrischen Größen, bez. statischen Momenten aus und sucht daraus die Gesetze der neuen Wissenschaft zu gewinnen. Auch die Preisschrift „Geometrische Analyse“, geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik“ Leipzig 1847 steht noch ganz auf diesem Standpunkte. Am 15. September 1845 lehrte nun auch Saint-Venant in Paris, ohne das Werk des Bruders zu kennen, die geometrische Multiplikation der Strecken in „Comptes rendus“ Paris 1845, Tom. 21, S. 620 ff. Der Bruder sandte daher zwei Exemplare seines Werkes an Cauchy in Paris, eins für Cauchy, eins für Saint-Venant; der Empfang der Bücher ist bestätigt. Cauchy hat dadurch angeregt, ähnliche Betrachtungen angestellt und demnächst „Comptes rendus“ Paris 1853 eine Methode veröffentlicht, um mittels gewisser symbolischer Größen, welche er *clefs algébriques* nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in H. Grassmanns Ausdehnungslehre von 1844 (§ 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Er ist dabei offenbar in dem Glauben gewesen, dass diese Methode von ihm herühre, indem er vergessen hatte, woher er die Anregung zu dieser Methode erhalten hatte. Der Bruder glaubte es der Sache schuldig zu sein, dass er eine Prioritäts-Reklamation an die Pariser Akademie sende; dieselbe ist, wie die „Comptes rendus“ Tom. 38, S. 741“ berichten, im April 1854 einer Kommission zur Prüfung und Berichterstattung übergeben; allein weder Cauchy, noch diese Kommission haben ein Wort darüber verlauten lassen. Es ist die Priorität des Bruders also unzweifelhaft.

Im Jahre 1847 verbanden sich nun die Brüder Hermann und Robert Grassmann, um die Ausdehnungslehre, unabhängig von der Geometrie, als eignen Zweig der reinen Mathematik in strenger Form durch Fortentwicklung abzuleiten und bis zu den Grenzen ihres Geltungsgebiets zu entwickeln. Das damals ausgearbeitete Heft von 132 Seiten ist noch heute im Besitze des Verfassers. In dieser gemein-

samen Arbeit behandelten sie zunächst die Gebietslehre bis zu den Gebieten nter Stufe und der Unabhängigkeit derselben von den ursprünglichen Einheiten und gewannen hier bereits den Satz, dass die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Stufenzahl des beide umfassenden oder des verbindenden Gebietes plus der Stufenzahl des beiden gemeinschaftlichen Gebietes sei.

Sie leiteten demnächst die verschiedenen Arten der Multiplikation ab und kamen bereits damals zu den drei Arten derselben: der Flachung, welche sie äusere Multiplikation nannten, der Schattung oder der innern Multiplikation und der additiven (algebraischen) Multiplikation.

Bei der Flachung oder äusern Multiplikation leiteten sie zunächst die Gesetze der Flachung, namentlich die Gesetze über den Zeichenwechsel bei Vertauschung der Fache oder Faktoren, sowie die Gesetze der linealen Aenderung ab, behandelten dann das Produkt zweier Größen höherer Stufen oder die Fläche der Fläche und die Summen dieser Fläche und entwickelten die Gesetze der bezüglichen Flachung, wie die der Ergänzungen zum Hauptgebiete und die der Zurückleitung auf ein Gebiet.

Bei der innern Multiplikation (der Schattung) leiteten sie die Beziehung der innern Multiplikation zu der Multiplikation der Ergänzungen ab, ebenso die Sätze, wann das innere Produkt Null wird, sowie den Satz über die Gleichheit der innern Quadrate, oder mit andern Worten den Satz für die Einführung der Winkel.

Bei der additiven Multiplikation (der Flechtung) endlich entwickelten sie die Gesetze derselben, führten demnächst den Quotienten ein, leiteten die Gesetze für die Division ab, wie für die Affinität und die Multiplikation der Quotienten, und gelangten zu den Potenzen der Quotienten wie zu den Produkten mit einer und mehrern Lücken und zu dem polynomischen Lehrsatze für diese Art der Produkte. Fassen wir demnach Alles zusammen, so waren in diesem Jahre bereits alle Zweige der Ausdehnungslehre in strenger Form entwickelt, wenn gleich die Form noch vielfach zu wünschen übrig lies und die Details dieser Zweige teilweise noch nicht entwickelt waren. Welchen Anteil jeder der beiden Brüder an den Resultaten dieser gemeinsamen Arbeit hatte, lässt sich nicht mehr genau feststellen, indem bald dieser bald jener entscheidend eingriff und Schwierigkeiten überwand. Jeder von beiden Brüdern fühlte, dass er allein erlahmen würde, wenn er die Ideen mit eiferner Konsequenz bis in die letzten möglichen Operationen verfolgen wollte, und dass sie nur mit vereinten Kräften die Sache

zwingen könnten. Es haben eben beide zusammengewirkt und jeder seinen Teil beigetragen. Es will aber der Verfasser, Robert Grassmann, indem er dies Verhältniss darlegt, keineswegs für sich einen Anteil an der Erfindung der Ausdehnungslehre vindiciren: diese Erfindung ist und bleibt das alleinige geistige Eigentum von Hermann Grassmann. Dem Robert Grassmann kommt nur das Verdienst zu, auf die Allgemeinheit der Auffassung und auf die Strenge der Form hingewirkt und dadurch an der Lösung der Schwierigkeiten mitgewirkt zu haben.

Wie viel Wert beide Brüder auf diese Art des Zusammenarbeitens legten, das zeigt sich darin, dass sie, sobald es wieder möglich war, nochmals in den Jahren 1855 und 1856 diese Art des Zusammenwirkens versuchten. Aber sie waren inzwischen zu verschiedene Wege gegangen, die bisherige Form des Zusammenarbeitens wollte nicht mehr gelingen. Sie führten daher die neue Form ein, dass der eine Bruder die eine Woche die Ausarbeitung selbständig vornahm, diese Arbeit vortrug, der andere Bruder dann die Kritik übte und seinerseits eine Woche die selbständige Arbeit machte und so umschichtig. Die Arbeit ward dadurch sehr wesentlich gefördert. Als diese Arbeit beendet war, erkannten die beiden Brüder, dass die Arbeit soweit vollendet sei, als sie durch gemeinsames Arbeiten gefördert werden könne. Sie theilten sich daher die weiteren Arbeiten, wobei nur bemerkt werden möge, dass sie auch die Zahlenlehre, die Logik und die Kombinationslehre in ganz gleicher Weise gemeinsam bearbeitet hatten. Hermann übernahm die Herausgabe der beiden mathematischen Zweige: der Arithmetik und der Ausdehnungslehre, Robert übernahm die Herausgabe der beiden philosophischen Zweige: der Logik und der Kombinationslehre.

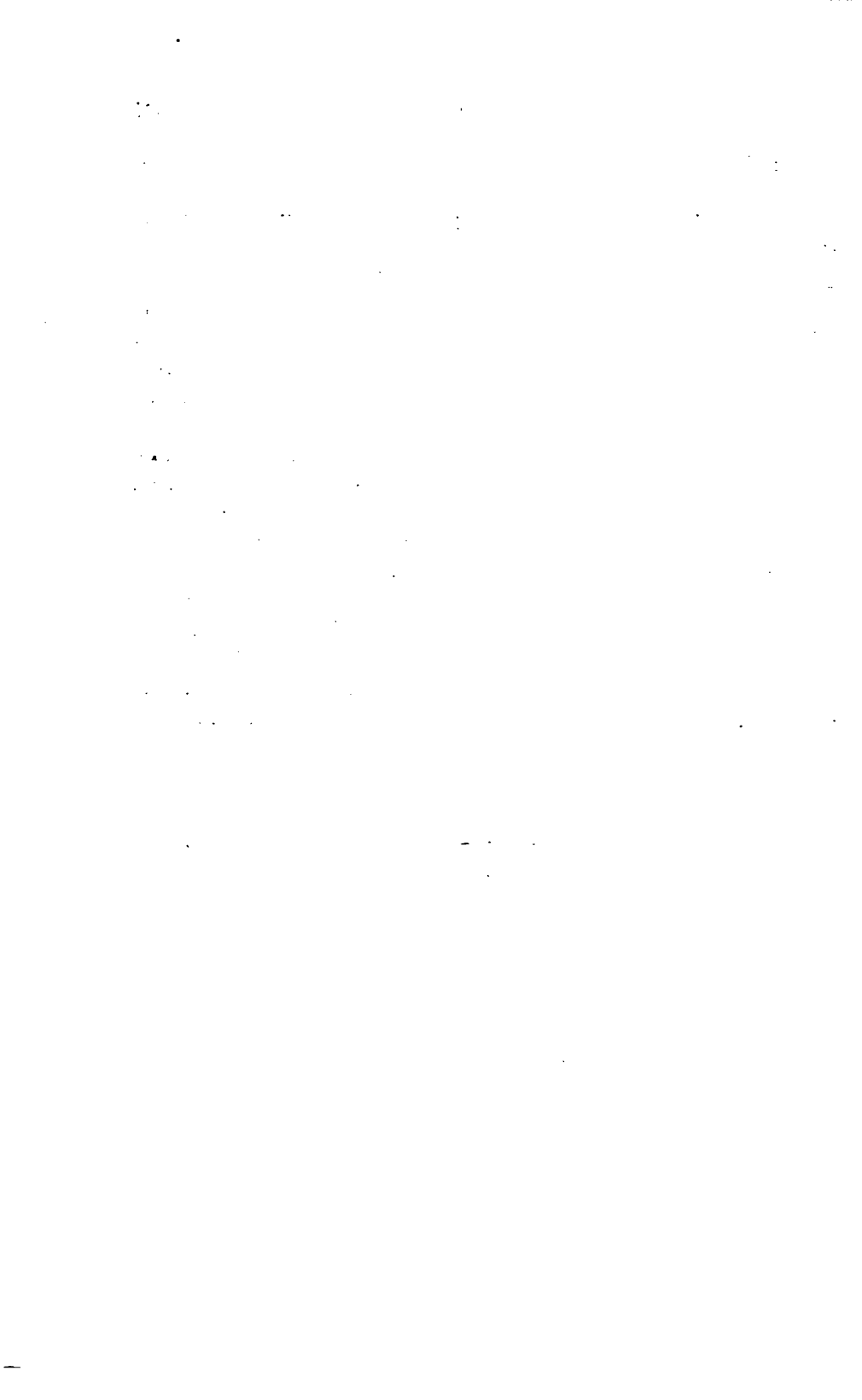
Hermann Grassmann hat zuerst seine Aufgabe gelöst. Er gab 1860 „Die Arithmetik“ und 1862 „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin bei A. Enslin heraus. In diesem Werke sind alle Zweige der Ausdehnungslehre und auch die Anfänge der Funktionenlehre der ausgedehnten Grösen oder der Erweiterungslehre dargestellt.

Viel später als der Bruder Hermann ist Robert Grassmann dazu gekommen, seine Aufgabe zu lösen. Erst im Jahre 1872 gab derselbe die Logik und die Kombinationslehre und ausserdem die Formenlehre oder Mathematik, eine gedrängte kurze Uebersicht der fünf Zweige: der Grösenlehre, der Logik, der Kombinationslehre, der Zahlenlehre und der Ausdehnungslehre heraus, in welcher letztern er die mannig-

fachen Beziehungen darstellt, welche diese Zweige unter einander bieten.

Die Ausdehnungslehre hat durch die Ausgabe des Werkes H. Grassmann „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin 1862 ihre Ausbildung als eigener Zweig der Mathematik erfahren. Leider ist der Bruder Hermann Grassmann bereits 1877 gestorben, das Werk gegenwärtig vergriffen. Eine neue Ausgabe desselben durch den Sohn des Verstorbenen ist in Vorbereitung begriffen; sonst hat es Niemand unternommen, diesen wichtigen Zweig der Mathematik auszuarbeiten und neu darzustellen.

In der Mathematik dürfte dieser wichtige Hauptzweig der Mathematik mit seinem höhern Zweige, der Erweiterungslehre, jedenfalls nicht fehlen. Ueberdies war der Verfasser durch die gemeinfamen Arbeiten mit seinem Bruder Hermann Grassmann, wie wohl nur wenige andere eingeweiht in die Gedanken und in die Entwicklung dieses Buches, hatte wiederholt an dem Zweige gearbeitet und konnte diesem Hauptzweige der Mathematik durch die Vergleiche und durch die Heranziehung der andern Hauptzweige der Denklehre eine erneute und in einzelnen Begriffen wohl noch verbesserte und klarere Gestaltung geben. Der Verfasser hat daher diesen Hauptzweig neu ausgearbeitet.



Einleitung in die Ausdehnungslehre.

Die Idee der Ausdehnungslehre. Zum leichten Verständnisse der Ausdehnungslehre ist es wichtig, dass man sich mit der Idee der Ausdehnungslehre vertraut mache.

In der Zahlenlehre hatten wir nur eine Einheit, die Eins, und erzeugten durch fortschreitendes Zufügen der Eins die Zahlen, welche wir sämtlich unter einander ungleich setzten und dann weiter verknüpften.

In der Ausdehnungslehre setzten wir nun verschiedene Einheiten, und nennen eine GröÙe eine neue Einheit, wenn sie sich nicht als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt. Wie bei allen mathematischen Zweigen gilt auch bei ihr das Gesetz der mathematischen Zufügung, dass alle durch fortschreitendes Zufügen dieser Einheiten entstandenen GröÙen sämtlich einander wie den Einheiten ungleich sein sollen, mit andern Worten, auch hieraus folgt, dass sich nicht eine Einheit als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt, dass sich also nicht

$e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_n e_n$ setzen lässt, wo $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ reine oder reelle Zahlen sind.

Für die Ausdehnungslehre gilt, wie für alle Zweige der Denklehre, die Einigung beim Fügen. Es gilt hier aber auch die Vertauschung; denn will man $(e_1 + e_2) + (e_1 + e_2)$ zufügen können, so muss man e_1 und e_2 vertauschen dürfen und erhält dann $2(e_1 + e_2) = e_1 + e_1 + e_2 + e_2 = 2e_1 + 2e_2$. Es gelten dann auch für die Ausdehnungslehre alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, des Vervielfachens und des Teilens mit Zahlen, wie bei der Zahlenlehre.

Es gelten dann aber auserdem zunächst die folgenden Gesetze. Wenn $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ ist, so müssen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sämtlich gleich Null sein; denn sollte auch nur eine z. B. α_1 ungleich Null sein, so könnte man alle Glieder durch α_1 teilen und erhielte dann $e_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} e_n = 0$, d. h. e_1 als eine Vielfachenfumme der andern, was gegen die Erklärung der neuen Einheit ist.

Ferner sind in der Ausdehnungslehre zwei GröÙen

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ und $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ dann und

nur dann gleich, wenn $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ ist; denn zieht man die zweite von der ersten ab, so erhält man

$$a - b = 0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 = \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n$$

und hier muss, wie bewiesen $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$ sein, woraus unmittelbar $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ folgt.

In der Ausdehnungslehre kann man nun auch die Einfachen oder Einheiten miteinander weben oder multiplizieren. Auch hier muss für das Weben Einigung gelten, wenn man überhaupt Formveränderungen zulassen will. Dagegen darf man nicht $ee = e$ setzen, denn beachtet man, dass nach der Grösenlehre $e \cdot 1 = e$

und auch $1 = \frac{e}{e}$ ist, so erhält man dann

$$e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{ee}{e} = \frac{e}{e} = 1$$

d. h. es werden dann alle Einfachen gleich 1 und wir sind dann wieder in der Zahlenlehre, nicht in der Ausdehnungslehre.

Wir müssen also ee ungleich e setzen, das Einfachste ist ee gleich Null zu setzen: Soll dann auch eine andere Gröse als Einfaches oder Einheit gesetzt werden können, z. B. $e_1 + e_2$, so ergibt sich

$$0 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2 \quad \text{d. h. da } e_1 e_1 = 0 \text{ und } e_2 e_2 = 0, \text{ so bleibt } 0 = e_1 e_2 + e_2 e_1 \text{ oder } e_2 e_1 = -e_1 e_2.$$

Diese Art der Webung nennt man eine Flachung (kombinatorische Multiplikation), das Ergebniss ein Flach. Für die Flachung sind also nur die Fläche verschiedener Einheiten ungleich Null und gilt keine Vertauschung. Zur Unterscheidung von andern Zeugen oder Produkten setzt man das Flach in scharfe Klammer, also $[e_1 e_2]$.

Wir können aber auch $e_4 e_2$ ungleich Null setzen. Setzen wir hier das Zeug oder Produkt verschiedener Einheiten gleich Null, so erhalten wir die innere Webung, welche sich jedoch leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Die Flachung ist daher die eigentliche Webung der Ausdehnungslehre.

Man kann endlich sowohl das Zeug oder Produkt gleicher Einheiten, als auch das verschiedener Einheiten ungleich Null setzen und dann Vertauschung gelten lassen, dann erhält man

$$(e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2 = (e_1 e_1 + e_2 e_2) + 2e_1 e_2$$

Die Webung heist dann eine Flechtung, das Ergebniss ein Flecht, (dies Flecht entspricht ganz der Richtgröse oder komplexen Gröse $a + ib$ in der Zahlenlehre,

wo $i = (-1)^{1/2}$ ist). Diese letzte Art der Webung gehört aber nicht mehr der Ausdehnungslehre, sondern dem höhern Zweige der Ausenlehre oder der Synthesis, nämlich der Erweiterungslehre, an.

1. Die Grundgesetze der Grösenlehre.

1. **Erklärung.** Die Ausdehnungslehre oder die niedere Synthesis ist der Zweig der Mathematik, für welchen auch Grösen mit verschiedenen Einheiten zugefügt und gewebt werden und für welchen das Zeug oder Produkt mehrer Einheiten wieder eine neue Einheit giebt.

Erklärung. Die Größen der Ausdehnungslehre sind entweder 2.
Einheiten, oder Vielfache der Einheiten oder Vielfachensummen. Die
Vielfachensumme der Größen $a_1, a_2, \dots a_n$ heist eine GröÙe von der
Form $a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = \sum_{i,n} a_i a_i$, die reinen oder reellen
Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ heißen die Vorzahlen oder die Koeffizienten, die
Größen $a_1, a_2, \dots a_n$ heißen die Größen der Vielfachensummen.

Satz. Für die Ausdehnungslehre gelten die Grundformeln und 3.
daraus abgeleitet folgende Gesetze der Größenlehre. Man kann ohne
Änderung des Wertes

- 1) jede Plus- und Malklammer beliebig setzen oder weglassen,
und die Ordnung der Stücke beliebig ändern,
- 2) beim Weben oder Multiplizieren jede Beziehungsklammer auf-
lösen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem
des andern webt oder multipliziert.
- 3) Das Ergebniss jeder dieser Knüpfungen ist wieder eine Ein-
heitsgröÙe, das Zeug oder Produkt der Einheiten ist wieder
eine Einheit.

Beweis: Unmittelbar, da alle Zweige der Mathematik nur Zweige
der Größenlehre sind, wie sie oben in der Größenlehre entwickelt und
bewiesen ist.

Es ist zweckmässig hier darauf aufmerksam zu machen, dass man zwar die
Ordnung der Stücke beliebig ändern kann, nicht aber die Ordnung der Fache
oder Faktoren, für welche keine Vertauschung gilt. Es ist zwar $\alpha a = a\alpha$, wo α
eine Zahl ist; aber nicht ist $e_1 e_2 = e_2 e_1$.

Satz. Für die Größen der Ausdehnungslehre gelten alle Gesetze 4.
der Zahlenlehre über das Zufügen und Abziehen und über das Vervielfachen
und Teilen mit Zahlen.

Beweis: Die Größen der Ausdehnungslehre sind entweder Einheiten
oder Vielfachensummen von Einheiten. Für die Einheiten der Aus-
dehnungslehre gelten nun genau dieselben Erklärungen, wie für die Ein-
heitender Zahlenlehre, mithin gelten auch für die Einheiten der Aus-
dehnungslehre und für die aus ihnen abgeleiteten Vielfachensummen alle
Gesetze, welche in der Zahlenlehre aus diesen Erklärungen abgeleitet
sind, d. h. alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, alle Gesetze des
Vervielfachens und Teilens mit Zahlen.

Erklärung. Einander erfetzend heißen zwei Vereine von 5.
Gleichungen, wenn sich jeder von den beiden Vereinen aus dem andern
ableiten lässt.

6. **Satz.** Wenn eine GröÙe b das Vielfache αa ist einer andern GröÙe $a \geq 0$, so kann man statt $\frac{b}{a}$ die Zahl α setzen, oder es ist

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \geq 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 167.

7. **Satz.** Wenn zwei GröÙen a und b , deren zweite nicht Null ist, Vielfache sind derselben dritten GröÙe c , so kann man statt die erste durch die zweite zu teilen, die Vorzahlen entsprechend teilen oder es ist

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \geq 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 182.

8. **Satz.** Eine Gleichung, deren Glieder alle Vielfache sind derselben GröÙe a ungleich Null, wird durch eine Zahlgleichung ersetzt, welche man erhält, indem man in allen Gliedern die GröÙe a fortlässt oder

$$\text{die Gleichung } \alpha a + \beta a + \dots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \dots$$

wird ersetzt durch die Zahlgleichung

$$\alpha + \beta + \dots = \alpha_1 + \beta_1 + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 6, wenn man beide Seiten durch $a \geq 0$ teilt.

Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

2. Die freien und die hörigen Größen.

Erklärung. Hörig zu den Größen $a_1, a_2, \dots a_n$ heist eine 9. Größe b , wenn sie sich als Vielfachenfumme dieser Größen darstellen lässt, oder wenn

$$b = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = \sum_{i=1}^n a_i a_i \text{ ist.}$$

Frei von den Größen $a_1, a_2, \dots a_n$ heist eine Größe, wenn sie sich nicht als Vielfachenfumme dieser Größen darstellen lässt.

Eine Reihe von Größen ist eine freie Größenreihe, oder die Größen sind gegenseitig frei, wenn jede frei von allen andern ist.

Eine Hörigkeit oder Abhängigkeit herrscht in einer Größenreihe, wenn sich irgend eine derselben als Vielfachenfumme der andern darstellen lässt.

Deckend oder kongruent heissen zwei Größen ungleich Null, wenn die eine das Vielfache der andern ist. Das Zeichen des Deckens ist \equiv z. B. $a \equiv b$.

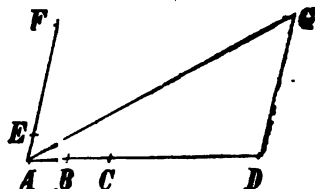
Satz. Jede Einheit ist von allen andern Einheiten frei. Jede 10. Vielfachenfumme von Einheiten ist zu ihren Einheiten hörig.

Beweis: Wir haben für die Mathematik festgestellt, dass die durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstandenen Größen sämtlich einander und den Einheiten ungleich sein sollen, dass also auch nicht eine Einheit einer Vielfachenfumme der andern Einheiten gleich sein kann; daraus folgt der erste Teil des Satzes, der zweite folgt unmittelbar aus 9.

Es ist dringend zu wünschen, dass sich jeder ein anschauliches Bild von den Verhältnissen mache, damit er die Verhältnisse sinnlich anschau und Sicherheit in den Betrachtungen gewinne. Ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zu diesem Zwecke bieten die räumlichen Verhältnisse.

Sei also AB die Einheit e_1 und sei AC auf derselben oder auf einer gleichlaufenden Linie doppelt so lang, so ist $AC = 2e_1$, sei AD α mal so lang, so ist $AD = \alpha e_1$ und sind alle diese Strecken gegenseitig deckend. Sei dagegen AE auf einer Linie, welche die obige schneidet, so kann AE nie einem Vielfachen von e_1 gleichgesetzt werden, es ist also von e_1 frei und kann als eine neue Einheit e_2 gesetzt werden, dann sind alle Strecken auf der Linie AE Vielfache von e_2 , also $AF = \beta e_2$.

Setzen wir nun AD und AF an einander, in der Weise, dass DG gleichlaufend und gleichlang mit AF ist, so ist die Strecke $AG = AD + AF = \alpha e_1 + \beta e_2$ also eine Vielfachensumme von e_1 und e_2 , und zu diesen beiden Einheiten hörig, während e_1 und e_2 gegenseitig frei sind.



Es wird nun unsere Aufgabe sein, auch für andere Größen zu untersuchen, wann sie gegenseitig frei sind, wann nicht.

11. **Satz. Null ist zu jeder Größenreihe hörig.**

Beweis: Was auch $a_1 a_2 \dots$ für Größen sein mögen, so ist

$$0 = S_{a_n a_n} \text{ wo } a_n = 0 \quad (\text{nach Zahlenlehre 134 und 174})$$

12. **Satz. Eine GröÙe, welche zu den Größen $a_1 \dots a_n$ hörig ist, vervielfacht oder teilt man mit einer Zahl, indem man die Vorzahlen mit dieser Zahl vervielfacht oder teilt.**

Beweis: Es sei die GröÙe $b = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n$ und sei β eine Zahl, so ist

$$1. \beta b = \beta(a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n)$$

$$= \beta a_1 a_1 + \beta a_2 a_2 + \dots + \beta a_n a_n$$

(nach Satz 4 und Zahlenlehre 169)

$$2. \text{ Ebenso ist } \frac{b}{\beta} = \frac{1}{\beta} b = \frac{1}{\beta} a_1 a_1 + \frac{1}{\beta} a_2 a_2 + \dots + \frac{1}{\beta} a_n a_n$$

(nach 12₁)

$$= \frac{a_1}{\beta} a_1 + \frac{a_2}{\beta} a_2 + \dots + \frac{a_n}{\beta} a_n$$

(nach Satz 4 und Zahlenlehre 180)

13. **Satz. Eine GröÙe, welche mit einer zweiten zu denselben Größen $a_1 \dots a_n$ hörig ist, fügt man zu oder zieht man ab, indem man die entsprechenden Vorzahlen der Größen $a_1 \dots a_n$ zufügt oder abzieht.**

Beweis: Es sei $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$ und $c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$, so ist

$$1. \quad b + c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n + (\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n)$$

$$= (\beta_1 + \gamma_1) a_1 + (\beta_2 + \gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n + \gamma_n) a_n$$

(nach 3 und Zahlenlehre 183)

2. $b - c$. Um den Satz für $b - c$ zu beweisen und Satz 13₃₁ anwenden zu können, müssen wir statt $b - c$ die Größen $b + (-c) = b + (-1)c$ nehmen, welche nach Satz 4 und Zahlenlehre 133 gleich $b - c$ sind. Dann ist

$$b - c = b + (-1)c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

$$+ (-1)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n)$$

$$= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n + ((-1)\gamma_1 a_1$$

$$+ (-1)\gamma_2 a_2 + \dots + (-1)\gamma_n a_n) \quad (\text{nach 12})$$

$$= (\beta_1 + (-1)\gamma_1) a_1 + (\beta_2 + (-1)\gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n + (-1)\gamma_n) a_n$$

(nach 13₃₁)

$$= (\beta_1 - \gamma_1) a_1 + (\beta_2 - \gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n - \gamma_n) a_n$$

(nach 4 und Zahlenlehre 133)

Satz. Zwischen n Größen $a_1 \dots a_n$ herrscht dann und nur dann 14. eine Hörigkeit, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher wenigstens eine der Zahlen α_n ungleich Null ist.

Beweis: 1. Wenn in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ auch nur eine der Zahlen z. B. α_1 ungleich Null ist, so lässt sich die Gleichung durch α_1 teilen und ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n \quad (\text{nach Satz 12 und 13}),$$

2. Wenn eine der Größen $a_1 \dots a_n$, z. B. a_1 zu den andern hörig ist, so sei

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n,$$

so ist $-a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n = 0$ (nach Zahlenlehre 135)

und ist also mindestens die Vorzahl von a_1 d. h. α_1 ungleich Null.

Satz. Eine GröÙe, welche zu der freien Größenreihe $a_1 \dots a_n$ 15. hörig ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre n Vorzahlen Null sind oder die Gleichung (a) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$, wo $a_1 \dots a_n$ eine freie Größenreihe, wird ersetzt durch die n Zahlengleichungen

$$(b) \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Beweis: 1. Angenommen, es wäre eine der Vorzahlen ungleich Null, so würde nach Satz 14 zwischen den Größen $a_1 \dots a_n$ eine Hörigkeit herrschen, was wider die Voraussetzung ist. Gilt also die Gleichung (a), so gelten auch die n Gleichungen (b).

2. Umgekehrt, wenn die n Gleichungen (b) gelten, so folgt daraus auch nach Zahlenlehre 134 und 174 die Gleichung (a); also sind beide Vereine von Gleichungen einander erfetzend.

16. **Satz.** Zwei Größen, welche zu derselben freien Größenreihe $a_1 \dots a_n$ hörig sind, sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben freien Größen gehörigen Vorschahlen einander gleich sind oder

die Gleichung (a) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$, wo $a_1 \dots a_n$ eine freie Größenreihe, wird ersetzt durch die n Zahlengleichungen

$$(b) \quad \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

Beweis: Aus der Gleichung (a) folgt nach Zahlenlehre 135 und Ausdehnungslehre 13

$$(\alpha_1 - \beta_1) a_1 + (\alpha_2 - \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) a_n = 0.$$

Diese Gleichung aber wird nach Satz 15 ersetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

d. h. nach Zahlenlehre 135 durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

17. **Satz.** Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache sind von Größen, welche sämtlich zu der freien Größenreihe $g_1 \dots g_n$ gehörig sind, wird ersetzt durch n Zahlengleichungen, welche man erhält, indem man statt jeder Größe ihre zu derselben freien Größe g_i gehörige Vorschahl setzt, oder

die Gleichung (a) $\alpha a + \beta b + \dots = xk + \lambda l + \dots$

in welcher $a = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$ $k = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \dots + x_n g_n$

$$b = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_n g_n \quad l = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n$$

\vdots

\vdots

wo $g_1 \dots g_n$ eine freie Größenreihe ist, wird ersetzt durch die n Zahlengleichungen

$$(b) \quad \begin{cases} \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \dots = x x_1 + \lambda \lambda_1 + \dots \\ \alpha \alpha_2 + \beta \beta_2 + \dots = x x_2 + \lambda \lambda_2 + \dots \\ \vdots \\ \alpha \alpha_n + \beta \beta_n + \dots = x x_n + \lambda \lambda_n + \dots \end{cases}$$

Beweis: Setzt man in der Gleichung (a) für die Größen $a \ b \ \dots \ k \ l \dots$ ihre Werte, so erhält man nach Satz 12 und 13

$$(\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \dots) g_1 + (\alpha \alpha_2 + \beta \beta_2 + \dots) g_2 + \dots + (\alpha \alpha_n + \beta \beta_n + \dots) g_n = (x x_1 + \lambda \lambda_1 + \dots) g_1 + (x x_2 + \lambda \lambda_2 + \dots) g_2 + \dots + (x x_n + \lambda \lambda_n + \dots) g_n$$

und diese Gleichung wird nach Satz 16 ersetzt durch die n Zahlen-
gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \dots &= \alpha\alpha_1 + \lambda\lambda_1 + \dots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \dots &= \alpha\alpha_2 + \lambda\lambda_2 + \dots \\ &\vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \dots &= \alpha\alpha_n + \lambda\lambda_n + \dots \end{aligned}$$

Satz. Wenn in einer Reihe von Größen, deren erste ungleich 18.
Null ist, jede folgende von allen vorhergehenden frei ist, so ist die
Reihe eine freie Größenreihe.

Beweis: Angenommen, die Größenreihe sei nicht frei, so herrscht
nach Satz 9 zwischen den Größen eine Hörigkeit, und ist also nach
Satz 14 in der Gleichung $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$, wenigstens
eine der Vorzahlen α_n ungleich Null. Sei nun a_r die letzte Vorzahl
ungleich Null, so kann r entweder gleich 1 oder größer als 1 sein.
Wäre nun $r = 1$, so wäre $\alpha_1 a_1 = 0$, mithin da $\alpha_1 \neq 0$, so wäre
 $a_1 = 0$ (nach 4 und Zahlenlehre 175) was gegen die Voraussetzung
ist. Wäre aber $r > 1$, so wäre

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1} \quad (\text{nach Satz 12 und 13})$$

mithin a_r zu den vorhergehenden Größen hörig, was wieder gegen die
Voraussetzung ist. Es kann also zwischen den Größen $a_1 a_2 \dots a_n$ keine
Hörigkeit herrschen.

Satz. Wenn zwischen n Größen, welche nicht alle Null sind, 19.
eine Hörigkeit herrscht, so lässt sich stets aus ihnen eine freie Größen-
reihe ausfinden, zu der die andern Größen hörig sind.

Beweis: Es seien $a_1 \dots a_n$ die n Größen, so muss sich nach Satz
9 eine als Vielfachensumme der andern darstellen lassen, es sei dies
 a_n und sei

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Größen $a_1 \dots a_{n-1}$ abermals eine Hörig-
keit, so muss sich nach Satz 9 abermals eine als Vielfachensumme
der andern darstellen lassen. Es sei dies a_{n-1} und sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{n-2} a_{n-2}$$

Führt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so er-
hält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n-1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \beta_{n-2}) a_{n-2} \\ (\text{nach Satz 12 und 13}).$$

Es ist dann also auch a_n eine Vielfachensumme der Größen $a_1 \cdot \cdot a_{n-2}$.

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass, wenn zwischen den Größen $a_1 \cdot \cdot a_{n-r}$ noch eine Hörigkeit herrscht, man eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellen kann, etwa a_{n-r} , und dass, indem man für diese GröÙe ihre Vielfachensumme einschiebt, alle bisher als Vielfachensummen der Größen $a_1 \cdot \cdot a_{n-r}$ dargestellten GröÙen demnächst Vielfachensummen der Größen $a_1 \cdot \cdot a_{n-r-1}$ werden, bis man zuletzt entweder zu einer freien GröÙenreihe, oder zu einer einzigen GröÙe a_1 gelangt, von welcher alle andern GröÙen Vielfachensummen sind. Im jetzigen Falle darf wenigstens diese GröÙe nicht Null sein, da sonst (nach Satz 4 und Zahlenlehre 174) alle andern GröÙen als Vielfache derselben Null wären, was der Voraussetzung widerstreitet. In jedem Falle gelangt man also zu einer freien GröÙenreihe, zu der die andern GröÙen hörig sind.

20. **Satz.** Jede GröÙe der Ausenlehre lässt sich darstellen in der Form

$$b = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdot \cdot + a_n a_n$$

wo $a_1 \cdot \cdot a_n$ Zahlen sind und die GröÙen $a_1 \cdot \cdot a_n$ eine freie GröÙenreihe bilden.

Beweis: In dem Ausdrucke, der b gleich ist, lassen sich nach Satz 4, Zahlenlehre 180 und 183 alle Klammern lösen und erscheint mithin die GröÙe a als eine Vielfachensumme, in der jedes Glied ein Zeug oder Produkt ist einer Zahl mit einer GröÙe der Ausdehnungslehre. Zwischen diesen GröÙen kann nun noch eine Hörigkeit herrschen; entfernt man aber die zu den andern GröÙen hörigen in der Weise des Satzes 19, so bleibt zuletzt a als eine Vielfachensumme übrig, in der außer den Zahlen nur gegenseitig freie GröÙen vorkommen.

Es ist wünschenswert, dass sich jeder eine Anschauung von diesen neuen GröÙen verschaffe. Die dehnende Raumlehre des Verfassers bietet hierzu eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf dieselbe zu verweisen.

3. Die Gebiete und deren Zurückleitung.

21. **Erklärung.** Das Gebiet der GröÙen $a_1 \cdot \cdot a_n$ heist die Gesamtheit der zu den GröÙen $a_1 \cdot \cdot a_n$ hörigen GröÙen. Gebiet n ter Stufe heist ein Gebiet, wenn die GröÙen desselben sich als Vielfachensummen von nicht weniger als n gegenseitig freien GröÙen erster Stufe darstellen lassen.

Die reinen Zahlen bilden ein Gebiet nullter Stufe.

Zwei Gebiete heißen einander deckende Gebiete, wenn das eine dem andern gleich oder ein Vielfaches des andern ist.

Das Zeichen \circ vor einem Buchstaben z. B. $\circ A$ gelesen „Gebiet A“ bezeichnet das Gebiet jener GröÙe. Das Zeichen $\circ (e_1, e_2, \dots, e_n)$ bezeichnet das Gebiet der GröÙen e_1, e_2, \dots, e_n .

Die ursprünglichen Einheiten und die Vielfachen und Vielfachen-fummen derselben heißen GröÙen erster Klasse.

In dem Beispiele in der Anmerkung zu Satz 10 ist $AG = \alpha e_1 + \beta e_2$ eine GröÙe erster Klasse, die Ebene durch die Punkte ABE d. h. die Ebene, welche die Gefammtheit der zu den Einheiten e_1 und e_2 hörigen GröÙen $\alpha e_1 + \beta e_2$ um fasst, das Gebiet der GröÙen e_1 und e_2 und zwar ein Gebiet zweiter Stufe.

Ganz ebenso ist der Raum ein Gebiet dritter Stufe gebildet aus drei gegen-seitig freien GröÙen e_1, e_2 und e_3 , welche, da ße gegenseitig frei sein sollen, nicht derselben Ebene angehören dürfen.

Satz. Wenn eine GröÙe erster Klasse a_1 zu n GröÙen erster Klasse $b_1 \dots b_n$ hörig und die zu b_1 gehörige Vozahl in dem Ausdrucke für a_1 ungleich Null ist, so ist das Gebiet der n GröÙen $a_1 b_2 \dots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der n GröÙen $b_1 b_2 \dots b_n$.

Beweis: Es sei $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$, wo $\alpha_1 \geq 0$, dann ist

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} b_n.$$

Dann aber ist auch jede GröÙe c des Gebietes $b_1 b_2 \dots b_n$ z. B.

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n.$$

$$= \frac{\gamma_1}{\alpha_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) b_2 + \dots + \left(\gamma_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) b_n.$$

d. h. auch eine GröÙe des Gebietes $a_1 b_2 \dots b_n$.

Ebenso ist jede GröÙe d des Gebietes $a_1 b_2 \dots b_n$ z. B.

$$d = \delta_1 a_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_n b_n$$

$$= \delta_1 \alpha_1 b_1 + (\delta_2 + \delta_1 \alpha_2) b_2 + \dots + (\delta_n + \delta_1 \alpha_n) b_n$$

d. h. auch eine GröÙe des Gebietes $b_1 b_2 \dots b_n$.

Satz. Wenn m gegenseitig freie GröÙen erster Klasse $a_1 \dots a_m$ zu n GröÙen erster Klasse $b_1 \dots b_n$ hörig sind, so kann man zu den m GröÙen $a_1 \dots a_m$ stets noch $n - m$ GröÙen erster Klasse $a_{m+1} \dots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die GröÙen $b_1 \dots b_n$ auch zu $a_1 \dots a_n$ hörig sind und also das Gebiet der GröÙen $a_1 \dots a_n$ dem der GröÙen $b_1 \dots b_n$ gleich ist, auch kann man jene $n - m$ GröÙen aus den GröÙen $b_1 \dots b_n$ selbst entnehmen.

Beweis: 1. Nach der Voraussetzung ist a_1 zu den GröÙen $b_1 \dots b_n$ hörig; es sei also $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$, so muss, da $\alpha_1 \geq 0$ ist, mindestens eine der Zahlen $\alpha_1 \dots \alpha_n$ ungleich Null sein, es sei dies, da die Zeiger vertauschbar sind, α_1 , so ist nach Satz 22 das Gebiet der GröÙen $a_1 b_2 \dots b_n$ gleich dem Gebiete der GröÙen $b_1 \dots b_n$.

2. Angenommen, es sei das Gebiet der Größen $a_1 \dots a_r b_{r+1} \dots b_n$, wo $r < m$, gleich oder deckend dem Gebiete der Größen $b_1 \dots b_n$, so muss a_{r+1} , da es nach der Voraussetzung eine Größe des Gebietes $b_1 \dots b_n$ ist, auch eine Größe des Gebietes $a_1 \dots a_r b_{r+1} \dots b_n$ sein. Es sei demnach $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \dots + \beta_n b_n$, so muss, da nach der Voraussetzung a_{r+1} frei ist von den Größen $a_1 \dots a_r$, mindestens eine der Vorzahlen $\beta_{r+1} \dots \beta_n$ ungleich Null sein. Es sei also $\beta_{r+1} > 0$, so ist nach 22 das Gebiet der Größen $a_1 \dots a_{r+1} b_{r+2} \dots b_n$ gleich oder deckend dem Gebiete der Größen $b_1 \dots b_n$. Mithin ist, da das Gebiet der Größen $a_1 b_2 \dots b_n$ gleich oder deckend dem der Größen $b_1 \dots b_n$ ist, fortleitend auch das Gebiet der Größen $a_1 \dots a_m b_{m+1} \dots b_n$ gleich oder deckend dem der Größen $b_1 \dots b_n$.

24. **Satz.** Wenn n gegenseitig freie Größen erster Klasse $a_1 \dots a_n$ zu n andern Größen erster Klasse $b_1 \dots b_n$ hörig sind, so ist das Gebiet der ersten Größenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 23, wenn man n statt m setzt.

25. **Satz.** Jedes Gebiet n ter Stufe kann aus n beliebigen gegenseitig freien Größen erster Klasse, welche dem Gebiete angehören, abgeleitet werden.

Beweis: Es sei das Gebiet n ter Stufe ursprünglich aus den n gegenseitig freien Größen erster Klasse $a_1 \dots a_n$ abgeleitet und seien $b_1 \dots b_n$ beliebige n gegenseitig freie Größen erster Klasse, welche nach der Voraussetzung zu dem Gebiete der Größen $a_1 \dots a_n$ hörig sind, so ist nach Satz 24 das Gebiet der ersten Größenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

26. **Satz.** Wenn n Größen erster Klasse $a_1 \dots a_n$ einem Gebiete von kleinerer als n ter Stufe angehören, so herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.

Beweis: Es sei das Gebiet, dem die Größen $a_1 \dots a_n$ angehören, m ter Stufe, wo $m < n$, und sei dies Gebiet zu m Größen $b_1 \dots b_m$ hörig. Entweder herrscht nun zwischen den m Größen $a_1 \dots a_m$ eine Hörigkeit und gilt also der Satz, oder sie sind gegenseitig frei. Im letztern Falle ist das Gebiet der Größen $a_1 \dots a_m$ nach Satz 24 dem der Größen $b_1 \dots b_m$ gleich, dann sind aber auch die Größen $a_{m+1} \dots a_n$ nach Satz 25 zu den Größen $a_1 \dots a_m$ hörig und herrscht also auch in diesem Falle zwischen den Größen $a_1 \dots a_n$ eine Hörigkeit.

27. **Satz.** Wenn ein Gebiet n ter Stufe zu n Größen erster Klasse hörig ist, so sind diese gegenseitig frei und umgekehrt, wenn n Größen erster Klasse gegenseitig frei sind, so ist ihr Gebiet n ter Stufe.

Beweis: 1. Herrschte zwischen den n Größen erster Klasse eine Hörigkeit, so ließen sich einzelne derselben als Vielfachensummen der andern, d. h. von weniger als n Größen erster Klasse darstellen und wäre also auch das Gebiet von niedriger als n ter Stufe (nach Satz 21),

2. Wenn die n Größen erster Klasse gegenseitig frei sind, so sind sie nach Satz 26 nicht aus weniger als n Größen erster Klasse ableitbar, d. h. ihr Gebiet ist nach Satz 21 n ter Stufe.

Erklärung. Zurückleitung der Größe b auf das Gebiet 28.
 $a_1 \dots a_m$ unter Ausschluss des Gebietes $a_{m+1} \dots a_n$ heist die Größe $a_1 a_1 + \dots + a_m a_m$, wenn die Größe $b = a_1 a_1 + \dots + a_n a_n$ ist, wo $a_1 \dots a_n$ gegenseitig freie Größen erster Klasse und $m < n$ ist. Die Zurückleitungen heißen in demselben Sinne genommen, wenn die Größen auf dasselbe Gebiet unter Ausschluss desselben Gebietes zurückgeleitet sind.

Satz. Jede Gleichung, deren Glieder Zeuge oder Produkte einer 29.
 Zahl mit einer Größe erster Klasse sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller Größen der Ausdehnungslehre ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt.

Beweis: Die gegebene Gleichung sei $\alpha a + \beta b + \dots = \kappa k + \lambda l + \dots$ in welcher a, b, \dots, k, l, \dots denselben Wert haben, wie in Satz 17. Dann wird nach Satz 17 die obige Gleichung ersetzt durch die n Gleichungen.

$$\alpha a_1 + \beta \beta_1 + \dots = \kappa \kappa_1 + \lambda \lambda_1 + \dots$$

$$\vdots$$

$$\alpha a_n + \beta \beta_n + \dots = \kappa \kappa_n + \lambda \lambda_n + \dots$$

Verwebt oder multipliziert man nun die ersten m dieser Gleichungen beziehlich mit $g_1 \dots g_m$ und fügt die Gleichungen zu, so erhält man

$$\alpha a' + \beta b' + \dots = \kappa k' + \lambda l' + \dots$$

$$\text{wo } a' = a_1 g_1 + \dots + a_m g_m$$

$$k' = \kappa_1 g_1 + \dots + \kappa_m g_m$$

$$b' = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_m g_m$$

$$l' = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

$$\vdots$$

was zu beweisen war.

Es ist auch hier wieder wünschenswert, dass sich jeder eine Anschauung von diesen neuen Größen verschaffe. Die dehnende Raumlehre des Verfassers bietet hiezu wieder eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf dieselbe zu verweisen.

4. Die Gefetze der Grösengebiete.

Erklärung. Das verbindende Gebiet oder die Summe 30.
 zweier Gebiete heist die Gesamtheit der Größen, welche zu dem einen oder dem andern der beiden Gebiete hörig sind.

Das gemeinsame Gebiet oder das Zeug (Produkt) zweier Gebiete heist die Gesamtheit der Größen, welche den beiden Gebieten gemeinsam, d. h. sowohl zu dem einen Gebiete, als auch zugleich zu dem andern Gebiete hörig sind.

Das Zeug (Produkt) zweier Gebiete, welche keine GröÙe erster Klasse gemeinsam haben, setzen wir gleich Null.

Schneiden sich zwei Ebenen $\circ(e_1, e_2)$ und $\circ(e_1, e_3)$ in der geraden Linie ae_1 , so ist die Linie ae_1 das gemeinsame Gebiet oder das Zeug (Produkt) der beiden Gebiete $\circ(e_1, e_2)$ und $\circ(e_1, e_3)$, dagegen sind alle Punkte und Linien, welche in den beiden Ebenen $\circ(e_1, e_2)$ und $\circ(e_1, e_3)$ enthalten sind, das verbindende Gebiet oder die Summe der beiden Ebenen.

31. **Satz.** Die Summe der Stufenzahlen m und n zweier Gebiete ist gleich der Summe der Stufenzahl g ihres gemeinsamen Gebietes und der Stufenzahl v ihres verbindenden Gebietes, oder es ist

$$m + n = g + v.$$

Beweis. Es sei das Gebiet m ter Stufe nach Satz 27 das der m gegenseitig freien Größen $a_1 \dots a_m$, das n ter das der gegenseitig freien Größen $b_1 \dots b_n$, das gemeinsame g ter Stufe das der gegenseitig freien Größen $c_1 \dots c_g$, so ist nach Satz 23 das Gebiet der Größen $c_1 \dots c_g$ $a_{g+1} \dots a_m$ dem der Größen $a_1 \dots a_n$ und das Gebiet der Größen $c_1 \dots c_g$ $b_{g+1} \dots b_n$ dem der Größen $b_1 \dots b_n$ gleich oder deckend und sind die Größen $c_1 \dots c_g$ $a_{g+1} \dots a_m$ gegenseitig frei und ebenso die Größen $c_1 \dots c_g$ $b_{g+1} \dots b_n$.

Das verbindende Gebiet v ter Stufe aber ist das Gebiet der Größen $c_1 \dots c_g$ $a_{g+1} \dots a_m$ $b_{g+1} \dots b_n$. Angenommen nun, es herrschte hier eine Hörigkeit zwischen den Größen, so müsste diese die Form haben $a + b + c = 0$, wo a zu $a_{g+1} \dots a_m$, b zu $b_{g+1} \dots b_n$, c zu $c_1 \dots c_g$ hörig wäre. In dieser Gleichung kann nicht $a = 0$ sein, da sonst $b + c = 0$ wäre, d. h. eine Hörigkeit zwischen den Größen $c_1 \dots c_g$ $b_{g+1} \dots b_n$ herrschte, ebenso kann nicht $b = 0$ sein. Es wäre also $a = -b - c$, wo $a \geq 0$, d. h. es gehörte a einerseits dem Gebiete $a_1 \dots a_m$ und zugleich andererseits dem Gebiete $c_1 \dots c_g$ $b_{g+1} \dots b_n$ an. Zu den Größen $c_1 \dots c_g$ ist es aber nicht hörig, da $c_1 \dots c_g$ $a_{g+1} \dots a_m$ gegenseitig frei, also hätten die beiden Gebiete $a_1 \dots a_m$ und $b_1 \dots b_n$ ausser $c_1 \dots c_g$ noch eine von diesen freie GröÙe gemein, was wider die Voraussetzung ist. Die Annahme ist mithin falsch, und sind die Größen $c_1 \dots c_g$ $a_{g+1} \dots a_m$ $b_{g+1} \dots b_n$ alle gegenseitig frei, d. h. die Stufenzahl des verbindenden Gebietes v ist nach Satz 27

$$v = m + n - g \text{ oder } m + n = g + v.$$

Satz. Zwei Gebiete m ter und n ter Stufe, welche in einem Gebiete h ter Stufe liegen, haben, wenn $m + n > h$ ist, mindestens ein Gebiet $(m + n - h)$ ter Stufe gemein. 32.

Beweis: Sei das verbindende Gebiet v ter, das gemeinsame g ter Stufe, so ist nach Satz 31 $g = m + n - v$, aber $v \leq h$, da es in dem Gebiete h liegen muss, mithin ist

$$g \geq m + n - h.$$

Satz. Das Zeng oder Produkt zweier Gebiete, welche keine Grösse erster Klasse gemeinsam haben, ist Null oder 33.

$$[\circ(e_{a1}, e_{a2}, \dots, e_{an})] \cdot [\circ(e_{b1}, e_{b2}, \dots, e_{bm})] = 0 \text{ * wenn } a_1 \dots a_n \geq b_1 \dots b_m.$$

Unmittelbar aus Satz 30.

Satz. Für die Gebiete der Ausdehnungslehre gelten alle Sätze der Bestimmungslehre oder der Logik, sofern man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Grösse durch das Wort Gebiet ersetzt. 34.

Beweis: Bei den Gebieten der Grösenlehre ist das Gebiet von $e + e$, und ebenso das Gebiet von $e \cdot e$ gleich dem Gebiete von e , oder es ist $\circ(e + e) = \circ e$ und $\circ(e \cdot e) = \circ e$, kurz es gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Grundformeln der Logik $e + e = e$ und $e \cdot e = e$.

Ferner ist für die Gebiete auch $\circ e_a + \circ e_b \geq 0$ nach Satz 30 und ist $(\circ e_a) \cdot (\circ e_b) = 0$, wenn $a \geq b$ nach Satz 33, also gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Hauptformeln der Logik $e_a + e_b \geq 0$ und $e_a \cdot e_b = 0$, wenn $a \geq b$ ist. Aus diesen vier Sätzen sind aber alle Sätze der Logik abgeleitet, also gelten auch alle Sätze der Logik für die Gebiete der Ausdehnungslehre, wenn man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Grösse durch das Wort Gebiet ersetzt.

Da die Mathematiker meist keine Logik treiben, so scheint ein solches Bezugnehmen auf die Logik bedenklich. Aber will man die Sache streng wissenschaftlich nehmen und alle Sätze beisammen haben, welche man für die Gebiete ableiten kann, so ist es das Kürzeste und Wissenschaftlichste, auf die Logik zurück zu gehen; denn hier sind alle Beweise in kürzester Form gegeben. Ueberdies bieten die in der Logik zur Veranschaulichung aufgeführten Zeichnungen gleichzeitig auch das beste Mittel zur Veranschaulichung der Sätze über die Gebiete in der Ausdehnungslehre. Ich kann daher den geehrten Mathematikern nur empfehlen, an dieser Stelle die Logik zu studiren und die reichsten Anwendungen auf die Gebiete der Ausdehnungslehre zu machen.

Da ich aber nicht hoffen darf, dass die Herren Mathematiker stummlich hier die Logik einschleichen werden, so sehe ich mich hier genötigt, wenigstens die wichtigsten Sätze für die Gebiete abzuleiten.

Für das Anschaulichmachen der Gebiete durch Zeichnung bemerke ich ein für alle Mal, dass die Sache stets so dargestellt werden wird, dass zwei Gebiete nur dann und nur soweit gleiche Einfache enthalten, als sie in denselben Raum fallen oder einander decken, so haben z. B. die Gebiete a und b nur das Stück $efgh$ gemeinsam, sonst lauter verschiedene Einfache, so haben d und c gar kein Einfaches gemeinsam.



In der Raumlehre sagt man d sei gleich c oder gleich groß mit c . In der reinen Denk- und Gebietslehre dagegen sind d und c ganz ungleich, haben auch nicht einen Punkt, nicht ein Einfaches, nicht ein Element gleich. Es ist wichtig, diesen Unterschied zu beachten, da sonst leicht Verwirrungen entstehen könnten.

Es ist nun aus der Zeichnung einleuchtend, dass $a + a = a$ ist, denn wenn ich auf a noch einmal das gleiche a lege, so ändert dies das a nicht, ebenso bleibt $a \cdot a = a$.

35. **Satz.** Für die Gebiete gelten alle Gesetze der Zufügung und der Verwebung, welche wir in der Größenlehre kennen gelernt haben.

Beweis. Unmittelbar nach 30. Denn die Summe, d. h. das verbindende Gebiet bleibt daselbe, ob ich e_1, e_2 mit e_3 , oder ob ich e_1 mit e_2 und e_3 verbinde, und ebenso bleibt es daselbe für e_1 und e_2 wie für e_2 und e_1 . Es gelten also für die Fügung die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung und daraus abgeleitet das ganze Gesetz der Zufügung. Ebenso für das Zeug, d. h. für das gemeinsame Gebiet ist das Gebiet, welches dem a mit dem b und ausserdem mit dem c gemeinsam ist, daselbe, als welches dem a gemeinsam ist mit dem dem b und c gemeinsamen Gebiete und ebenso ist das dem a und b gemeinsame Gebiet daselbe, wie das dem b und a gemeinsame Gebiet, da in beiden Fällen stets dieselben Einheiten gemeinsam bleiben. Es ist also für die Gebiete $abc = a(bc)$ und $ab = ba$, d. h. es gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet das Gesetz der Verwebung.

36. **Satz.** $\circ A + \circ A = \circ A$ | $\circ A \cdot \circ A = \circ A$

Die Summe und das Zeug (Produkt) zweier gleichen Gebiete ist wieder daselbe Gebiet.

Beweis. Unmittelbar aus Satz 30.

Man muss hier von vorne herein wohl darauf achten, dass für die Gebiete und für die Größen der Ausdehnungslehre ganz verschiedene Gesetze der Zufügung, wie der Webung oder Multiplikation gelten, und dass man daher, wenn

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung in die Ausdehnungslehre.	
1. Die Grundgesetze der Größenlehre.	2
Seite.	Numer.
Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.	
2. Die freien und die hürigen Größen.	9
3. Die Gebiete und deren Zurückleitung.	21
4. Die Gesetze der Größengebiete.	30
5. Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrößen.	68
25	
Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flächenlehre.	
6. Die Gesetze der Flächenlehre.	81
7. Die linige Aenderung der Größen erster Klasse.	110
8. Die Fläche der Größen höherer Klassen.	115
34	
Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modulungslehre.	
9. Die grundlegenden Gesetze der Modulungslehre.	126
10. Die allgemeinsten Sätze für Endfläche.	145
11. Die reinen und die gemischten Endfläche.	164
12. Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet.	179
85	
Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.	
13. Die Grundgesetze der Innungslehre.	186
14. Normverein und Kreisänderung.	201
99	
15. Die normige Zurückleitung.	213
105	
16. Die Winkelfolgen der Innenzeuge.	246
121	
Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.	
1. Die Lösung der Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten.	268
128	
2. Die Entfernung aller Unbekannten aus m + 1 Gleichungen ersten Grades.	269
130	
3. Die Entfernung der Unbekannten aus 2 Gleichungen höhern Grades.	270
131	

man nicht in Verwirrung geraten will, Gebiete und Grösen genau unterscheiden muss. So ist für Gebiete $\circ A + \circ A = \circ A$, dagegen für die Grösen $A + A = 2A \geq A$, sofern $A \geq 0$ ist, so ist für Gebiete $\circ A \circ A = \circ A$, dagegen für Grösen $A \cdot A \geq A$, sofern $A \geq 0$ ist.

$$\text{Satz. } n \circ A = \circ A \quad | \quad (\circ A)^n = \circ A \quad 37.$$

Jede Summe und jedes Zeug oder Produkt gleicher Gebiete ist wieder daselbe Gebiet.

Beweis. Unmittelbar aus 36.

$$\text{Satz. } \circ A = \circ A + \circ A \cdot B$$

Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung seines Wertes ein Zeug (Produkt) fügen, in welchem jenes Gebiet ein Fach oder Faktor ist.

$$\circ A = \circ A \cdot (\circ A + \circ B) \quad 38.$$

Man kann jedes Gebiet ohne Aenderung seines Wertes mit einer Summe weben (multiplizieren), in welcher jenes Gebiet ein Stück ist.

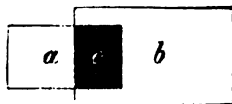
Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Veranschaulichung. $d = a + b$



d

$c = a \cdot b$



$$\text{Satz. Annahme: } \circ A + \circ B = \circ B$$

$$\text{Folgerung: } \circ A \cdot \circ B = \circ A$$

Wenn die Summe zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, so ist das Zeug oder Produkt der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$\circ A \cdot \circ B = \circ A \cdot (\circ A + \circ B)$$

$$= \circ A \cdot \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 35})$$

$$= \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 36})$$

$$= \circ A \quad (\text{nach 38})$$

$$\text{Satz. } \circ A + 1 = 1$$

$$\circ A + 0 = \circ A$$

$$\text{Annahme: } \circ A \cdot \circ B = \circ B \quad 39.$$

$$\text{Folgerung: } \circ A + \circ B = \circ A$$

Wenn das Zeug oder Produkt zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, so ist die Summe der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$\circ A + \circ B = \circ A + \circ A \cdot \circ B$$

$$= \circ A \cdot \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 36})$$

$$= \circ A \cdot (\circ A + \circ B) \quad (\text{nach 35})$$

$$= \circ A \quad (\text{nach 38})$$

$$\circ A \cdot 0 = 0$$

$$\circ A \times 1 = \circ A$$

40.

Eins giebt zu jedem Gebiete gefügt eins, mit jedem Gebiete gewebt oder multipliziert daselbe Gebiet.

Null gibt mit jedem Gebiete gewebt Null, zu jedem Gebiete gefügt, daselbe Gebiet.

Beweis. Die Sätze $\circ A + 0 = \circ A$, $\circ A \times 1 = \circ A$ und $\circ A \times 0 = 0$ gelten schon aus der Größenlehre für jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, also auch für Gebiete. Für die Gebiete ist aber ferner

$$1 = 1 (1 + 1 \times \circ A) \quad (\text{nach 38})$$

$$= 1 + \circ A \quad \text{da } 1 \times \circ A = \circ A \text{ ist.}$$

41. **Satz.** Annahme: $\circ A + \circ C = \circ B + \circ C$ und auch $\circ A \cdot \circ C = \circ B \cdot \circ C$
Folgerung: $\circ A = \circ B$

Zwei Gebiete, welche zu einem dritten Gebiete gefügt, gleiche Summen, und mit einem dritten Gebiete gewebt, gleiche Zeuge oder Produkte geben, sind einander gleich.

Beweis. $\circ A = \circ A (\circ A + \circ C)$ (nach 38)
 $= \circ A (\circ B + \circ C)$ (nach Annahme)
 $= \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ C$ (nach 35)
 $= \circ A \cdot \circ B + \circ B \cdot \circ C$ (nach Annahme)
 $= \circ B (\circ A + \circ C)$ (nach 35)
 $= \circ B (\circ B + \circ C)$ (nach Annahme)
 $= \circ B$ (nach 38)

42. **Satz.** Annahme: $\circ A + \circ B = 0$.

Folgerung: $\circ A = 0, \circ B = 0$.

Wenn die Summe zweier Gebiete Null ist, so ist jedes der beiden Gebiete Null.

Beweis. $\circ A = \circ A + 0$
(nach 40)
 $= \circ A + (\circ A + \circ B)$
(nach Annahme)
 $= (\circ A + \circ A) + \circ B$
(nach 35)
 $= \circ A + \circ B$
(nach 36)
 $= 0$
(nach Annahme)

Annahme: $\circ A \cdot \circ B = 1$.

Folgerung: $\circ A = 1, \circ B = 1$.

Wenn das Zeug (Produkt) zweier Gebiete Eins ist, so ist jedes der beiden Gebiete Eins.

Beweis. $\circ A = \circ A \cdot 1$
(nach 40)
 $= \circ A (\circ A \cdot \circ B)$
(nach Annahme)
 $= (\circ A \cdot \circ A) \cdot \circ B$
(nach 35)
 $= \circ A \cdot \circ B$
(nach 36)
 $= 1$
(nach Annahme)

Für die Gebiete der Ausdehnungslehre giebt es demnach kein Abziehen oder Subtrahiren und kein Theilen oder Dividiren, und giebt es kein negatives Gebiet und keinen Teiler oder Divisor. Denn wollte man $\circ A - \circ A = 0$ setzen,

ſo wäre $\circ A + (-\circ A) = 0$, alſo nach 42 auch $\circ A = 0$, und wollte man $\frac{\circ A}{\circ A} = 1$ ſetzen,

ſo wäre $\circ A \cdot \frac{1}{\circ A} = 1$, alſo nach 42 auch $\circ A = 1$.

Erklärung. Das Nichtgebiet eines Gebietes $\circ A$ wird das Ge- 43.
biet $\bar{\circ A}$ (geleſen Gebiet Nicht A) genannt, welches alle Einheiten
enthält, welche in $\circ A$ nicht enthalten ſind, dagegen keine der Einheiten
enthält, welche in $\circ A$ enthalten ſind. Das Gebiet $\circ A$ heiſt dem Nicht-
gebiete gegenüber das Selbſtgebiet. Das Nicht $\circ A + \circ B$ wird durch $\bar{\circ A} + \circ B$, das Nicht
von $\circ A \times \circ B$ wird durch $\bar{\circ A} \times \circ B$ bezeichnet.

Um das Nicht anſchaulich zu machen, muſs man
die Betrachtung auf ein gewiſſes Gebiet eflg ein-
ſchränken, dann iſt dies die 1 und $a + \bar{a} = 1$



Satz. $\circ A + \bar{\circ A} = 1$

Die Summe oder das ver-
bindende Gebiet jedes Gebietes
und ſeines Nichtes iſt Eins.

$\circ A \cdot \bar{\circ A} = 0$

Das Zeug (Produkt) oder das
gemeinfame Gebiet jedes Gebietes
und ſeines Nichtes iſt Null.

44.

Beweis. 1. Es iſt $\circ A \cdot \bar{\circ A} = 0$ unmittelbar aus 33, da $\circ A$ und $\bar{\circ A}$
gar keine Einheit gemeinſam haben.

2. Es iſt $\circ A + \bar{\circ A} = (\circ A + \bar{\circ A}) 1$ (nach 40). Das Zeug oder
Produkt zweier Gebiete iſt aber nach 30 das beiden Gebieten gemein-
ſame Gebiet, mithin ſind ſämmtliche Einheiten, welche in $\circ A + \bar{\circ A}$
enthalten ſind, auch in 1 enthalten. Andererſeits ſind alle Einheiten,
welche in 1 enthalten ſind, auch in $\circ A + \bar{\circ A}$ enthalten, denn nach 43
ſind alle Einheiten, welche nicht in $\circ A$ enthalten ſind, in $\bar{\circ A}$ enthalten,
mithin ſind in $\circ A + \bar{\circ A}$ alle Einheiten, welche es überhaupt giebt,
alſo auch jede Einheit, welche in 1 enthalten iſt.

Satz. Alle Nichtgebiete deſſelben Gebietes ſind einander gleich, 45.
oder für jedes Gebiet giebt es nur ein Nichtgebiet deſſelben.

Beweis. Es ſeien $\bar{\circ A}$ und $\bar{\circ A}_1$ zwei Nichts deſſelben Gebietes, ſo iſt
 $\circ A + \bar{\circ A} = 1 = \circ A + \bar{\circ A}_1$ und $\circ A \cdot \bar{\circ A} = 0 = \circ A \cdot \bar{\circ A}_1$ (nach 44)
mithin $\bar{\circ A} = \bar{\circ A}_1$ (nach 41)

Satz. $\bar{\bar{\circ A}} = \circ A$

46.

Das Nicht des Nichtes eines Gebietes iſt wieder das erſte Ge-
biet ſelbſt.

Beweis. Es iſt $\bar{\bar{\circ A}} + \bar{\circ A} = 1 = \bar{\bar{\circ A}} + \circ A$ und $\bar{\bar{\circ A}} \cdot \bar{\circ A} = 0 = \bar{\bar{\circ A}} \cdot \circ A$
(nach 43)

alſo iſt $\bar{\bar{\circ A}} = \circ A$

(nach 41).

47. Satz. $\bar{1} = 0$

Das Nicht der Eins ist die Null.

$$\text{Beweis. } 1 + \bar{1} = 1 = 1 + 0$$

(nach 44, 40)

$$1 \cdot \bar{1} = 0 = 1 \cdot 0$$

(nach 44, 40)

$$\text{mithin } \bar{1} = 0 \quad (\text{nach 41})$$

 $\bar{0} = 1$

Das Nicht der Null ist die Eins.

$$\text{Beweis. } 0 + \bar{0} = 1 = 0 + 1$$

(nach 44, 40)

$$0 \cdot \bar{0} = 0 = 0 \cdot 1$$

(nach 44, 40)

$$\text{mithin } \bar{0} = 1 \quad (\text{nach 41})$$

48. Satz.

Annahme: $\circ A \cdot \circ B = 0$, $\circ \bar{A} \cdot \circ B = 0$
Folgerung: $\circ A = \circ B$

Wenn bei zwei Gebieten das Zeug je des einen mit dem Nichte des andern Null ist, so sind beide Gebiete gleich.

Beweis. Nach 40 ist

$$\begin{aligned} \circ A &= \circ A \times 1 \\ &= \circ A (\circ B + \circ \bar{B}) \quad (\text{nach 44}) \\ &= \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ \bar{B} \quad (\text{nach 35}) \\ &= \circ A \cdot \circ B \end{aligned}$$

(nach Annahme)

$$= \circ A \cdot \circ B + \circ \bar{A} \cdot \circ B$$

(nach Annahme)

$$= (\circ A + \circ \bar{A}) \cdot \circ B \quad (\text{nach 35})$$

$$= \circ B \quad (\text{nach 44})$$

Annahme: $(\circ A + \circ \bar{B}) = 1$,
 $(\circ A + \circ \bar{B}) = 1$

Folgerung: $\circ A = \circ B$

Wenn bei zwei Gebieten die Summe je des einen mit dem Nichte des andern Eins ist, so sind beide Gebiete gleich.

Beweis. Nach 40 ist

$$\begin{aligned} \circ A &= \circ A \times 1 \\ &= \circ A (\circ \bar{A} + \circ B) \quad (\text{Annahme}) \end{aligned}$$

$$= \circ A \cdot \circ \bar{A} + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 35})$$

$$= \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 44})$$

$$= \circ A \cdot \circ B + \circ \bar{B} \cdot \circ B \quad (\text{nach 44})$$

$$= (\circ A + \circ \bar{B}) \cdot \circ B \quad (\text{nach 35})$$

$$= 1 \times \circ B = \circ B$$

(nach Annahme)

49. Satz. $\circ A + \circ B = \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ \bar{B} + \circ \bar{A} \cdot \circ B$

Die Summe zweier Gebiete ist gleich der Summe aus dem Zeuge der beiden Gebiete und den beiden Zeugen des einen Gebietes mit dem Nichte des andern.

$$\text{Beweis. } \circ A + \circ B = \circ A \cdot 1 + 1 \cdot \circ B \quad (\text{nach 40})$$

$$= \circ A (\circ B + \circ \bar{B}) + (\circ A + \circ \bar{A}) \cdot \circ B \quad (\text{nach 44})$$

$$= \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ \bar{B} + \circ A \cdot \circ B + \circ \bar{A} \cdot \circ B \quad (\text{nach 35})$$

$$= \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ \bar{B} + \circ \bar{A} \cdot \circ B \quad (\text{nach 36})$$

50. Satz. $\circ A + \circ B + \circ \bar{A} \cdot \circ \bar{B} = 1$.

Bei je zwei Gebieten ist die Summe aus den beiden Gebieten und dem Zeuge (Produkte) ihrer Nichte gleich Eins.

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis. } 1 &= 1 \cdot 1 && (\text{nach } 40) \\
 &= (\bullet A + \bullet \bar{A})(\bullet B + \bullet \bar{B}) && (\text{nach } 44) \\
 &= \bullet A \bullet B + \bullet A \bullet \bar{B} + \bullet \bar{A} \bullet B + \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} && (\text{nach } 35) \\
 &= \bullet A + \bullet B + \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} && (\text{nach } 49)
 \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } \bar{\bullet A + \bullet B} = \bullet \bar{A} \bullet \bar{B}$$

Das Nicht einer Summe oder des verbindenden Gebietes ist gleich dem Zeuge oder dem gemeinfamen Gebiete von den Nichten der Stücke.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \bullet A + \bullet B + \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} &= 1 \quad (\text{nach } 50) \\
 &= \bullet A + \bullet B + \bar{\bullet A + \bullet B} \\
 &\quad (\text{nach } 44) \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bullet A + \bullet B) \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} & \\
 &= \bullet A \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} + \bullet B \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} \quad (\text{nach } 35) \\
 &= 0 \quad (\text{nach } 44) \\
 &= (\bullet A + \bullet B) \bar{\bullet A + \bullet B} \\
 &\quad (\text{nach } 44)
 \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \bullet \bar{A} \bullet \bar{B} = \bar{\bullet A + \bullet B} \quad (\text{nach } 41)$$

$$\bar{\bullet A \bullet B} = \bullet \bar{A} + \bullet \bar{B}$$

51.

Das Nicht des Zeuges oder des gemeinfamen Gebietes ist gleich der Summe oder dem verbindenden Gebiete von den Nichten der Fache oder Faktoren.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \bullet A \bullet B + \bullet \bar{A} + \bullet \bar{B} &= 1 \quad (\text{nach } 50) \\
 &= \bullet A \bullet B + \bar{\bullet A \bullet B} \\
 &\quad (\text{nach } 44) \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet A \bullet B (\bullet \bar{A} + \bullet \bar{B}) & \\
 &= \bullet A \bullet B \bullet \bar{A} + \bullet A \bullet B \bullet \bar{B} \quad (\text{nach } 35) \\
 &= 0 \quad (\text{nach } 44) \\
 &= \bullet A \bullet B \cdot \bar{\bullet A \bullet B} \\
 &\quad (\text{nach } 44)
 \end{aligned}$$

$$\text{mithin } \bullet \bar{A} + \bullet \bar{B} = \bar{\bullet A \bullet B} \quad (\text{nach } 41)$$

Erklärung. Zwei Gebiete der Ausdehnungslehre heissen 52.

- Deckgebiete oder identische Gebiete, wenn beide einander gleich sind oder wenn jede Gröse des einen Gebietes auch eine Gröse des andern ist,
- Eingebiete oder inzidente Gebiete, wenn das eine ein Stück des andern ist, oder wenn jede Gröse des Stückes auch eine Gröse der Summe ist. Die Summe heist dann auch das übergeordnete oder weitere Gebiet, das Stück das untergeordnete oder engere Gebiet,
- Schneidgebiete oder fekante Gebiete, wenn beide teils gemeinfame Grösen, teils jede eigentümliche Grösen hat. Die Gesamtheit der gemeinfamen Grösen heist das gemeinfame Gebiet, die Gesamtheit aller Grösen, welche zu den Grösen beider Gebiete hörig sind, das verbindende Gebiet,
- Trenngebiete oder disjunkte Gebiete, wenn beide Gebiete keine Gröse gemeinfam haben.

Die Anschauung ergibt sich aus der folgenden Zeichnung:

Deckgebiete

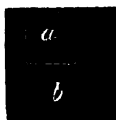
Eingebiete

Schneidgebiete

Trenngebiete



$$a + b = b + a$$



$$a + b = b$$



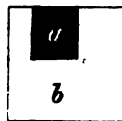
$$a + b$$



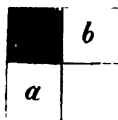
$$a + b$$



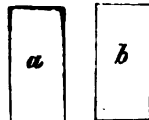
$$ab = a = b$$



$$ab = a$$



$$ab$$



$$ab = 0$$

53. **Satz.** Die Summe oder das verbindende Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasselbe Gebiet, die zweier Eingebiete ist das höhere Gebiet, die zweier Schneidgebiete ist das verbindende Gebiet, die zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist die Summe aller den beiden Gebieten angehörigen Größen.

Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Veranschaulichung siehe bei Satz 52.

54. **Satz.** $\circ A + \circ B = \circ B$

Die Summe der Gebiete ist jedem Stücke gleich oder übergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

Zur Veranschaulichung des Satzes kann die Zeichnung zu 52 für Deckgebiete und Untergebiete dienen.

55. **Satz.** 1 $\circ A$

Die Eins ist das höchste Gebiet, welchem alle Gebiete untergeordnet sind.

Beweis. Nach 40 ist $\circ A + 1 = 1$ und $\circ A \cdot 1 = \circ A$, also ist nach 53 die 1 höher als $\circ A$, was immer auch $\circ A$ fein möge.

Das Zeug (Produkt) oder das gemeinfame Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasselbe Gebiet, das zweier Eingebiete ist das niedere Gebiet, das zweier Schneidgebiete ist das gemeinfame Gebiet, das zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist Null.

Beweis. Unmittelbar aus 33, 36 und 30.

$$\circ A \cdot \circ B = \circ B$$

Das Zeug (das Produkt) der Gebiete ist jedem Fache oder Faktor gleich oder untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

$$0 \leq \circ A$$

Die Null ist das niedrigste Gebiet, welches allen Gebieten untergeordnet ist.

Beweis. Nach 40 ist $\circ A + 0 = \circ A$ und $\circ A \times 0 = 0$, also ist nach 53 die 0 niedriger als $\circ A$, was immer auch $\circ A$ fein möge.

Satz. $(\circ A + \circ B = \circ B) = (\circ A \leq \circ B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern zugefügt, den Wert des selben nicht ändert, ist diesem deckend oder untergeordnet und

Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung seines Wertes das Deckgebiet oder das untergeordnete Gebiet zufügen (addieren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

Satz. $(\circ A \cdot \circ B = 0) = (\circ B \leq \circ A)$

und $(\circ A \cdot \circ B = 0) = (\circ A \leq \circ B)$

Jedes Gebiet ist dem Nichte seines Trenngebietes gleich oder untergeordnet und

Wenn ein Gebiet dem Nichte eines andern gleich oder untergeordnet ist, so ist es von demselben getrennt oder disjunkt.

Beweis. 1. Wenn $\circ A \cdot \circ B = 0$

(Annahme), so ist

$\circ B = \circ B \cdot 1$ (nach 40)

$= \circ B (\circ A + \circ \bar{A})$ (nach 44)

$= \circ B \cdot \circ A + \circ B \cdot \circ \bar{A}$ (nach 35)

$= \circ B \cdot \circ \bar{A}$ (nach Annahme)

d. h. $\circ B \leq \circ \bar{A}$ (nach 56)

2. Wenn $\circ A \leq \circ \bar{B}$, so ist nach

54 $\circ \bar{B} = \circ A + \circ \bar{B}$, also

$0 = \circ \bar{B} \cdot \circ B$ (nach 44)

$= (\circ A + \circ \bar{B}) \cdot \circ B$

$= \circ A \cdot \circ B + \circ \bar{B} \cdot \circ B$ (nach 35)

$= \circ A \cdot \circ B$ (nach 44)

Satz. $(\circ A < \circ B) = (\circ \bar{B} < \circ \bar{A})$

Das Nicht des höhern Begriffes ist dem Nichte des niedern Begriffes untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 57, denn $[\circ A < \circ B]$

$= (\circ A \cdot \circ \bar{B} = 0) = (\circ \bar{B} < \circ \bar{A})$

$(\circ A \cdot \circ B = \circ A) = (\circ A \leq \circ B)$ 56.

Ein Gebiet, welches mit einem andern gewebt (multipliziert) den Wert des selben nicht ändert, ist diesem deckend oder übergeordnet und

Man kann jedes Gebiet ohne Aenderung seines Wertes mit einem deckenden oder ihm übergeordneten Gebiete verweben (multiplizieren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

$(\circ \bar{A} \cdot \circ B = 0) = (\circ B \leq \circ A)$ 57.

$(\circ \bar{A} \cdot \circ B = 0) = (\circ \bar{A} < \circ \bar{B})$

Jedes Gebiet ist dem Nichte seines gleich oder übergeordneten Gebietes getrennt oder disjunkt und

Wenn ein Gebiet einem andern gleich oder untergeordnet ist, so ist es dem Nichte des selben getrennt oder disjunkt.

Beweis. Unmittelbar aus 57 erste Seite.

Zur Veranschaulichung des Satzes dient folgende Zeichnung:



59. **Satz.** $(\circ A + \circ B = \circ B) (\circ A \circ B = \circ B) = (\circ A = \circ B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern Gebiete zugefügt und auch mit ihm verwebt (multipliziert) dies Gebiet nicht ändert, ist diesem Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Da $\circ A + \circ B = \circ B$ ist, so ist $\circ A = \circ A \circ B$ nach 39, also ist $\circ A = \circ A \circ B = \circ B$ nach der Annahme.

60. **Satz.** $(\circ A < \circ B) (\circ B < \circ A) = (\circ A = \circ B)$

Wenn von zwei Gebieten das erste dem zweiten und zugleich das zweite dem ersten untergeordnet ist, so sind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Wenn $\circ A < \circ B$, so ist nach 56 auch $\circ A + \circ B = \circ B$ und wenn $\circ B < \circ A$, so ist nach 56 auch $\circ A + \circ B = \circ A$, mithin ist $\circ A = \circ A + \circ B = \circ B$

61. **Satz.** $(\circ A < \circ B) \cdot (\circ \bar{A} < \circ \bar{B}) = (\circ A = \circ B)$

Wenn das Nicht des niedern Gebietes dem des höhern Gebietes untergeordnet ist, so sind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Nach 58 ist da $\circ A < \circ B$ auch $\circ \bar{B} < \circ \bar{A}$, und da auch $\circ \bar{A} < \circ \bar{B}$, so ist nach 60 auch $\circ A = \circ B$

62. **Satz.** Für deckende Gebiete und für Eingebiete finden die folgenden acht Gleichungen statt, und wenn eine dieser Gleichungen stattfindet, sind die Gebiete deckende oder Eingebiete.

$$\begin{array}{llll} 1. \circ A \leq \circ B & 3. \circ A + \circ B = \circ B & 5. \circ A \circ B = \circ A & 7. \circ A \circ \bar{B} = 0 \\ 2. \circ \bar{B} \leq \circ \bar{A} & 4. \circ \bar{A} + \circ \bar{B} = \circ \bar{A} & 6. \circ \bar{A} \circ \bar{B} = \circ \bar{B} & 8. \circ \bar{A} + \circ B = 1 \end{array}$$

Beweis. Unmittelbar 1 nach 53; 2 nach 58; 3, 4, 5 und 6 nach 56; 7 nach 57. Es bleibt also nur für 8 der Beweis zu führen; es ist aber

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \circ B && (\text{nach 40}) \\ &= \circ \bar{A} + \circ A + \circ B && (\text{nach 44}) \\ &= \circ \bar{A} + \circ B && (\text{nach 56}) \end{aligned}$$

63. **Satz.** Für Trenngebiete (disjunkte Gebiete) finden die folgenden acht Gleichungen statt und wenn eine dieser Gleichungen stattfindet, so sind die Gebiete getrennt oder disjunkt.

$$\begin{array}{llll} 1. \circ A \leq \circ \bar{B} & 3. \circ A + \circ \bar{B} = \circ \bar{B} & 5. \circ A \circ \bar{B} = \circ A & 7. \circ A \circ B = 0 \\ 2. \circ B \leq \circ \bar{A} & 4. \circ \bar{A} + \circ B = \circ \bar{A} & 6. \circ \bar{A} \circ B = \circ B & 8. \circ \bar{A} + \circ \bar{B} = 1 \end{array}$$

Beweis. Unmittelbar aus 62, indem man $\circ B$ in $\circ \bar{B}$ und $\circ \bar{B}$ in $\circ B$ umwandelt, da wenn $\circ A$ und $\circ B$ disjunkt, d. h. nach 53 $\circ A \circ B = 0$ auch nach 57 $\circ A$ dem $\circ \bar{B}$ untergeordnet ist.

64. **Erklärung.** Das Hauptgebiet $\circ H$ heist das Gebiet, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Größen hörig sind. Alle Größen

welche auserhalb des Gebietes liegen, werden für die Betrachtung gleich Null gesetzt. Alle Gebiete, welche das Hauptgebiet schneiden, werden nur soweit betrachtet, als sie in das Hauptgebiet fallen.

Erklärung. Die Ergänzung eines Gebietes heist das Nicht- 65.
gebiet jenes Gebietes, soweit die Einheiten des Nichtgebietes im Hauptgebiete enthalten sind, oder sie ist das Zeug des Nichtgebietes mit dem Hauptgebiete.

Satz. Die Betrachtung wird auf das Hauptgebiet H beschränkt, 66.
indem jedes Glied der Formel mit dem Hauptgebiete H verwebt oder multipliziert wird.

Beweis. Da für die Gebiete nur Zufügung und Verwebung vorkommt, und für diese Rechnungen alle Klammern gelöst werden können, so erhält, wenn man alle Klammern löst, jedes Glied die Form $\alpha \cdot A$ und die ganze Formel die Form

$\sum_{1,n} \alpha_a \cdot A_a = \sum_{1,m} \beta_b \cdot B_b$. Wenn man hier beide Seiten mit H verwebt, so erhält die Formel die Gestalt

$$\left(\sum_{1,n} \alpha_a \cdot A_a \right) \cdot H = \left(\sum_{1,m} \beta_b \cdot B_b \right) \cdot H, \text{ oder nach 35 und Grösenlehre 90}$$

$$\sum_{1,n} \alpha_a \cdot A_a \cdot H = \sum_{1,m} \beta_b \cdot B_b \cdot H$$

Sei nun $\cdot B_c$ ein Gebiet auserhalb des Hauptgebietes, so ist $\cdot B_c \cdot H = 0$ nach 33. Sei $\cdot B_a$ ein Gebiet, welches $\cdot H$ schneidet, so ist $\cdot B_a \cdot H$ nach 30 das beiden Gebieten gemeinsame Gebiet, d. h. es wird nur soweit betrachtet, als es in das Hauptgebiet fällt. Sei endlich $\cdot B_e$ ein Gebiet innerhalb des Hauptgebietes, so ist nach 62 auch $\cdot B_e \cdot H = \cdot B_e$. Aus 1 wird $1 \cdot H = \cdot H$.

Satz. Alle Sätze 34 bis 63 über die Gebiete bleiben bestehen, 67.
sofern man für jedes Gebiet das Zeug des Gebietes mit dem Hauptgebiet, für 1 das Hauptgebiet und für jedes Nichtgebiet die Ergänzung zum Hauptgebiete setzt.

Beweis. Unmittelbar aus 66.

5. Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrößen.

Erklärung. Das Zeug oder Produkt von n Einheiten erster 68.
Klasse heist eine Einheit n ter Klasse, sofern es ungleich Null ist. Jede Einheit n ter Klasse, welche wenigstens eine andere Einheit erster Klasse enthält, als jede andere Einheit n ter Klasse, ist eine von diesen freie Gröse.

Ich habe das Gebiet von n gegenseitig freien Größen erster Klasse oder von n ursprünglichen Einheiten ein Gebiet n ter Stufe genannt. Dagegen nenne ich das Zeug oder Produkt von n ursprünglichen Einheiten eine Einheit n ter Klasse, ebenso das Zeug oder Produkt von n gegenseitig freien Größen erster Klasse eine Größe n ter Klasse. Ich unterscheide also Stufe und Klasse und gebrauche die Stufe nur für die Gebiete, die Klasse nur für die Zeuge oder Produkte. Es ist diese Benennung der Zeuge oder Produkte aber auch geschichtlich berechtigt. In der Bindelehre oder Kombinationslehre heist ein Gebinde von n Einfachen oder Elementen $abc \dots n$ längst ein Gebinde n ter Klasse. Es liegt kein Grund vor, von diesem geschichtlichen Gebrauche abzugehen. Die Sätze aber werden dadurch klarer. Betrachtet man z. B. die Zeuge oder Produkte von m einfachen gegenseitig freien Größen in einem Gebiete n ter Stufe, so ist es klarer von den Größen n ter Klasse in einem Gebiete n ter Stufe zu reden, als von den Größen n ter Stufe in einem Gebiete n ter Stufe.

Die gegebene Erklärung befaßt, dass zwischen den verschiedenen Einheiten höherer Klasse nicht noch Bedingungsgleichungen herrschen dürfen, wodurch die eine als Vielfachenfumme der andern gesetzt wird. Denn sei

$\alpha E + \beta F + \gamma G + \dots = 0$, wo $E, F, G \dots$ verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, und sei wenigstens eine der Vorzahlen z. B. α ungleich Null, so ist die dieser Vorzahl zugehörige Einheit E nach 14 zu den Einheiten $F, G \dots$ hörig, also nicht frei von den Einheiten $F, G \dots$.

69. **Satz.** Wenn $\alpha E + \beta F + \gamma G + \dots = 0$ wo $E, F, G \dots$ verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, so ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0, \dots$ oder eine Größe, welche zu den verschiedenen Einheiten höherer Klasse hörig oder welche eine Vielfachenfumme dieser höheren Einheiten ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre sämtlichen Vorzahlen Null sind.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 15.

70. **Satz.** In jedem Zeuge oder Produkte zweier Größen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Größen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$(aa)(\beta b) = (a\beta)(ab)$$

Beweis: Es ist $(aa)(\beta b) = a(a\beta)b$ (nach 3,1).
 $= a(\beta a)b$ (nach 4).
 $= (a\beta)(ab)$ (nach 3,1).

71. **Satz.** In jedem Zeuge oder Produkte mehrerer Größen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Größen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$P(aa, \beta b \dots) = (a\beta \dots) P(a, b \dots)$$

Satz. In jedem Zeuge oder Produkte mehrerer Größen der Ausdehnungslehre kann man die Fache oder Faktoren, welche Vielfache derselben Größe sind, ohne Aenderung des Wertes vertauschen, oder es ist

$$P(\alpha a, \beta a \dots) = P(\beta a, \alpha a \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } P(\alpha a, \beta a \dots) &= (\alpha \beta \dots) P(a, a \dots) && (\text{nach 71}) \\ &= (\beta \alpha \dots) P(a, a \dots) && (\text{nach Zahlenlehre 160}) \\ &= P(\beta a, \alpha a \dots) && (\text{nach 71}) \end{aligned}$$

Satz. Ein Zeug, dessen einer Fach (Faktor) eine Vielfachenfumme ist, ist gleich einer Vielfachenfumme von entsprechenden Zeugen, welche man erhält, wenn man statt der gegebenen Vielfachenfumme die Stücke setzt oder

$$P(\alpha a + \beta b + \dots) c = \alpha P_{ac} + \beta P_{bc} + \dots$$

Beweis. Unmittelbar aus Größenlehre 71 und Ausdehnungslehre 71.

Satz. Das Zeug oder Produkt zweier Vielfachenfummen aus beliebigen Größen erhält man, indem man jede Größe der ersten mit jeder der zweiten zu einem Teilzeuge einwebt (multipliziert), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Größen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addiert, oder

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) = S \alpha_a \beta_b (a_a b_b)$$

wo $a_a b_b$ beliebige Größen, $\alpha_a \beta_b$ beliebige Zahlen.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) &= S \alpha_a [a_a \cdot (S \beta_b b_b)] && (\text{nach 73}) \\ &= S \alpha_a [\beta_b (a_a b_b)] && (\text{nach 73}) \\ &= S \alpha_a \beta_b (a_a b_b) && (\text{nach 12}) \end{aligned}$$

Satz. Der Satz 74 gilt auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, d. h.

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \cdot (S \gamma_c c_c) \dots = S (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) (a_a b_b c_c \dots)$$

wo $a_a, b_b, c_c \dots$ beliebige Größen und $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c \dots$ beliebige Zahlen.

Beweis: Wenn der Satz für irgend eine Anzahl m von Fachen oder Faktoren gilt (Annahme), so gilt er auch für $m + 1$ Fache.

Es sei nach der Annahme

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \dots (S \mu_m m_m) = S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) (a_a b_b \dots m_m) \text{ so ist}$$

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \dots (S \mu_m m_m) \cdot (S \nu_n n_n)$$

$$= [S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) (a_a b_b \dots m_m)] (S \nu_n n_n) \quad (\text{nach Annahme})$$

$$= S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m \nu_n) (a_a b_b \dots m_m n_n) \quad (\text{nach 74})$$

Nun gilt der Satz 75 nach Satz 74 für zwei Fache oder Faktoren mithin gilt er fortschreitend auch für beliebig viele.

76. **Satz.** Das Zeug oder Produkt von n Vielfachenfommen von Einheiten erster Klasse ist eine Vielfachenfumme von Einheiten n ter Klasse, soweit die Zeuge der n Einheiten erster Klasse ungleich Null bleiben.

Beweis: Unmittelbar aus 75.

Die in Satz 68 bis 75 entwickelten Gesetze sind die allgemeinen Gesetze, welche in der Ausdehnungslehre für alle Arten von Zeugen oder Produkten gelten. Die eigenthümlichen Gesetze für die einzelnen Arten der Zeuge oder Produkte von Größen gehen aus den Bedingungsgleichungen hervor, welche für die Zeuge (Produkte) der Größen aufgestellt werden. Die Zahlgrößen der Ausdehnungslehre unterliegen den gewöhnlichen Gesetzen der Zahllehre; es kommt demnach nur noch darauf an, die Bedingungsgleichungen für die Zeuge der Einheiten aufzustellen.

Wir haben bereits in der Einleitung zur Ausdehnungslehre bei der Idee der Ausdehnungslehre die Arten der Webung oder Multiplikation besprochen, welche bei der Ausdehnungslehre in Betracht kommen. Wir haben dort, dass für die Ausdehnungslehre, als niederer Zweig der Aussenlehre oder Synthesis, nur die Flachung, für welche $e_a e_a = 0$ und $e_a e_b = - e_b e_a$ ist, und die innere Webung, für welche $e_a e_b = 0$ und $e_a e_a \neq 0$ ist, in Betracht kommen, dass aber die letztere sich leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Dass demnach für die Ausdehnungslehre nur die Flachung als eigenthümliche Art der Webung verbleibt.

Für die Erweiterungslehre oder für den höhern Zweig der Aussenlehre oder der Synthesis, lernten wir dort noch die Flechtung kennen, für welche sowohl $e_a e_a \neq 0$, als auch $e_a e_b \neq 0$ ist. Wir könnten hienach sofort zur Flachung übergehen; indessen ziehe ich es doch vor, im Texte noch einen besondern Weg einzuschlagen und die Zeuge oder Produkte der Ausdehnungslehre den Zeugen oder Produkten der Bindelehre, wie der Logik gegenüber zu stellen, und hoffe ich dadurch noch mehr Klarheit in die Sache zu bringen.

In der Ausdehnungslehre kann man, wie in dem innern Denken zwei Ordnungen der Webung oder Multiplikation unterscheiden, nämlich

- 1 Die innere Webung, den Begriffen der Bestimmungslehre oder Logik entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten gleich Null gesetzt wird. $e_a \cdot e_b = 0$.
2. Die äussere Webung, den Gebilden der Bindelehre oder Kombinationslehre entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten ungleich Null gesetzt wird. $e_a e_b \neq 0$.

77. **Erklärung.** Die innere Webung oder die innere Multiplikation heist in der Ausdehnungslehre diejenige Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten Null, das Zeug oder Produkt zweier gleicher Einheiten eins ist.

$$e_a \cdot e_b = 0 \qquad e_a \cdot e_a = 1.$$

Von der innern Webung gibt es nur eine Art. Da $e_a \cdot e_b = 0$, so muss $e_a \cdot e_a \geq 0$ sein, denn setzen wir hier auch $e_a \cdot e_a = 0$, so werden sämtliche Größen Null, d. h. es verschwindet die ganze Webung. Das Zeug $e_a \cdot e_a$ muss also ungleich Null sein. Soll nun aber diese Bedingung eine allgemeine sein, so dass $e_a \cdot e_a \cdots e_a \geq 0$ ist und will man nicht für jedes dieser Zeuge einen andern Wert einführen, so ist es das Einfachste, wir setzen $e_a \cdot e_a \cdots e_a = e_a \cdot e_a$. Soll nun

auch gleichzeitig $e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1$ gelten, so folgt allgemein für jedes beliebige a

$$e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a \cdot 1 = e_a \cdot e_a \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a} \quad (\text{nach 4})$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \quad (\text{nach 4})$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \quad \text{da } e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a$$

$$= e_a \cdot \left(e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a}$$

$$= e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1.$$

d. h. es werden dann alle Zeuge $e_a \cdot e_a = 1$ für beliebiges a . Man kann also alle Zeuge oder Produkte zweier gleicher Einheiten gleich eins setzen und ist für innere Webung allgemein:

$$e_a \cdot e_a = e_b \cdot e_b = 1 \quad e_a \cdot e_b = 0.$$

Wir könnten nun zunächst die Gesetze für die innere Webung entwickeln; aber, wie sich im Folgenden zeigen wird, gewinnen wir diese Gesetze bequemer durch Anwendung der äussern Webung und können demnach sofort zur äussern Webung übergehen.

Erklärung. Die äussere Webung oder Multiplikation 78. heist in der Ausdehnungslehre jede Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier oder mehrer verschiedener Einheiten ungleich Null ist oder $e_a \cdot e_b \geq 0$ $e_a \cdot e_b \cdot e_c \cdots \geq 0$.

In der Bindelehre oder Kombinationslehre werden wir vier Arten von Zeugen oder Produkten kennen lernen, für welche sämtlich die Bedingungsgleichung $e_a \cdot e_b \geq 0$ gilt, nämlich

1. die Geschiede (Komplexionen) oder die Zeuge, für welche Vertauschung zweier Einheiten gilt,
2. die Geänder (Variationen) oder die Zeuge, für welche diese Vertauschung nicht gilt,

und in jeder dieser Gattungen zwei Arten, nämlich

- a) die Vollgebilde (Kombinationen mit Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist und
- b) die Ausgebilde (Kombinationen ohne Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist.

Wir erhalten also in der Bindelehre folgende vier Arten von Zeugen oder Produkten:

Die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung): $e_a \cdot e_a \geq 0$; $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$

Die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung): $e_a \cdot e_a = 0$; $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$

Die Vollgeänder (Variationen mit Wiederholung): $e_a \cdot e_a \geq 0$; $e_a \cdot e_b \geq e_b \cdot e_a$

Die Ausgeänder (Variationen ohne Wiederholung): $e_a \cdot e_a = 0$; $e_a \cdot e_b \geq e_b \cdot e_a$

Verfuchen wir nun diese vier Arten der Zeuge oder Produkte in die Ausdehnungslehre einzuführen, so ergeben sich die folgenden Betrachtungen:

Für die erste Art der Webung, welche den Vollgeschieden (Komplexionen mit Wiederholung) entspricht, für welche also Vertauschung zweier Einheiten gilt, und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt die Grundformel der Verwebung $e_r \cdot e_s = e_s \cdot e_r$ (Größenlehre 61) und geht daraus das ganze Gesetz der Verwebung (Größenlehre 62) hervor, d. h. man kann in jeder Größenknüpfung ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und Malklammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Faches mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es ist dies das Gesetz, welches in der Zahlenlehre seine Geltung hat, der Begründer der Ausdehnungslehre H. Grassmann hat diese Art der Multiplikation daher die algebraische genannt. Es versteht sich von selbst, dass ihr auch eine algebraische Teilung oder Division, eine Höhung oder Potenzirung u. s. w. zur Seite geht, und dass man für alle diese Verknüpfungen ausgedehnte Größen unmittelbar die Gesetze der Zahlenlehre als geltend annehmen darf. Ich nenne diese Art der Webung in der Ausdehnungslehre eine Flechtung, das Zeug oder Produkt ein Flecht*. Der Name algebraische Multiplikation kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. Es ist ja unzweifelhaft, dass jedes Vielfache ea ein algebraisches Produkt ist, dasselbe wird in allen Arten der Multiplikation, bei innerer Webung, wie bei Flachung und Flechtung angewandt. Das Flecht der Ausdehnungslehre muss von diesem algebraischen Produkte unterschieden werden, ich wende daher lieber den Namen Flechtung und Flecht an. Der Bruder hat den Namen algebraische Multiplikation nur gewählt, um den Mathematikern die Sache mehr mundgerecht zu machen und dadurch die Einführung zu erleichtern. Der Begriff der Flechtung ist überdies ein neuer und ist daher für den neuen Begriff auch ein neuer Name erforderlich oder doch wünschenswert.

Für die zweite Art der Webung, welche den Ausgeschieden (Komplexionen ohne Wiederholung) entspricht, für welche die Vertauschung zweier Einheiten gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Bedingung $e_a \cdot e_a = 0$, und, da in der Ausdehnungslehre jede GröÙe als Einheit gesetzt werden kann, auch $0 = (e_a + e_b) (e_a + e_b) = e_a e_a + e_a e_b + e_b e_a + e_b e_b$, also da $0 = e_a e_a = e_b e_b$, auch $0 = e_a e_b + e_b e_a$.

Da nun ferner Vertauschung gilt, so ist $e_a e_b = e_b e_a$ mithin auch $e_a e_b = 0$, d. h. es werden für diese Art der Verwebung sämtliche Zeuge oder Produkte Null und fällt diese Art der Rechnung mithin aus.

Für die dritte Art der Webung, welche den Vollgeändern (Variationen mit Wiederholung) entspricht, für welche also nicht Vertauschung gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt nur die Grund-

* Das Flechten bezeichnet ein Verknüpfen von jedem mit jedem, ist also für diese Art der Zeuge ein ganz passender Name, da e_1 und e_2 geflochten

$e_1 e_1 \quad e_2 e_1$
 $e_1 e_2 \quad e_2 e_2$ geben und alle diese Produkte ihre Werte behalten, ohne zu verschwinden.

formel der Einwebung (Größenlehre 57) und daraus abgeleitet das Gesetz der Einwebung (Größenlehre 60), d. h. man kann in jeder Größenknüpfung die Plusklammern und die Malklammern beliebig setzen oder weglassen und die Beziehungs- klammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Faches (Faktors) mit jedem des andern webt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es scheint hienach, als könnte auch diese Art der Webung oder Multiplikation in der Ausdehnungs- lehre verwandt werden; allein es ergibt sich, dass diese Art der Webung nicht Zeuge liefert, welche gleichmäßig oder symmetrisch und zugleich unabhängig von den ursprünglich gesetzten Einheiten sind, und dass diese Art der Webung daher für die Ausdehnungslehre keine allgemeinen Gesetze liefert.

Für die vierte Art der Webung, welche den Ausgeändern (Variationen ohne Wiederholung) entspricht, für welche also nicht Vertauschung gilt, für welche aber das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Grundformel $e_a e_a = 0$ und, da in der Ausdehnungslehre jede Größe als Einheit gesetzt werden kann, auch $0 = (e_a + e_b)(e_a + e_b) = e_a e_a + e_a e_b + e_b e_a + e_b e_b$ mithin da $0 = e_a e_a = e_b e_b$ auch $0 = e_a e_b + e_b e_a$ mithin $e_b e_a = - e_a e_b$.

Es bildet diese Art der Webung oder Multiplikation die der Ausdehnungs- lehre eigentümliche Verknüpfung. Der Begründer der Ausdehnungslehre hat diese Art der Multiplikation die kombinatorische genannt, ich nenne sie eine Flachung, das Zeug oder Produkt ein Flach*. Der Name kombinatorisches Produkt kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. In der Kombi- nationslehre wird jede Kombination ein Zeug oder Produkt und zwar, wenn $aa \sum a, a + a = a$ ist, ein kombinatorisches Produkt genannt. Das Flach der Ausdehnungslehre muss von diesem kombinatorischen Produkte unterschieden werden. Ich wende daher lieber die Namen Flach und Flachung an. Die Sätze werden dadurch auch deutlicher und kürzer. Der Bruder hat den Namen kombi- natorisches Produkt wieder aus Rücksicht auf die Mathematiker gewählt, um diesen die Sache leichter und bequemer zu machen.

Wir haben also von der äusern Webung oder Multiplikation der Aus- dehnungslehre zwei Arten kennen gelernt, die Flechtung und die Flachung oder die algebraische und die kombinatorische Multiplikation. Von diesen ist die Flachung bei weitem die einfachere. In der Tat, betrachten wir bei zwei Ein- heiten e_1 und e_2 das Zeug zweier Fache oder Faktoren $[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)] = \alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + \alpha_1 \beta_2 [e_1 e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2 e_1]$, so führt sich dies bei der zweiten Gattung, wo $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = - [e_1 e_2]$ ist, auf $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1 e_2]$, also auf nur eine Einheit, nämlich $[e_1 e_2]$ zurück; ja, wenn in einer Entwicklungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, so wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, $[e_1 e_2] = 1$ setzen können, und erhält dann als das Zeug eine Zahl. Ganz anders bei der ersten Gattung, wo sich jenes Zeug auf $\alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) [e_1 e_2]$ zurückführt, also auf nicht weniger als drei Einheiten. Wenn hier nur die beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, so kann man als ein-

* Flach stammt vom alten Verb *spal*, sskr. *phal* spalten, bersten. Davon ist abgeleitet *palaka*, sskr. *phalaka*, gr. *plák-s*, lat. *planca*, Brett, Planke, ahd. *flah*, nhd. Flach, die Fläche: das auseinander Tretende, sich Ausdehnende.

fachsten Fall $e_1 = 1$ und $e_2 = i = (-1)^{1/2}$ setzen und hat dann $e_1 e_1 = -e_2 \cdot e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = i$, das heist, man erhält dann als Größen die Richtgrößen oder komplexen Größen $a + ib$, welche also nur einen einfachen Fall dieser Art der Knüpfung darstellen. Da es in der Entwicklung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Größen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, so werden wir mit der Flachung beginnen und sie in der Ausdehnungslehre behandeln, während wir die Flechtung erst im höhern Zweige der Aussenlehre oder Synthesis erörtern werden.

79. **Erklärung.** Das äussere Zeug oder Produkt heist in der Ausdehnungslehre ein Flach (ein kombinatorisches Produkt), wenn das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, und auch je zwei Zeuge oder Produkte von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Fache oder Faktoren aus einander hervorgehen, zur Summe Null geben, das Zeichen derselben ist die Flachkammer [], oder in Formeln

$$[e_a \cdot e_a] = 0 \quad [e_a e_b] + [e_b e_a] = 0.$$

80. **Erklärung.** Das äussere Zeug oder Produkt heist in der Aussenlehre oder Synthesis ein Flecht oder ein algebraisches Produkt, wenn das Zeug je zweier gleichen Einheiten, die ungleich Null sind, auch ungleich Null ist, und in dem Zeuge ungleicher Fache oder Faktoren Vertauschung der Fache gilt, das Zeichen derselben ist das der gewöhnlichen Webung, oder in Formeln $e_a e_a > 0$ $e_a e_b = e_b e_a$

Um vollständig klar zu sein, entwickeln wir beispielsweise die verschiedenen Einheiten 3. Klasse aus den 6 ursprünglichen Einheiten $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$, wobei wir die Zeuge, in denen gleiche ursprüngliche Einheiten vorkommen, in dem einen Beispiele, wie bei den Flechten, ungleich Null, im andern, wie bei den Flächen, gleich Null setzen.

Die Flechte dritter Klasse aus 6 ursprünglichen Einheiten.

$e_1 e_1 e_1, e_1 e_1 e_2, e_1 e_1 e_3, e_1 e_1 e_4, e_1 e_1 e_5, e_1 e_1 e_6,$
 $e_1 e_2 e_2, e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_2 e_5, e_1 e_2 e_6,$
 $e_1 e_3 e_3, e_1 e_3 e_4, e_1 e_3 e_5, e_1 e_3 e_6,$
 $e_1 e_4 e_4, e_1 e_4 e_5, e_1 e_4 e_6,$
 $e_1 e_5 e_5, e_1 e_5 e_6,$
 $e_1 e_6 e_6,$
 $e_2 e_2 e_2, e_2 e_2 e_3, e_2 e_2 e_4, e_2 e_2 e_5, e_2 e_2 e_6,$
 $e_2 e_3 e_3, e_2 e_3 e_4, e_2 e_3 e_5, e_2 e_3 e_6,$
 $e_2 e_4 e_4, e_2 e_4 e_5, e_2 e_4 e_6,$
 $e_2 e_5 e_5, e_2 e_5 e_6,$
 $e_2 e_6 e_6,$
 $e_3 e_3 e_3, e_3 e_3 e_4, e_3 e_3 e_5, e_3 e_3 e_6,$
 $e_3 e_4 e_4, e_3 e_4 e_5, e_3 e_4 e_6,$

Die Fläche dritter Klasse aus 6 ursprünglichen Einheiten.

$e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_2 e_5, e_1 e_2 e_6,$
 $e_1 e_3 e_4, e_1 e_3 e_5, e_1 e_3 e_6,$
 $e_1 e_4 e_5, e_1 e_4 e_6,$
 $e_1 e_5 e_6,$
 $e_2 e_3 e_4, e_2 e_3 e_5, e_2 e_3 e_6,$
 $e_2 e_4 e_5, e_2 e_4 e_6,$
 $e_2 e_5 e_6,$
 $e_3 e_4 e_5, e_3 e_4 e_6,$

$e_3 e_5 e_5, e_3 e_5 e_6$	$e_3 e_5 e_6$
$e_3 e_6 e_6$	
$e_4 e_4 e_4, e_4 e_4 e_5, e_4 e_4 e_6$	
$e_4 e_5 e_5, e_4 e_5 e_6$	$e_4 e_5 e_6$
$e_4 e_6 e_6$	
$e_5 e_5 e_5, e_5 e_5 e_6$	
$e_5 e_6 e_6$	
$e_6 e_6 e_6$	

Jeder, welcher die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass dies die Geschiede oder Komplexionen sind, aber als Zeuge oder Produkte im Sinne der äußern Webung oder Multiplikation aufgefasst.

Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

6. Die Gefetze der Flachungslehre.

81. **Erklärung.** Das Flach oder kombinatorische Produkt heist ein Zeug oder Produkt von Einheiten, die Webung heist Flachung oder kombinatorische Multiplikation, wenn

- 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist und
- 2) die Summe zweier Zeuge von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Einheiten aus einander hervorgehen, Null ist.

Das Zeichen des Flaches ist eine um das Zeug gefetzte Flachklammer, gelesen „Flach“ z. B. $[e_1 e_2]$ gelesen Flach $e_1 e_2$.

Zwei Grösen heissen gleichgeordnet, wenn in zwei Reihen der Grösen dieselbe Gröse die frühere, sie heissen entgegengesetzt geordnet, wenn in der einen Reihe die Gröse die frühere ist, welche in der andern die spätere ist.

Die Flachung oder die kombinatorische Multiplikation haben wir die äussere Webung oder Multiplikation genannt, für welche $[e_a \cdot e_a] = 0$ und $[e_a \cdot e_b] + [e_b \cdot e_a] = 0$ ist. In der obigen Erklärung ist die letzte Bedingungsgleichung etwas allgemeiner gefasst, wie sie für die weitere Ableitung erforderlich ist, die erste Bedingungsgleichung aber fortgelassen, da sie sich aus der andern von selbst ergibt und in Satz 829 abgeleitet wird.

Für die Flachklammer wird meist aus Bequemlichkeit der Drucker die scharfkantige Klammer $[]$ genommen, welche allgemein für gewöhnliche Klammern verwandt wird, sobald zwei Arten von Klammern zu unterscheiden sind z. B. $[a + b(c - x^2)]^{1/2}$. Es kann nun leicht zu Verwirrungen führen, wenn dieselbe Klammer zur Bezeichnung der Fläche und zugleich für gewöhnliche

Zeuge oder Produkte verwandt wird. Ich habe daher eine abweichende Form für die Flachklammer eingeführt, welche jede Verwechslung ausschließt.

Satz. $[e_1 e_2 e_3 \dots] \geq 0$. 82.

Jedes Flach, in welchem nur ungleiche Einheiten geflacht sind, ist ungleich Null.

Satz. $[E_{e_1} e_2] + [E_{e_2} e_1] = 0$. 83.

Die Summe zweier Fläche von Einheiten, welche auseinander durch Vertauschung der letzten beiden Einheiten hervorgehen, ist Null.

Satz. Für die Fläche gilt das Einigungs- und das Beziehungs- 84.
gesetz für alle Größen, dagegen gilt das Vertauschungsgesetz der Fläche oder Faktoren nur für Zahlen.

Beweis. Unmittelbar aus 3 und 4.

Für die Flachung oder kombinatorische Multiplikation gilt nicht die Vertauschung der Fläche oder Faktoren, sofern dies Einheiten oder Größen der Ausdehnungslehre sind. So ist nach 818 $e_r e_s \geq e_s e_r$, wenn $r \geq s$ ist; aber da $[e_r e_s] + [e_s e_r] = 0$ ist, so besteht der Unterschied dieser Fläche nur im Vorzeichen; es ist $[e_r e_s] = -[e_s e_r]$. Es ändert sich also bei der Vertauschung der Fläche oder Faktoren nur das Vorzeichen oder die Vorzahl. Die nächste Aufgabe wird es demnach sein, festzustellen, welches Vorzeichen das Flach erhält, wenn die Ordnung der Fläche beliebig geändert wird.

Satz. Für die Flachung gelten namentlich auch die Sätze 85.
70 bis 76.

Beweis. Da diese Sätze für alle Arten der Webung oder Multiplikation gelten, so gelten sie auch für die Flachung.

Satz. $[A b c] + [A c b] = 0$, wo b und c Größen erster 86.
Klasse sind.

Man kann in jedem Fläche von Größen erster Klasse die beiden letzten vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. a. Es seien b und c Einheiten. Die Größe A lässt sich als Zeug von Größen erster Klasse auf die Form bringen $A = S_{a_1} E_r$, wo E_r ein Zeug von Einheiten ist. Führt man diesen Ausdruck ein, so ist

$$[A b c] + [A c b] = \left[S_{a_1} E_{a_1 b c} \right]_{1,n} + \left[S_{a_1} E_{a_1 c b} \right]_{1,n} = S_{a_1} [E_{a_1 b c}]_{1,n} + S_{a_1} [E_{a_1 c b}]_{1,n}$$

(nach 73)

$$= S_{a_1} ([E_{a_1 b c}] + [E_{a_1 c b}])_{1,n}$$

(nach 4)

$$= S_{a_1} \cdot 0 = 0 \quad (\text{nach 83})$$

1,n

b. Es seien b und c Größen erster Klasse und sei $b = S\beta_{1,n}e_r$ und $c = S\gamma_{1,n}e_r$, so ist

$$\begin{aligned}[Abc] + [Ac b] &= \left[A \left(S\beta_{1,n}e_a \right) \left(S\gamma_{1,n}e_c \right) \right] + \left[A \left(S\gamma_{1,n}e_c \right) \left(S\beta_{1,n}e_a \right) \right] \\ &= S\beta_{1,n}\gamma_{1,n}[Ae_ae_c] + S\beta_{1,n}\gamma_{1,n}[Ae_c e_a] \quad (\text{nach 71}) \\ &= S\beta_{1,n}\gamma_{1,n}([Ae_ae_c] + [Ae_c e_a]) \quad (\text{nach 3}) \\ &= S\beta_{1,n}\gamma_{1,n}0 = 0 \quad (\text{nach 86.a})\end{aligned}$$

Viel einfacher ist der Beweis für ein Gebiet dritter Stufe, wie es der äussere Raum ist. Ich lasse daher diesen Beweis noch in der Anmerkung folgen, da er die Sache klarer macht.

Beweis für ein Gebiet dritter Stufe. Es sei $a = S\alpha_{1,3}e_a$,

$b = S\beta_{1,3}e_c$, $\gamma = S\gamma_{1,3}e_c$, so ist nach 75

$$\begin{aligned}[abc] + [acb] &= S(\alpha_{1,3}\beta_{1,3}\gamma_{1,3})[e_ae_c e_c] + S(\alpha_{1,3}\gamma_{1,3}\beta_{1,3})[e_ae_c e_c] \\ &= S(\alpha_{1,3}\beta_{1,3}\gamma_{1,3})([e_ae_c e_c] + [e_ae_c e_c]) \quad (\text{nach 3.a}) \\ &= S(\alpha_{1,3}\beta_{1,3}\gamma_{1,3})0 = 0 \quad (\text{nach 83})\end{aligned}$$

87. **Satz.** $[AbcD] + [Ac bD] = 0$, wo b und c Größen erster Klasse.

Man kann in jedem Fläche von Größen erster Klasse beliebige zwei auf einander folgende Größen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. Es ist $[AbcD] + [Ac bD] = ([Abc] + [Ac b])D$
(nach 3.a)
 $= 0 \cdot D = 0$ (nach 86)

88. **Satz.** $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$ oder $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$

In jedem Fläche von Größen erster Klasse kann man beliebige zwei Größen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. Wenn zwischen a und b noch n Größen erster Klasse stehen: so vertausche man a mit der nächstfolgenden und so fort mit den $n + 1$ nächstfolgenden, so hat es die Stelle des b ; demnächst vertausche man b mit der nächstvorhergehenden und demnächst mit den n vorhergehenden, so hat es die Stelle, welche zuerst a hatte. Im Ganzen sind hierbei zwei auf einander folgende Größen $2n + 1$ mal vertauscht und ist dadurch das Vorzeichen $2 + 1$ mal entgegengesetzt geworden und zuletzt entgegengesetzt geblieben, d. h. es ist $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$

Wir kommen nun zu der Betrachtung der Fläche von Größen höherer Klasse oder zu den Flächen der Fläche.

$$\text{Satz.} \quad [AB, C_s] = (-1)^s [AC, B_r],$$

89.

wo B_r ein Zeug (Produkt) von r , C_s ein Zeug von s Fachen oder Faktoren erster Klasse ist oder

Wenn man in einem Fläche von Größen erster Klasse eine Reihe von r Größen mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von s Größen vertauscht, ohne im Uebrigen die Folge der Größen zu ändern, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{rs}$.

Beweis. Es sei $C_s = c_1 c_2 \cdots c_s$; rückt man nun c_1 vor B_r , d. h. vertauscht man es mit der nächstvorhergehenden und so fort mit den r vorhergehenden Größen, so ändert sich das Zeichen r mal und es wird

$$\begin{aligned} [AB, C_s] &= [AB, c_1 c_2 \cdots c_s] = (-1)^r [Ac_1 B_r c_2 \cdots c_s] \\ &= (-1)^{2r} [Ac_1 c_2 B_r c_3 \cdots c_s] \text{ u. s. w.} \\ &= (-1)^{rs} [Ac_1 c_2 \cdots c_s B_r] = (-1)^{rs} [AC, B_r] \end{aligned}$$

$$\text{Satz.} \quad [A_q B_r C_s] = (-1)^{qr + qs + rs} [C_s B_r A_q]$$

90.

Wenn man in einem Fläche von Größen erster Klasse eine Reihe von q Größen, welche durch eine Reihe von r Größen von einer Reihe von s Größen getrennt sind, mit letzteren vertauscht, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal $(-1)^{qr + qs + rs}$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Es ist } [A_q B_r C_s] &= (-1)^{(q+r)s} [C_s A_q B_r] \quad (\text{nach 89}) \\ &= (-1)^{(q+r)s} (-1)^{qr} [C_s B_r A_q] \quad (\text{nach 89}) \\ &= (-1)^{qr + qs + rs} [C_s B_r A_q]. \end{aligned}$$

$$\text{Satz.} \quad [P] = (-1)^r [Q],$$

91.

wo $[P]$ und $[Q]$ dieselben Fache oder Faktoren erster Klasse enthalten und r die Anzahl der Größenpaare bezeichnet, welche in P und Q entgegengesetzt geordnet sind oder

Zwei Fläche von Größen erster Klasse, welche dieselben Größen enthalten, sind einander gleich, wenn eine gerade, einander entgegengesetzt, wenn eine ungerade Anzahl von Größenpaaren in beiden Flächen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Seien in $[Q]$ r Größenpaare erster Klasse entgegengesetzt wie in $[P]$, so vertausche man jedes dieser r Paare, so wird aus $[Q]$ $[P]$, zugleich aber ist bei jedem dieser Tausche das Zeichen nach Satz 88 entgegengesetzt geworden, d. h. es ist $[P] = (-1)^r [Q]$.

$$\text{Satz.} \quad [P_{s,s}] = 0.$$

92.

Wenn in einem Fläche zwei Fache oder Faktoren gleich sind, so ist das Flach Null.

Beweis. Nach Satz 88 ist $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$; also wenn a und b gleich sind, so ist

$$0 = [P_{a,a}] + [P_{a,a}] = 2[P_{a,a}], \text{ d. h. } [P_{a,a}] = 0.$$

93. **Satz.** Ein Flach von Größen erster Klasse $[a_1 a_2 \dots a_n]$ ist Null wenn zwischen den Größen eine Hörigkeit herrscht.

Beweis. Es sei $a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n$, so ist

$$\begin{aligned} [a_1 a_2 \dots a_n] &= [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n) a_2 a_3 \dots a_n] \\ &= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \dots a_n] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \dots a_n] + \dots + \alpha_n [a_n a_2 a_3 \dots a_n] \\ &\quad (\text{nach 4 und 73}) \\ &= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad (\text{nach 92}) \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den Sätzen über die Flachung von Vielfachensummen. Die Fläche der Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse entwickeln sich nach dem Satze 75.

94. **Satz.** $[(S\alpha_a a_a) \cdot (S\mu_b b_b) \cdot (S\gamma_c c_c) \dots (S\mu_m m_m)] = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) [a_a b_b c_c \dots m_m]$ wo $a_a, b_b, c_c \dots m_m$ beliebige Größen erster Klasse, $\alpha_a \beta_b \dots$ beliebige Zahlen oder

Das Flach mehrer Vielfachensummen aus beliebigen Größen erhält man, indem man jede GröÙe der ersten Vielfachensumme mit jeder der zweiten, das Zeug derselben mit jeder der dritten u. s. w. zu einem Teilzeuge flacht (multipliziert), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Größen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addirt.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 75.

95. **Satz.** $(S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b b_b) \dots (S\mu_m m_m) = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) [a_a a_b a_c \dots a_m]$ wo $a_a a_b a_c \dots a_m$ beliebige Größen erster Klasse im Gebiete n ter Stufe und $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \dots, \mu_m$ beliebige Zahlen sind.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 94.

Da sich nach Satz 91 für die Fläche beim Vertauschen der Fache oder Faktoren nur das Vorzeichen ändert, so kann man bei allen den Zeugen, welche dieselben m Größen $a_a a_b \dots a_m$ enthalten, die Fläche unter Berücksichtigung des Vorzeichens so umordnen, dass die Zeiger der Größen steigend geordnet sind und kann dann alle diese Zeuge in ein Glied zusammenfassen, indem man die Summe der Vorzahlen dieser sämtlichen Zeuge, jede mit ihrem Vorzeichen in eine Vorzahl vereinigt und diese mit dem Fläche vervielfacht.

Die Vorzahl ist dann die Summe der Tausche oder Permutationen aus den m Fachen $\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m$, sofern man jeder Tausche das entsprechende Vorzeichen giebt.

Man erhält diese Tausche, wenn man jede der m Zahlen α_a z. B. α_c mit jeder der andern Zahlen $\beta, \gamma \dots \mu$ wechelt, sofern alle diese Zahlen andere Zeiger als α_a , hier also als α_c haben. Es wird also α_c mit den sämtlichen Tauschen aus den $m-1$ Fachen $\beta_b \gamma_c \dots \mu_m$, wo $b, c \dots m$ ungleich c ist, gewechselt. Die Anzahl

der Glieder in dieser Summe ist also gleich der Anzahl der Tausche aus m Größen d. h. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m = m!$ Gleiche Zeiger können unter den m Zahlen $\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m$ nicht vorkommen, da dann das Flach $[a_b \gamma_c \cdots a_m]$ nach 92 Null wäre.

Das Vorzeichen jedes Gliedes ist $(-1)^r$ wo r die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist. So ist in $\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4$ das $r = 3$, in $\alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \delta_4$ das $r = 4$, in $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \delta_4$ das $r = 5$ n. s. w.

Wir nennen die Summe aus diesen Tauschen mit ihren Vorzeichen die Flachtausche.

Es ist also $S(\alpha_a \beta_b)[a_1 a_2] = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[a_1 a_2]$

Es ist $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c)[a_1 a_2 a_3] = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1)[a_1 a_2 a_3]$

Es ist $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \delta_d)[a_1 a_2 a_3 a_4] =$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \delta_4 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \delta_4 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \delta_4 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \delta_4 \\ & - \alpha_1 \beta_2 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_4 \delta_2 - \alpha_2 \beta_3 \gamma_4 \delta_1 - \alpha_3 \beta_1 \gamma_4 \delta_2 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_4 \delta_1 \\ & + \alpha_1 \beta_4 \gamma_2 \delta_3 - \alpha_2 \beta_4 \gamma_1 \delta_3 - \alpha_1 \beta_4 \gamma_3 \delta_2 + \alpha_2 \beta_4 \gamma_3 \delta_1 + \alpha_3 \beta_4 \gamma_1 \delta_2 - \alpha_3 \beta_4 \gamma_2 \delta_1 \\ & - \alpha_4 \beta_1 \gamma_2 \delta_3 + \alpha_4 \beta_2 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_4 \beta_1 \gamma_3 \delta_2 - \alpha_4 \beta_2 \gamma_3 \delta_1 - \alpha_4 \beta_3 \gamma_1 \delta_2 + \alpha_4 \beta_3 \gamma_2 \delta_1)[a_1 a_2 a_3 a_4] \end{aligned}$$

Man entwickelt die Flachtausche am bequemsten schrittweise erst für 2, dann für 3, für 4 u. s. w. Fache und zwar so, dass man jedesmal das neu hinzutretende Fach zuerst die letzte Stelle, dann die vorletzte, drittletzte bis zur ersten Stelle hin einnehmen lässt. Bei 2 Fachen erhält man dann 1·2, bei 3 Fachen 1·2·3, bei 4 Fachen 1·2·3·4 Glieder, kurz bei n Fachen $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Glieder, kurz man erhält die sämtlichen Tausche, wie diese in der Kombinationslehre entwickelt sind. Die Zeichen folgen dann leicht. Bei 5 Fachen würde Beispielsweise die 5 jede der 5 Stellen einnehmen können und würden auf jeder Stelle die 4 anderen Fache die 24 Glieder entwickeln, welche wir bei $n = 4$ kennen gelernt haben.

Erklärung. Die Flachtausche oder Determinante aus 96. m Reihen von je m Zahlen $\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$ heist der Gliederausdruck, welchen man aus dem Zeuge $\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m$, in welchem die Zeiger steigend geordnet sind, dadurch erhält, dass man in ihm die Zeiger nach und nach auf alle möglichen Weisen versetzt, während man die Reihenfolge $\alpha \beta \gamma \cdots \mu$ unverändert lässt und dann jedes dieser Fläche mit $(-1)^r$ vervielfacht, wo r die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

Das Zeichen der Flachtausche oder Determinante aus m Reihen zu n Zahlen ist $\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)$ kurz Δ^m .

Als Beispiel gebe ich noch

$$\Delta^3(\delta_1 \zeta_6 \vartheta_8) = \delta_1 \zeta_6 \vartheta_8 - \delta_1 \zeta_8 \vartheta_6 - \delta_6 \zeta_4 \vartheta_8 + \delta_6 \zeta_8 \vartheta_4 + \delta_8 \zeta_4 \vartheta_6 - \delta_8 \zeta_6 \vartheta_4.$$

Der Name, die Determinante, d. h. wörtlich die Bestimmende, die Begrenzende bezeichnet eigentlich gar nicht die Sache; denn ebenso gut wie dieser Ausdruck ist jede Vorzahl eine determinans. Das Eigentümliche dieser Zahl dagegen ist, dass sie die Summe ist aus den Tauschen, sofern man jedem Gliede das bei der Flachung entstehende Vorzeichen giebt, der Name die Flachtausche bezeichnet diesen Begriff genau. Ich habe daher diese Zahl zum Unterschiede von den andern Vorzahlen die Flachtausche genannt, setze aber stets den lateinischen Namen daneben.

97. **Satz.** $\Delta^m = S(-1)^r \alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m$, wo r die Zahl der niedern _{1,n}

Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

Die wohlgeordneten Fläche mter Klasse $[a_1 a_2 a_3 \dots a_m]$ aus dem Gebiete mter Stufe $a_1 a_2 \dots a_n$ bilden die Ausgeschiede oder Komplexionen ohne Wiederholung aus nEinfachen oder Elementen zur mten Klasse, jedes Ausgeschiede als ein Flach betrachtet. Ich nenne diese Fläche die Geschiedsfläche.

98. **Erklärung.** Die Geschiedsfläche aus nGrößen zur mten Klasse heissen die Fläche mit mFachen aus diesen Größen, welche man erhält, wenn man diese Größen nach steigendem Zeiger in eine Reihe ordnet, und dann jede dieser Größen mit jeder folgenden flacht, dann weiter jedes Flach aus aGrößen mit jeder auf die letzte GröÙe dieses Flaches folgenden GröÙe flacht und so fortfährt, bis in jedem Fläche m der Größen als Fache oder Faktoren enthalten find.

Das Zeichen der Geschiedsfläche aus nGrößen zur mten Klasse ist $[a_1, a_2, \dots, a_n]^m$.

Einige Beispiele werden eine Anschauung der Geschiedsfläche geben. Es ist

$$\begin{aligned}
 [a_1, a_2, \dots, a_6]^1 &= a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
 [a_1, a_2, \dots, a_6]^2 &= & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 & a_1 a_5 & a_1 a_6 \\
 & & & a_2 a_3 & a_2 a_4 & a_2 a_5 & a_2 a_6 \\
 & & & & a_3 a_4 & a_3 a_5 & a_3 a_6 \\
 & & & & & a_4 a_5 & a_4 a_6 \\
 & & & & & & a_5 a_6 \\
 [a_1, a_2, \dots, a_6]^3 &= & & a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_2 a_5 & a_1 a_2 a_6 \\
 & & & & a_1 a_3 a_4 & a_1 a_3 a_5 & a_1 a_3 a_6 \\
 & & & & & a_1 a_4 a_5 & a_1 a_4 a_6 \\
 & & & & & a_2 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_5 & a_2 a_3 a_6 \\
 & & & & & a_2 a_3 a_5 & a_2 a_3 a_6 \\
 & & & & & & a_2 a_4 a_5 \\
 & & & & & & & a_3 a_4 a_5 \\
 & & & & & & & & a_3 a_5 a_6 \\
 & & & & & & & & & a_4 a_5 a_6
 \end{aligned}$$

Jeder, der die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass diese Geschiedsfläche nichts anderes find, als die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung), sofern man jedes Geschiede als ein Flach auffasst.

Die Anzahl dieser Geschiedsfläche ist demnach

$$n^m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad \text{wo } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

99. **Satz.** Die Geschiedsfläche aus nGrößen zur mten Klasse find die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus diesen nGrößen zur mten Klasse, wenn man jedes Geschiede als ein Flach betrachtet.

Beweis. Unmittelbar aus Satz 98 und den Vorbemerkungen.

Satz. $(S\alpha_{aa}) \cdot (S\beta_{bb}) \cdots (S\mu_{mm}) = S\Delta^m \cdot [a_1 a_2 \cdots a_m]$ wo 100.
 $a < b < c \cdots < m$. Jedes Flach von m Größen erster Klasse, welche zu n gegenseitig freien Größen $a_1 \cdots a_n$ hörig sind, ist die Vielfachenfumme der Geschiedsfläche dieser freien Größen zur m ten Klasse, in welcher die Vorzahl jedes Geschiedsflaches die Flachtausche oder Determinante aus denjenigen m Vorzahlen ist, welche zu den m hörigen Größen des Geschiedsflaches gehören.

Beweis. Unmittelbar nach 95 in Verbindung mit 97 und 99.

Satz. Das Flach von n Größen erster Klasse, welche zu n gegenseitig freien Größen $a_1 \cdots a_n$ hörig sind, erhält man, indem man aus den n Reihen der je n Vorzahlen die Flachtausche oder Determinante bildet und diese mit dem Fläche $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ vielfacht, oder 101.

Alle Fläche n ter Klasse, welche demselben Gebiete n ter Stufe angehören, lassen sich als Zeuge einer Zahl mit dem Fläche der ursprünglichen Einheiten darstellen.

Beweis. Unmittelbar nach 100.

Satz. Wenn ein Flach von Größen erster Klasse Null ist, so herrscht zwischen den Größen eine Hörigkeit. 102.

Beweis. Es sei $[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$ das gegebene Flach, dessen Größen $a_1 \cdots a_m$ zu den n Einheiten $e_1 \cdots e_n$ hörig seien. Angenommen nun, zwischen den Größen $a_1 \cdots a_m$ herrschte keine Hörigkeit, so könnte man nach Satz 23 zu den m Größen $a_1 \cdots a_m$ noch $n-m$ Größen $a_{m+1} \cdots a_n$ hinzufügen der Art, dass die Einheiten $e_1 \cdots e_n$ Vielfachenfummen der Größen $a_1 \cdots a_n$ wären. Führt man diese Vielfachenfummen in das Flach $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ ein und führt die Rechnung nach Satz 97 aus, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} [e_1 e_2 \cdots e_n] &= \alpha [a_1 a_2 \cdots a_n], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist,} \\ &= \alpha [(a_1 a_2 \cdots a_m)(a_{m+1} \cdots a_n)] && \text{(nach 4)} \\ &= \alpha [0(a_{m+1} \cdots a_n)] = 0 && \text{(nach Voraussetzung)} \end{aligned}$$

Dies aber widerstreitet dem Satze 84; also ist die Annahme unmöglich, d. h. zwischen den Größen herrscht eine Hörigkeit.

Satz. Sämtliche Sätze der Flachung bleiben bestehen, wenn man statt der ursprünglichen n Einheiten erster Klasse beliebige n gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Größen erster Klasse einführt. 103.

Beweis. Statt der ursprünglichen n Einheiten kann man nach Satz 24 beliebige n gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Größen als Einheiten einführen und sind alle Größen, welche zu den ersten hörig sind, auch zu den letzten hörig. Für die neu eingeführten

Größen gilt ferner wie für die ursprünglichen Einheiten das Gesetz 81, dass 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist, (denn wäre es gleich Null, so müsste nach Satz 102 zwischen den Größen eine Hörigkeit herrschen) und dass 2) $[Abc] + [Ac b] = 0$ ist, nach Satz 86. Es gilt also die Erklärung der Flachung, mithin gelten auch alle Gesetze der Flachung.

104. **Satz.** Wenn $Z_6 = \sum_{1,n} {}^b a_{\alpha} x_{\alpha}$ und $x_{\alpha} = \sum_{1,n} {}^a \beta_{\gamma} y_{\gamma}$ auch $Z_6 = \sum_{1,n} {}^b \gamma_{\epsilon} y_{\epsilon}$ ist, so ist ${}^b \gamma_{\epsilon} = {}^b a_1 {}^1 \beta_{\epsilon} + {}^b a_2 {}^2 \beta_{\epsilon} + \dots + {}^b a_n {}^n \beta_{\epsilon}$

Beweis. Es ist $Z_6 = {}^b a_1 x_1 + {}^b a_2 x_2 + \dots + {}^b a_n x_n$

$$x_{\alpha} = {}^a \beta_1 y_1 + {}^a \beta_2 y_2 + \dots + {}^a \beta_n y_n$$

Setzt man dies in erste Gleichung für Z_6 ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_6 &= ({}^b a_1 {}^1 \beta_1 + {}^b a_2 {}^2 \beta_1 + \dots + {}^b a_n {}^n \beta_1) y_1 \\ &\quad + ({}^b a_1 {}^1 \beta_2 + {}^b a_2 {}^2 \beta_2 + \dots + {}^b a_n {}^n \beta_2) y_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + ({}^b a_1 {}^1 \beta_n + {}^b a_2 {}^2 \beta_n + \dots + {}^b a_n {}^n \beta_n) y_n \end{aligned}$$

es ist aber auch

$$Z_6 = {}^b \gamma_1 y_1 + {}^b \gamma_2 y_2 + \dots + {}^b \gamma_n y_n$$

mithin ist

$${}^b \gamma_{\epsilon} = {}^b a_1 {}^1 \beta_{\epsilon} + {}^b a_2 {}^2 \beta_{\epsilon} + \dots + {}^b a_n {}^n \beta_{\epsilon}$$

Der Satz lehrt das Flach umzuformen, wenn statt der ursprünglichen n Einheiten beliebige n gegenseitig frei zu den Einheiten hörige Größen als neue Einheiten eingeführt sind.

105. **Satz.** Wenn $[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = \Delta_{\alpha}^n \cdot [x_1 x_2 \dots x_n]$,

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = \Delta_{\beta}^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ und}$$

$$[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = \Delta_{\gamma}^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ ist,}$$

so ist $\Delta_{\alpha}^n \cdot \Delta_{\beta}^n = \Delta_{\gamma}^n$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} [Z_1 Z_2 \dots Z_n] &= \Delta_{\alpha}^n \cdot [x_1 x_2 \dots x_n] = \Delta_{\alpha}^n \Delta_{\beta}^n [y_1 y_2 \dots y_n] \\ &= \Delta_{\gamma}^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ also } \Delta_{\alpha}^n \Delta_{\beta}^n = \Delta_{\gamma}^n \end{aligned}$$

Man nennt den Satz das Multiplikationstheorem für Determinanten. Man nennt Δ_{α}^n die Original-Determinante, Δ_{γ}^n die transformirte Determinante, Δ_{β}^n die Substitutions-Determinante oder den Modulus der Transformation.

106. **Satz.** Die Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) gegenseitig freier Größen sind auch gegenseitig frei oder

Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \dots = 0$, wo α, β, \dots Zahlen, A, B, \dots

Geschiedsfläche gegenseitig freier Größen $a_1 \dots a_n$ sind, wird ersetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\alpha = 0, \beta = 0, \dots$$

Beweis. Die Gleichung $\alpha A + \beta B + \dots = 0$ flache man mit denjenigen der Größen $a_1 \dots a_n$, welche in A fehlen, und sei A_1 das Flach dieser Größen, so dass das Flach $[AA_1] = [a_1 a_2 \dots a_n]$, dann erhält man $\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \dots = 0$.

Hier sind A, B, C verschiedene Geschiedsfläche; es müssen also B, C... jede mindestens eine der Größen enthalten, welche in A fehlt und welche also in A_1 vorkommen. Jedes der Fläche $[BA_1]$, $[CA_1]$ enthält also dieselbe Größe zweimal als Faktor und ist also nach Satz 92 Null.

Die obige Gleichung wird also $0 = \alpha[AA_1] = \alpha[a_1 a_2 \dots a_n]$. Hier ist $[a_1 a_2 \dots a_n] \geq 0$ nach Satz 102, also ist $\alpha = 0$ nach Zahlenlehre 175. Aus demselben Grunde sind $\beta, \gamma \dots$ Null, d. h. zwischen den Geschiedsflächen herrscht keine Hörigkeit.

Satz. Zwei Fläche von Größen erster Stufe, welche ungleich 107. Null sind, sind dann und nur dann deckend, wenn die aus ihren Größen erster Stufe ableitbaren Gebiete deckend sind, oder

$$[a_1 a_2 \dots a_m] \equiv [b_1 b_2 \dots b_m] \text{ dann und nur dann, wenn stets}$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m$$

gesetzt werden kann, welche Werte auch entweder $x_1 \dots x_m$ oder $y_1 \dots y_m$ haben mögen.

Beweis. a. Angenommen, es sei das Gebiet $a_1 \dots a_m$ deckend mit dem Gebiete $b_1 \dots b_m$. Dann können nach Satz 24 die Größen $a_1 \dots a_m$ als Vielfachensummen der Größen $b_1 \dots b_m$ dargestellt werden und ist dann nach Satz 101

$$[a_1 a_2 \dots a_m] = \alpha [b_1 b_2 \dots b_m], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist.}$$

Die beiden Fläche sind dann also nach Satz 9 deckend, d. h. $[a_1 \dots a_m] \equiv [b_1 \dots b_m]$.

b. Angenommen, es seien die beiden Fläche deckend, d. h. $[a_1 \dots a_m] \equiv [b_1 \dots b_m]$, dann ist $[a_1 \dots a_m] = \alpha [b_1 \dots b_m]$. Flach man nun beide Seiten mit der Größe b_1 , so erhält man

$$[a_1 a_2 \dots a_m b_1] = \alpha [b_1 b_2 \dots b_m b_1] = 0 \quad (\text{nach Satz 92})$$

Also herrscht zwischen den Größen $a_1 a_2 \dots a_m b_1$ nach Satz 102 eine Hörigkeit und da die Größen $a_1 \dots a_m$ nach Satz 93 gegenseitig frei sind, da $[a_1 \dots a_m] \geq 0$, so ist b_1 zu den Größen $a_1 \dots a_m$ hörig oder eine Vielfachensumme der letztern. Aus gleichem Grunde sind aber auch $b_2 \dots b_m$ zu $a_1 \dots a_m$ hörig. Da aber $[b_1 \dots b_m] \geq 0$, so sind

nach Satz 830 die Größen $b_1 \cdot \cdot b_m$ gegenseitig frei. Wir haben also m gegenseitig freie Größen, welche zu m andern Größen $a_1 \cdot \cdot a_m$ hörig sind und ist also das Gebiet der erstern Größen nach Satz 23 dem der letztern deckend.

Da zwei gleiche Größen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus dem Satze unmittelbar, dass zwei gleiche Fläche immer ein und dasselbe Gebiet haben, dem keine einfachen Fache oder Faktoren angehören, und dass daher ausser diesem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare messbare Wert gegeben zu sein braucht, damit der ganze Wert des Flaches genau bestimmt sei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein Flach gegeben, aus dessen einfachen Fachen dasselbe ableitbar ist, so wird jedes andere Flach, aus dessen einfachen Fachen dasselbe Gebiet ableitbar ist, durch eine einfache Zahl bestimmt sein, welche das Verhältniss dieses Flaches zu jenem bestimmt.

108. **Erklärung.** Einfach heist eine GröÙe m ter Klasse, wenn sie sich als ein Flach von m Größen erster Klasse darstellen lässt.

Das Gebiet dieser GröÙe heist das aus ihren m Einheiten erster Klasse ableitbare Gebiet.

Übergeordnet, untergeordnet, schneidend, getrennt heist eine einfache GröÙe einer andern gegenüber, wenn ihre Gebiete so heissen.

Zusammengesetzt heist eine GröÙe m ter Klasse, wenn sie sich nicht als ein Flach von m Größen erster Klasse darstellen lässt.

Als Beispiel einer zusammengesetzten GröÙe kann man die Summe $[ab] + [cd]$ anführen, wenn a, b, c, d vier gegenseitig freie Größen sind. Sollte nämlich $[ab] + [cd]$ eine einfache GröÙe, etwa $= [fg]$ sein, so müsste $[(ab + cd)(ab + cd)] = [fgfg] = 0$ sein (nach 92); aber $[(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab]$, da $[abab]$ und $[cdcd]$ Null sind. Aber (nach 91) ist $[abcd] = [cdab]$. Also $[(ab + cd)(ab + cd)] = 2[abcd]$. Somit müsste, wenn $[ab] + [cd]$ eine einfache GröÙe wäre, $[abcd] = 0$ sein, also (nach 102) zwischen a, b, c, d eine Hörigkeit herrschen, was wider die Voraussetzung ist.

109. **Satz.** Ein Flach aus m gegenseitig freien Größen erster Klasse ist eine einfache GröÙe m ter Klasse und ist als Vielfachensumme von Einheiten m ter Klasse darstellbar.

7. Die linige Aenderung der Größen erster Klasse.

Wir kommen nun zu den Aenderungen der Größen erster Klasse, welche erfolgen können, ohne den Wert der Fläche aus diesen Größen zu ändern.

110. **Erklärung.** Eine einfache linige Aenderung heist die Aenderung einer GröÙe erster Klasse, wenn in einer Größenreihe statt einer GröÙe die Summe dieser GröÙe und eines Vielfachen ihrer NachbargröÙe gesetzt wird, während die andern Größen unverändert bleiben oder

wenn in der Reihe $\dots p, q \dots$ statt p, q nun $p, q + \alpha p$ oder $p + \alpha q, q$ gesetzt wird, wo α eine beliebige Zahl ist.

Eine mehrfache linige Aenderung heist eine Aenderung, wenn in der Größenreihe wiederholt eine einfache linige Aenderung vorgenommen wird.

Satz. $[Pa, (b + \alpha a)] = [Pa, b]$ 111.

Ein Flach von Größen erster Klasse ändert seinen Wert nicht, wenn man zu einer Größe deselben ein beliebiges Vielfaches einer andern Größe deselben zufügt oder addirt oder

Das Flach einer Größenreihe wird durch linige Aenderung in seinem Werte nicht geändert.

Beweis. Es ist $[Pa, (b + \alpha a)] = [Pa, b] + \alpha [Pa, a]$ (nach 76)
 $= [Pa, b]$ (nach 92)

Satz. Man kann in einer Größenreihe statt einer Größe die Summe 112. dieser Größe und eines Vielfachen einer beliebigen andern Größe jener Reihe setzen und zwar wird diese Umwandlung durch linige Aenderung bewirkt.

Beweis. Es sei die Reihe $p_1, p_2, \dots p_n, q$, ich will beweisen, dass man durch mehrfache linige Aenderung statt p_1 die Summe $p_1 + \alpha q$ setzen kann. Man nehme die folgenden Umwandlungen vor

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n, q$$

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n + \alpha q, q$$

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n + \alpha q - \alpha q, q$$

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n, q$$

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q - p_n, p_n, q$$

$$p_1, p_2, \dots p_{n-1} + \alpha q, p_n, q$$

so folgt zuletzt $p_1 + \alpha q, p_2, \dots p_{n-1}, p_n, q$

Satz. Man kann in einer Größenreihe zwei beliebige Größen 113. im umgekehrten Verhältnisse durch linige Aenderung ändern oder die Reihe $\dots p \dots q$ lässt sich durch linige Aenderung in $\alpha p \dots \frac{q}{\alpha}$ umwandeln.

Beweis. Wenn p und q unmittelbar auf einander folgen, so lässt sich durch linige Aenderung p, q in $p, q + (\alpha - 1)p$, dies in $p + q + (\alpha - 1)p, q + (\alpha - 1)p$, d. h. in $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p$, dies in $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p - \frac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha p + q)$, d. h. in $\alpha p + q, \frac{q}{\alpha}$ und dies in $\alpha p + q - \alpha \cdot \frac{q}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}$, d. h. in $\alpha p, \frac{q}{\alpha}$ umwandeln. Zweitens:

Wenn p und q durch die Größen p_1, p_2, \dots, p_n getrennt sind, so kann man für p, p_1, p_2, \dots, q setzen $\alpha p, \frac{p_1}{\alpha}, p_2, \dots, q$, dann $\alpha p, p_1, \frac{p_2}{\alpha}, \dots, q$ und endlich $\alpha p, p_1, p_2, \dots, \frac{q}{\alpha}$.

114. **Satz. Umkehr von 111.** Wenn zwei von Null verschiedene Fläche einander gleich sind, so lassen sich die einfachen Fläche des einen aus denen des andern durch linige Aenderung ableiten, oder wenn

$$[abc \dots m] = [ABC \dots M] \geq 0$$

so lässt sich die Größenreihe a, b, c, \dots, m in A, B, C, \dots, M durch linige Aenderung umwandeln.

Beweis. Nach 101 müssen die Gebiete von a, b, c, \dots, m und von A, B, C, \dots, M deckend oder identisch sein. Es müssen also die Größen A, B, C, \dots, M Vielfachensummen sein von a, b, c, \dots, m . In diesen Vielfachensummen darf die Vorzahl von einer dieser Größen, z. B. von a nicht in allen Ausdrücken gleichzeitig Null sein, denn sonst wären die m Größen A, B, C, \dots, M aus $m - 1$ Größen b, c, \dots, m ableitbar, also würde nach 26 eine Hörigkeit zwischen ihnen herrschen, also ihr Flach nach 93 Null sein, was gegen die Annahme ist. Sei nun A die Größe, in welcher die Vorzahl von A ungleich Null ist und sei

$$A = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \mu m \quad \text{wo also } \alpha \geq 0$$

ist, so kann ich nach 850 durch wiederholte linige Aenderung die Reihe a, b, c, \dots, m in die Reihe $a + \frac{\beta}{\alpha} b + \frac{\gamma}{\alpha} c + \dots + \frac{\mu}{\alpha} m, b, c, \dots, m$ umwandeln, d. h. in die Reihe $\frac{A}{\alpha}, b, c, \dots, m$. Diese kann man aber nach 113 in die Reihe A, b, c, \dots, m umwandeln.

8. Die Fläche der Größen höherer Klassen.

115. **Satz.** Zwei einfache Größen höherer Klassen flacht man, indem man die Fläche erster Klasse der ersten fortschreitend mit denen der zweiten flacht, oder

$$[(a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots)] = [a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots]$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 84.

Da für die Flächung nach 84 Einigung der Fläche gilt, so bedarf es nicht einer besonderen Erklärung für das Flach der Größen höherer Klassen.

116. **Satz.** In einem Fläche kann man die Malklammern beliebig setzen oder weglassen oder es ist

$$[A(BC)] = [ABC]$$

Beweis. Unmittelbar nach 84.

Satz. Wenn eine einfache GröÙe einer zweiten, welche nicht 117. Null ist, übergeordnet ist, so lässt sich die erstere als Flach der zweiten GröÙe mit einer dritten einfachen GröÙe darstellen oder wenn $A > B$ und $B \geq 0$ ist, so ist $A = [BC]$

Beweis. Da A dem B übergeordnet, so ist nach 108 auch das Gebiet von A dem von B übergeordnet, d. h. jede GröÙe des zweiten auch eine GröÙe des ersten (nach 34 und 32). Es sei $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$, wo $b_1 b_2 \dots b_m$ GröÙen erster Klasse seien und $B \geq 0$, dann darf zwischen diesen GröÙen nach 93 keine Hörigkeit herrschen. Sei nun $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$, so müssen die GröÙen $b_1 b_2 \dots b_m$, da sie dem Gebiete von $a_1 a_2 \dots a_n$ angehören, zu diesen hörig sein, mithin kann man nach Satz 22 zu den GröÙen $b_1 b_2 \dots b_m$ noch $(n - m)$ GröÙen $b_{m+1} \dots b_n$ hinzufügen der Art, dass die Gebiete $a_1 a_2 \dots a_n$ und $b_1 b_2 \dots b_n$ deckend sind. Dann aber sind auch die Fläche derselben nach 107 deckend. Es sei $[a_1 a_2 \dots a_n] = \beta [b_1 b_2 \dots b_n] = \beta [(b_1 b_2 \dots b_m)(b_{m+1} \dots b_n)]$ Setzen wir demnach $C = \beta [b_{m+1} \dots b_n]$, so wird $A = [BC]$

Zu bemerken ist hier noch, dass für die Fläche nach 821 auch das Beziehungsgesetz gilt

$$[A(B \pm C)] = [AB] \pm [AC] \quad \text{und} \quad [(A \pm B)C] = [AC] \pm [BC]$$

und dass nach 828 auch das Gesetz der Vertauschung gilt, sofern man das Zeichen richtig setzt, d. h. es ist $[AB] = (-1)^{mn}[BA]$, wenn die beiden Fläche m ter und n ter Klasse sind.

Satz.
$$\left(S_{a, b, c, \dots}^{\alpha} [a_1 a_2 a_3 \dots] \right) \left(S_{m, n, o, \dots}^{\beta} [b_1 b_2 b_3 \dots] \right) 118.$$

$$= S_{a, b, c, \dots, m, n, o, \dots}^{\alpha \dots \beta \dots} [a_1 a_2 a_3 \dots b_1 b_2 b_3 \dots]$$

Beweis. Unmittelbar nach 75 und 115.

Wir wollen nun die Fälle untersuchen, in denen das Flach von GröÙen höherer Klasse Null wird.

Satz. Jedes Flach von GröÙen höherer Klasse, welches zwei 119. oder mehrere gleiche Fache erster Klasse enthält, ist Null.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 92.

Satz. Jedes Flach von GröÙen höherer Klasse, in welchem ein 120. Fach zu den andern Fachen erster Klasse hörig ist, ist Null.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 93.

Satz. Wenn $a_1 \dots a_m$ und $b_1 \dots b_n$ GröÙen erster Klasse sind, 121. welche gegenseitig frei sind, und A eine Vielfachenfumme r ter Klasse der ersten m , B eine s ter Klasse der zweiten n GröÙen, auch das Flach beider $[A \cdot B] = 0$ ist, so ist eine der beiden Vielfachenfummen Null, d. h. entweder $A = 0$ oder $B = 0$.

Beweis. Da A von r ter und B von s ter Klasse ist, so kann man $A = \sum \alpha_a A_a$ und $B = \sum \beta_b B_b$ setzen, wo A_a die Geschiedsfläche zur r ten Klasse aus $a_1 \dots a_m$ und B_b die zur s ten Klasse aus $b_1 \dots b_n$ darstellen, also ist

$$0 = [A \cdot B] = \sum \alpha_a \beta_b [A_a B_b] \quad (\text{nach 74 und 115})$$

wo $[A_a B_b]$ als Geschiedsfläche von $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$ zu betrachten sind, welche nach 103 gegenseitig frei sind. Also ist nach 15 $\alpha_a \beta_b = 0$ für jedes a und b . Wenn nun die eine GröÙe $A \geq 0$, d. h. wenn irgend eine der Zahlen $\alpha_a \geq 0$ ist, so folgt $\beta_b = 0$ für jedes b , d. h. $B = 0$, und ebenso folgt wenn $B \geq 0$, dass $A = 0$ sei.

122. **Satz.** Wenn eine Summe S einfacher GröÙen mit einer von Null verschiedenen GröÙe erster Klasse a gefacht Null giebt, so ist die erste gleich einem Fläche, in welchem a ein Fach oder Faktor ist, oder wenn $[aS] = 0$, so ist $S = [aP]$.

Beweis. Es sei S eine Summe von GröÙen m ter Klasse, und sei das Gebiet $e_1 \dots e_n$, dem sie angehören, n ter Stufe, so kann man nach 793 zu a noch $m - 1$ freie GröÙen erster Klasse $a_2 \dots a_m$ hinzufügen der Art, dass beide Gebiete gleich oder deckend sind, dann lassen sich $b_1 \dots b_n$, also auch S als Vielfachensummen dieser n freien GröÙen $a_1 a_2 \dots a_n$ darstellen. Seien nun die Fläche, welche a enthalten, $[aA_1], [aA_2] \dots$ seien die, welche a nicht enthalten $B_1, B_2 \dots$ und sei

$$S = \alpha_1 [aA_1] + \alpha_2 [aA_2] + \dots + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots$$

$$\text{mithin } 0 = [aS] = \alpha_1 [aaA_1] + \alpha_2 [aaA_2] + \dots + \beta_1 [aB_1] + \beta_2 [aB_2] + \dots \\ = \beta_1 [aB_1] + \beta_2 [aB_2] + \dots \quad (\text{nach 92})$$

Hier sind da a nicht in $B_1, B_2 \dots$ enthalten ist, die GröÙen Geschiedsfläche, welche nach 103 gegenseitig frei sind, also sind nach 15 auch $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$

$$\text{mithin ist } S = \alpha_1 [aA_1] + \alpha_2 [aA_2] + \dots$$

$$= [a(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots)] = [aP]$$

$$\text{wenn } P = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots$$

123. **Satz.** Wenn eine Summe S einfacher GröÙen mit jeder von m freien GröÙen erster Klasse $a_1, \dots a_m$ gefacht Null giebt, so lässt sich jene Summe S als ein Flach darstellen, in welchem $a_1, \dots a_m$ Fache oder Faktoren sind, oder wenn $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_m S]$, so ist $S = [a_1 a_2 \dots a_m S_m]$.

Beweis. Die ursprünglichen Einheiten seien $e_1 \dots e_n$, so kann man nach 23 zu den m GröÙen $a_1 \dots a_m$ noch $n - m$ freie GröÙen $a_{m+1} \dots a_n$ hinzufügen der Art, dass die Gebiete von $e_1 \dots e_n$ und von $a_1 \dots a_n$ deckend sind, dann wird nach 122, da $0 = [a_1 S]$ auch

$S = [a_1 P_1]$. Hier werden alle die Fläche von $[a_1 P_1]$, wo a_1 noch in P_1 enthalten ist, nach 92 Null; man kann diese also weglassen und verwandle sich dadurch P_1 in S_1 , so ist $S = [a_1 S_1]$, wo S_1 nur aus den Größen $a_2 \dots a_n$ hervorgegangen ist und kein a_1 enthält.

Da nun $0 = a_2 S = [a_2 (a_1 S_1)] = [a_2 a_1 S_1] = [a_1 a_2 S_1]$

(nach 117 und 88)

so muss nach 121 entweder a_1 oder $[a_2 S_1]$ Null sein; das erste ist gegen die Annahme, also ist $0 = [a_2 S_1]$, mithin $S_1 = [a_2 P_2]$ nach 122. Hier kann man wieder in P_2 alle Fläche weglassen, welche a_2 enthalten und verwandle sich dadurch P_2 in S_2 , so ist $S_1 = [a_2 S_2]$, mithin $S = [a_1 a_2 S_2]$ und so fort zuletzt $S [a_1 a_2 \dots a_m S_m]$.

Satz. Wenn eine Summe S von Größen m ter Klasse mit jeder 124. von m freien Größen erster Klasse geflacht Null giebt, so ist S mit dem Fläche dieser m Größen deckend oder wenn

$0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_m S]$, so ist $S = \alpha [a_1 a_2 \dots a_m]$.

Beweis. Unmittelbar aus 123.

Satz. Wenn eine Summe S von Größen m ter Klasse mit 125. $m + 1$ Größen erster Klasse $a_1 \dots a_{m+1}$ geflacht Null giebt, so ist entweder S oder $[a_1 \dots a_{m+1}]$ gleich Null oder wenn $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_{m+1} S]$, so ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \dots a_{m+1}] = 0$.

Beweis. Angenommen, es sei $[a_1 a_2 \dots a_{m+1}] \geq 0$, so ist auch $[a_1 \dots a_m] \geq 0$, also sind $a_1 \dots a_m$ gegenseitig frei, also da $0 = [a_1 S] = \dots = [a_m S]$, so ist nach 124 auch $S = \alpha [a_1 a_2 \dots a_m]$, da ferner $0 = [a_{m+1} S] = \alpha [a_1 a_2 \dots a_{m+1}]$ mithin, da $[a_1 a_2 \dots a_{m+1}] \geq 0$, so ist $\alpha = 0$, also auch $S = \alpha [a_1 \dots a_m] = 0$, d. h. es ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \dots a_{m+1}] = 0$.

— — —

Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

9. Die grundlegenden Gefetze der Modlungslehre.

Wir haben bereits in der Gebietslehre gesehen, welche überaus grose Uebereinstimmung die Gefetze über die Gebiete in der Gebietslehre mit den Gefetzen der Begriffe in der Logik zeigen. Auch in der Modlungslehre wird uns eine überraschende Aehnlichkeit in den Ideen der Lehre vom Hauptgebiete und von der Ergänzung eines Flachs zum Hauptgebiete entgegentreten, und werden uns diese Begriffe ebenso in der Ausdehnungslehre, wie in der Logik zu den reichsten Sätzen führen.

Von der Flachungslehre muss diese Modlungslehre streng geschieden werden, wenn man nicht in die grössten Verwirrungen geraten will. Ich werde bei den einzelnen Sätzen in den Anmerkungen auf die überaus grossen Unterschiede der beiden Rechnungsarten aufmerksam machen und dieselben strenge scheiden.

126. **Erklärung.** Das Hauptgebiet heist in der Modlungslehre das Gebiet der Einheiten erster Klasse, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Grösen hörig sind. Das Zeug oder Produkt aller der Einheiten erster Klassen dieses Gebietes wird in der Modlungslehre gleich eins gesetzt, d. h. es ist $[e_1 \cdots e_n] = 1$. Das n oben am Flachzeichen bezeichnet die Stufe des Hauptgebietes. Das Flach heist in der Modlungslehre ein Modelflach oder ein Enflach.

In der Flachungslehre ist $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ eine Gröse n ter Klasse, dagegen 1 eine Gröse nullter Klasse, beide mithin ganz verschieden; dagegen wird in der Modlunglehre $[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$ gesetzt, d. h. gleich einem Fläche nullter Stufe. Wir werden bei N 133 sehen, aus welchen Gründen wir zu dieser Setzung kommen mussten.

Erklärung. Die Ergänzung einer Einheit m ter Klasse E 127. heist das Flach aller in jener Einheit m ter Klasse nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, sofern das Flach der Einheit m ter Klasse und ihrer Ergänzung gleich eins ist. Die Ergänzung einer Zahl setzen wir der Zahl gleich.

Das Zeichen der Ergänzung einer GröÙe ist ein über die GröÙe gesetzter wagerechter Strich, also \overline{E} gelesen „Nicht E “ oder „Ergänzt E “, bei einer Klammer ein mit der Klammer verbundener wagerechter Strich $\overline{[}$ gelesen „Nichtklammer“.

Es ist zweckmässig, sich an einigen Beispielen den Begriff der Ergänzung einer GröÙe klar zu machen.

Im Gebiete zweiter Stufe $a_1 a_2 = 1$ ist $\overline{a_1} = a_2$, $\overline{a_2} = -a_1$; denn es ist $a_1 a_2 = 1$, $a_2 a_1 = -1$.

Im Gebiete dritter Stufe $a_1 a_2 a_3 = 1$ ist $\overline{a_2} = -a_1 a_3 = a_3 a_1$, $\overline{a_1} = a_2 a_3$, $\overline{a_3} = a_1 a_2$, ferner $\overline{[a_1 a_2]} = -a_3$, $\overline{[a_2 a_1]} = a_3$, $\overline{[a_1 a_3]} = -a_2$, $\overline{[a_3 a_1]} = a_2$, $\overline{[a_2 a_3]} = -a_1$.

In H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1862 ist der Ergänzung von E das Zeichen $|E$ gegeben. Ich habe dies Zeichen aufgegeben und dafür das Zeichen \overline{E} eingeführt und zwar aus folgenden Gründen. Der Begriff des Nicht- E oder der Ergänzung von E ist uralt und zuerst von Aristotélès in die Begriffslehre eingeführt, er unterscheidet bereits *peri hermēneias* c10 den Menschen den *ánthrōpos* und den Nichtmenschen, den *ouk ánthrōpos*. Er versteht darunter bereits ganz wie in unserer Erklärung alle die GröÙen, welche in dem Selbstbegriffe nicht enthalten sind. In der Logik hat man nun bereits längst für diesen Begriff das Zeichen \overline{E} gelesen „Nicht E “ eingeführt, wo der Strich über dem Buchstaben an das Minuszeichen erinnert, aber so mit dem Zeichen der GröÙe E verwachsen ist, dass er mit dem Buchstaben eine Einheit bildet, und also unzweifelhaft nur das Zeichen einer GröÙe ist.

Das Zeichen $|E$, welches in H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 eingeführt ist, ist meiner Ansicht nach weniger zu empfehlen. Nicht nur ist das Zeichen \overline{E} geschichtlich viel früher eingeführt, sondern es ist auch ganz unzweideutig; das Zeichen $|E$ dagegen giebt notwendig zu Verwirrungen Anlass. Wenn z. B. das Flach $[E|E]$ geschrieben wird, so nimmt hier das Zeichen $|$ zwischen den beiden Buchstaben unzweifelhaft die Stelle eines Knüpfungszeichens ein. Noch schlimmer ist das Zeichen $|A$ oder $[A|A]$, wo das $|$ als das Zeichen einer eigenen zu flachenden GröÙe erscheint. Ich halte mich daher berechtigt, das Zeichen \overline{E} einzuführen, welches alle diese Zweifel beseitigt.

Satz. $\overline{[E\overline{E}]} = 1$

128.

Das Modellflach einer Einheit mit ihrer Ergänzung ist Eins.

Satz. $\overline{\overline{E}} = E$; dagegen $\overline{\overline{\overline{E}}} = -E$, wenn E ungerader 129. Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist. Die Ergänzung der Ergänzung einer Einheit E (d. h. $\overline{\overline{E}}$ gelesen Nichtnicht E) ist im Allgemeinen

dieser Einheit gleich, dagegen ist sie dieser Einheit entgegengesetzt, wenn gleichzeitig die Stufe des Hauptgebietes gerade und die Klasse der Einheit E ungerade ist.

Beweis. Es sei E die Einheit und die Stufe des Hauptgebietes n . Nach 126 ist ${}^1\overline{EE} = 1$ und ebenso ${}^1\overline{\overline{EE}} = 1$. Also ist ${}^1\overline{EE} = {}^1\overline{\overline{EE}} = (-1)^{m(n-m)}\overline{\overline{EE}}$ nach 89. Mithin ist $\overline{E} = (-1)^{m(n-m)}E$.

Hier ist, wenn n gerade ist, eine von den Zahlen m und $n - m$ gerade, mithin $(-1)^{m(n-m)} = +1$. Wenn n gerade und zugleich m gerade ist, so ist gleichfalls $(-1)^{m(n-m)} = +1$. Nur in dem Falle, wenn n gerade und zugleich m ungerade ist, sind beide Zahlen m und $n - m$ ungerade, nur in diesem Falle ist $(-1)^{m(n-m)} = -1$. Es folgt mithin der Satz.

130. **Erklärung.** Die Ergänzung einer beliebigen GröÙe A heist die GröÙe \overline{A} (gelesen Nicht A), welche man erhält, wenn man A als Vielfachenfumme aus den Einheiten darstellt, und statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, oder

$$\overline{A} = (\overline{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots}) = \alpha_1 \overline{E_1} + \alpha_2 \overline{E_2} + \dots$$

wo E_1, E_2, \dots Einheiten beliebiger Klassen sind.

Es ist hier darauf aufmerksam zu machen, dass bei der Modlung nicht mehr ${}^1\overline{AA} = 1$ gilt.

131. **Satz.** Die Klasse der Ergänzung einer GröÙe m ter Klasse im Hauptgebiete n ter Stufe ist $n - m$.
132. **Satz.** $\overline{\overline{A}} = A$; dagegen $\overline{\overline{\overline{A}}} = -A$, wenn A ungerader Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist.

Die Ergänzung der Ergänzung einer GröÙe A (d. h. $\overline{\overline{A}}$ gelesen Nichtnicht A) ist dieser GröÙe A im Allgemeinen gleich; doch ist sie dieser GröÙe A entgegengesetzt, wenn zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die GröÙe A von ungerader Klasse ist.

Beweis. Es sei $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots$, so ist nach 130 $\overline{A} = \alpha_1 \overline{E_1} + \alpha_2 \overline{E_2} + \dots$ mithin $\overline{\overline{A}} = \alpha_1 \overline{\overline{E_1}} + \alpha_2 \overline{\overline{E_2}} + \dots = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots = A$ nach 129, sofern nicht zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die GröÙe A von ungerader Klasse ist, dagegen ist in letzterm Falle

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= \alpha_1 \overline{\overline{E_1}} + \alpha_2 \overline{\overline{E_2}} + \dots = \alpha_1 (-E_1) + \alpha_2 (-E_2) + \dots \\ &= -(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots) = -A. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu der Erklärung des Modellschaches und der Modellsomme, welche die Base für die ganze Modlungslehre bildet.

Erklärung. Das **Modelflach** oder **Enflach** heist ein fort-schreitendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten kleiner ist als die Stufe ihres Hauptgebietes n .

Das **Modelflach** heist ein stehendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten gleich der Stufe des Hauptgebietes n ist.

Das **Modelflach** heist ein rückschreitendes oder eingewandtes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten grösser ist als die Stufe des Hauptgebietes n .

Das fortschreitende **Modelflach** oder **Enflach** der Einheiten ist gleich dem gewöhnlichen **Flach** der Einheiten.

Das stehende **Modelflach** der Einheiten ist gleich ± 1 .

Das rückschreitende **Modelflach** der Einheiten ist gleich der GröÙe, deren Ergänzung das gewöhnliche **Flach** der Ergänzungen jener Einheiten ist oder für welches $\overline{[EF]} = [\overline{EF}]$ ist, d. h. für welches das **Nichtenflach** das **Flach** der **Nichte** ist.

Das Zeichen des **Modelflaches** oder **Enflaches** im Hauptgebiete n ter Stufe ist $\overline{[EF]}$ gelesen „**Enflach** EF .“

Es ist wichtig, dass man sich diese Erklärung wieder an Beispielen klar mache und auf den grossen Unterschied des **Modelflaches** vom gewöhnlichen **Flach** achte.

Nur das fortschreitende **Modelflach** ist gleich dem gewöhnlichen **Flach**.

Das stehende **Modelflach** ist ± 1 , also eine Zahl nullter Klasse; dagegen ist das gewöhnliche **Flach** in diesem Falle $\pm [e_1 e_2 \dots e_n]$, d. h. eine GröÙe n ter Klasse.

Das rückschreitende **Modelflach** von zwei Einheiten E und F ist die GröÙe, für welche $\overline{[EF]} = [\overline{EF}]$ ist, dagegen ist das gewöhnliche **Flach** dieser GröÙen Null.

Seien z. B. im Gebiete dritter Stufe $E = e_1 e_2$ und $F = e_1 e_3$, so ist $[(e_1 e_2)(e_1 e_3)] = 0$ (nach 92.) Dagegen ist für das **Modelflach** $\overline{[e_1 e_2]} = e_3$, $\overline{[e_1 e_3]} = -e_2$, mithin

$\overline{^3[EF]} = [\overline{EF}] = [e_3 \cdot -e_2] = [e_2 e_3]$, also $\overline{^3[EF]} = e_1$ also eine GröÙe erster Klasse.

So ist das **Flach** $[(e_1 e_2 e_4)(e_1 e_3 e_4)] = 0$, dagegen ist für das **Modelflach** im Gebiete 4ter Stufe $\overline{[e_1 e_2 e_4]} = -e_3$ und $\overline{[e_1 e_3 e_4]} = e_2$, mithin

$\overline{^4[EF]} = [\overline{EF}] = [(-e_3) \cdot e_2] = [e_2 e_3]$, also $\overline{^4[EF]} = e_1 e_4$.

Es wird zweckmässig sein, sich durch einige Uebungen diesen Unterschied klar zu machen.

Auch die Gesetze der Webung oder Multiplikation sind für die Modulung ganz andere als für die Flachung. Denn nach 84 gilt für die Flachung Einigung der Fache oder Faktoren, dagegen gilt diese für die Modulung nicht; denn gölte sie, so wäre $\overline{^3[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = \overline{^3[e_1 e_2 e_1 e_3]} = 0$, während doch $\overline{^3[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = e_1$

sein muss. Für die Modlung gilt also zunächst nur das Beziehungsgeſetz Satz 74 und 75, nicht mehr das Geſetz der Einigung.

In der Anſarbeitung von 1847 hatten H. und R. Grassmann dieſe Multiplikation die bezüglichliche Multiplikation genannt.

In H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 iſt das Modellſach ein auf das Hauptgebiet bezüglichliches Flach genannt. Dieſer Ausdruck erſcheint mir zweideutig. Man könnte dadurch verleitet werden, die Geſetze der Flachung auch für die Modlung oder bezüglichliche Flachung anzuwenden und käme dadurch in die ſchlimmſte Verwirrung. Ich halte es daher für notwendig, dieſe neue Art der Multiplikation auch mit einem neuen Namen und mit einem neuen Zeichen zu bezeichnen und nenne ſie daher Modlung, das Zeug oder Produkt ein Modellſach oder für das Hauptgebiet nter Stufe ein Enflach.

Wir können nun zu der Betrachtung übergehen, was uns veranlaſst hat, dieſe ganz neuen, von der Flachung weſentlich abweichenden und auf den erſten Blick verwirrenden Erklärungen einzuführen. Es wird uns dieſe Gelegenheit geben, die Idee des Modellſaches klar zu legen und in das begriffliche Verſtändniß dieſes Zweiges einzuführen.

Der eigentliche Grundbegriff dieſes Abſchnittes iſt der der Ergänzung zu einem Hauptgebiete nter Stufe, ein Begriff, welcher der Logik und der Ausdehnungslehre gemeinſam iſt und in beiden Zweigen der Denklehre die reichſten Anwendungen zuläſt.

Wollen wir aber dieſen Begriff in der Ausdehnungslehre anwenden können, ſo müſſen wir notwendig auch das Zeug oder Produkt zweier Ergänzungen bilden können. Legen wir z. B. ein Gebiet fünfter Stufe $\{e_1e_2e_3e_4e_5\} = 1$ als Hauptgebiet zu Grunde und ſetzen wir $E = \{e_1e_2\}$, $F = \{e_3e_4\}$, ſo iſt $\overline{E} = \{e_3e_4e_5\}$ und iſt $\overline{F} = \{e_1e_2e_5\}$, mithin wird das Zeug oder Produkt $\{EF\} = \{e_1e_2e_3e_4\}$. Dieſes Produkt wäre nun nach den Geſetzen der Flachung Null, da $e_5 \cdot e_5 = \text{Null}$ iſt, es wäre mithin unmöglich, ein Produkt der Nichte zu bilden, wenn man die Geſetze der Flachung ganz allgemein weiter gelten laſſen wollte. Beachtet man aber, daſſ $\{e_3e_4e_5\}\{e_1e_2e_5\} = \{e_1e_2e_3e_4e_5\}e_5$ iſt und ſetzt man hier $\{e_1e_2e_3e_4e_5\} = 1$, ſo ergibt ſich $\{EF\} = e_5$, d. h. da $\{EF\} = \{e_1e_2e_3e_4\}$ iſt, ſo iſt die Ergänzung zu $\{e_1e_2e_3e_4\}$ gleich e_5 , d. h. es iſt das Flach der Nichte gleich dem Nicht-Enflach $\{EF\} = \overline{\{EF\}}$.

Wir haben in dieſem Enflache nun ein Produkt von Gröſen kennen gelernt, welche in einem Gebiete nter Stufe, mehr als n Gröſen als Fache oder Faktoren enthalten, nämlich außer den n Gröſen des Gebietes noch eine oder mehrere Gröſen des Gebietes und wir haben dieſes Produkt, indem wir das Produkt der n Gröſen des Gebietes $\{e_1e_2 \dots e_n\}$ gleich 1 ſetzten, dem Produkte der einen oder den mehreren Gröſen des Gebietes gleich geſetzt, welche dann noch übrig blieben. Hieraus ergeben ſich dann alle Feſtſetzungen der obigen Erklärung und daraus die folgenden Geſetze der Modlungslehre.

Für die Ergänzung gilt hier $\{E\overline{E}\} = 1$ und $\{A\overline{A}\} = 1$, während in der Logik $E + \overline{E} = 1$ und $A + \overline{A} = 1$ iſt. Es folgt dieſer Unterſchied einfach aus den verſchiedenen Erklärungen der beiden Wiſſenſchaften.

Erklärung. Die Modelfumme der Klassen α, β, γ der Fache 134. oder Faktoren heist die Zahl ϱ , welche kleiner ist als die Stufe des Hauptgebietes n , wenn $\alpha + \beta + \gamma = an + \varrho$ oder es ist $\alpha + \beta + \gamma = an + (\alpha + \beta + \gamma)$.

Wenn die Modelfumme der Klassen gleich Null ist, so kann man das Flach sowohl als fortschreitend, wie als rückschreitend betrachten.

Das Zeichen der Modelfumme für ein Hauptgebiet n ter Stufe ist ${}^n(\alpha + \beta + \dots)$ gelesen „die Enfumme von $\alpha + \beta + \dots$ “

Beispiele ${}^3(2 + 2 + 1) = 2$, ${}^4(3 + 2 + 3) = 0$, ${}^4(2 + 3 + 2) = 3$.

Wir wenden uns nun zunächst zu der Betrachtung der fortschreitenden, der stehenden und der rückschreitenden Modellfläche und demnächst zu den allgemeinen Gesetzen über die Modlung.

Satz. Zwei einfache Größen A und B , bei denen die Summe 135. ihrer Klassen $\alpha + \beta$ die Stufe des Hauptgebietes n um γ übertrifft, lassen sich in der Form darstellen $A = [CA_1]$ und $B = [CB_1]$, wo C eine einfache Größe der Klasse γ darstellt.

Beweis. Nach der Bedingung ist $\alpha + \beta = n + \gamma$, also ist nach 30 den Gebieten von A und B ein Gebiet der Stufe γ gemein. Sei nun C eine Größe der Klasse γ , so ist C sowohl dem A als dem B untergeordnet, also ist nach 117 auch A in der Form $[CA_1]$ und B in der Form $[CB_1]$ darstellbar.

Satz. Die Summe von einfachen Größen $(n - 1)$ ter Klasse in 136. einem Hauptgebiete n ter Stufe ist wieder eine einfache Größe $(n - 1)$ ter Klasse.

Beweis. Es seien zwei einfache Größen $(n - 1)$ ter Klasse A und B gegeben, so ist die Summe ihrer Klassen $2n - 2$, mithin haben sie nach 135 eine einfache Größe C von $2n - 2 - n = n - 2$ ter Klasse gemein'am und sind also nach 135 in der Form $A = [Ca]$ und $B = [Cb]$ darstellbar, wo a und b einfache Größen erster Klasse, mithin $a + b$ wieder eine einfache Größe erster Klasse ist; folglich ist $A + B = [Ca + Cb] = [C(a + b)]$ (nach 84) ein Flach von $n - 1$ Größen erster Klasse, d. h. eine einfache Größe $(n - 1)$ ter Klasse. Mithin gilt der Satz fortschreitend für die Summe von beliebig vielen einfachen Größen $(n - 1)$ ter Klasse.

Es ist hier wohl zu beachten, dass nur die Größen erster und die $(n - 1)$ ter Klasse eine einfache Größe und zwar gleicher Klasse zur Summe haben. Schon 2 Größen zweiter Klasse haben nur dann eine einfache Größe zweiter Klasse zur Summe, wenn ihre 4 Größen erster Klasse nicht gegenseitig frei, sondern eine zu

den andern hörig ist. Soll nämlich $S = ab + cd$ ein Flach sein, so muss nach 92 $[SS] = 0$ sein, also $0 = [SS] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd + cdab]$ da $[abab] = [cdcd] = 0$ nach 92. Aber nach 91 auch $[cdab] = [abcd]$, mithin $0 = 2[abcd]$, oder $[abcd] = 0$, mithin nach 98 eine der Größen zu den andern hörig; dagegen kann dann S nicht eine einfache GröÙe sein, wenn die 4 Größen gegenseitig frei sind.

Daselbe folgt auch, wenn man das gemeinfame Gebiet auffucht, daselbe ist $\gamma = 4 - n$. Ist hier $n = 3$, so ist $\gamma = 1$ und folgt der Satz aus 129, ist dagegen $n > 3$, so ist die Summe eine zusammengesetzte GröÙe.

137. **Satz.** Das stehende Modellflach ist gleich ± 1 , d. h. eine GröÙe 0 ter Klasse.

Beweis. 1. Unmittelbar nach Erklärung 133.

2. Sei $[AB]$ ein stehendes Modellflach, und α und β die Klassen von A und B, so ist nach 133 $\alpha + \beta = n$, die Klassen der Ergänzungen sind $n - \alpha$ und $n - \beta$, also die Summe $2n - (\alpha + \beta) = n$, d. h. $[\overline{AB}]$ nach 133 ein stehendes Modellflach.

138. **Satz.** $\bar{E} = [EFF]$, wo F das Flach der Einheiten von \bar{E} . Wenn eine GröÙe F das Flach ist aller in einer Einheit beliebiger Klasse E nicht vorkommender Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, so ist $\bar{E} = [EFF]$.

Beweis. Nach 137 ist $[EF] = \pm 1$, also ist $[E(EFF)] = [E(\pm 1)F] = (\pm 1)[EF] = (\pm 1)(\pm 1) = 1$ (nach 67)

Ebenso ist $[E\bar{E}] = 1$, mithin ist $[E\bar{E}] = [E(EFF)]$, also ist auch $\bar{E} = [EFF]$.

Es bietet uns dieser Satz wieder ein sehr schlagendes Beispiel, dass die Gesetze der Einigung nicht gelten; denn es ist, wie im Satze bewiesen $[EFF] = \bar{E}$: dagegen ist $[E(FF)] = 0$, indem hier $FF = 0$ nach Satz 92, mithin $[E(FF)] = [E \cdot 0] = 0$.

139. **Satz.** Für die rückschreitenden Modellfäche ist ${}^n[EF] = [\overline{EF}]$ oder die Ergänzung des rückschreitenden Modellflaches zweier Einheiten ist das Flach der Ergänzungen der Einheiten.

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

140. **Satz.** Die Modellsumme eines Modellflaches ist gleich dem Reste der bleibt, wenn man die Summe der Klassen der Fläche oder Faktoren durch die Stufe n des Hauptgebietes teilt oder

$$\alpha + \beta \dots = an + ({}^n(\alpha + \beta + \dots)).$$

Satz. Für die Modellfläche gilt das Beziehungsgefetz Satz 74 141. und 75.

Satz. Das Enflach zweier Größen, welche Fläche von Einheiten erster Größe sind, ist dann und nur dann ungleich Null, wenn in dem Enflache keine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes 2mal öfter als Fach oder Faktor vorkommt, als irgend eine andere Einheit erster Klasse des Hauptgebietes. 142.

Beweis. 1. Wenn in dem Enflache ${}^P[AB]$ irgend eine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Fach oder Faktor in dem Enflache fehlt, so können nicht die n Fache ${}^P[e_1e_2\cdots e_n] = 1$ in dem Enflache enthalten sein. Diese n Fläche können dann also aus dem Produkte ${}^P[AB]$ nicht ausscheiden, es bleiben mithin in diesem Falle in dem Produkte ${}^P[AB]$ zwei gleiche Fache oder Faktoren, und das Produkt ist also nach Satz 92 Null.

2. Wenn dagegen in dem Enflache ${}^P[AB]$ jede Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Faktor nur einmal enthalten ist, so ist das Flach nach Satz 82 ≥ 0 . Ebenso wenn in dem Enflache ${}^P[AB]$ sämtliche Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes wenigstens einmal enthalten sind, so ist zunächst das Enflach ${}^P[e_1e_2\cdots e_n] = 1$ und bleibt nur noch das Enflach der Einheiten erster Klasse, welche in dem Enflache beider Größen zweimal vorkommen, d. h. welche den beiden Größen A und B gemeinsam sind. Die Ergänzung dieses Enflaches ist dann das Flach aus den Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, welche den beiden Größen A und B nicht gemeinsam sind.

Satz. Für die fortschreitenden Modellfläche gelten alle Gesetze 143. der Flachung, namentlich auch der Satz 84 und das Enflach ist gleich dem Flach.

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

Satz. Wenn das Modellflach zweier Größen fortschreitend ist, 144. so ist das ihrer Ergänzungen rückschreitend und umgekehrt.

Beweis. Wenn ${}^P[AB]$ ein fortschreitendes Modellflach ist, und α und β die Klassen sind, so ist $\alpha + \beta < n$ (nach 133); dann ist für die Ergänzungen $(n - \alpha) + (n - \beta) = 2n - (\alpha + \beta) > n$, mithin nach 133 ${}^P[\overline{AB}]$ ein rückschreitendes Flach. Ebenso umgekehrt.

10. Die allgemeinen Sätze für Enflache.

Die Sätze sind im Folgenden zunächst für die drei Fälle zu beweisen, dass das Modellflach ein fortschreitendes, ein stehendes, oder ein rückschreitendes ist, oder mit andern Worten, dass $\alpha + \beta < n$, dass $\alpha + \beta = n$ und dass $\alpha + \beta > n$ sei. Wir setzen dabei in allen Sätzen dieser Nummer die Stufe des Hauptgebietes

gleich n , die Klasse von A gleich α , die von B gleich β , die von C gleich $\gamma \dots$, die von R gleich ϱ . Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun zur Entwicklung der Sätze.

145. **Satz.** Die Klasse des Enflachs zweier Größen, welches \geq Null ist, ist gleich der Ensumme ihrer Klassen, oder wenn γ, α, β die Klassen und $C = [AB]$, so ist $\gamma = {}^n(\alpha + \beta)$.

Beweis. 1. Wenn $\alpha + \beta < n$, so ist $[AB]$ ein fortschreitendes Modellflach, also die Klasse von $C = [AB]$ gleich der Klasse von $[AB]$, d. h. $\gamma = \alpha + \beta$.

2. Wenn $\alpha + \beta = n$, so ist $[AB] = \pm 1$ nach 137, und also nullter Klasse, d. h. $\gamma = {}^n(\alpha + \beta)$.

3. Wenn $\alpha + \beta > n$, so ist $\bar{C} = \bar{[AB]} = \bar{[A\bar{B}]}$ nach 139. Hier ist die Klasse von \bar{A} nach 131 gleich $n - \alpha$, die von $\bar{B} = n - \beta$, die von $\bar{C} = n - \gamma$, also

$$n - \gamma = n - \alpha + n - \beta = n - (\alpha + \beta - n) \text{ d. h. } \gamma = \alpha + \beta - n = {}^n(\alpha + \beta).$$

Somit gilt der Satz für den Fall, dass A, B und $[AB]$ Einheiten beliebiger Klassen sind. Da aber jede Vielfachensumme dieser Einheiten mit ihren Einheiten gleicher Klasse ist, so gilt er auch für beliebige Größen.

146. **Satz.** Die Klasse des Enflachs mehrer Größen, welches ungleich Null ist, ist gleich der Ensumme ihrer Klassen, oder

$$\text{Wenn } R = [ABC \dots], \text{ so ist } \varrho = {}^n(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$$

Beweis. In Satz 145 ist dieser Satz für das Enflach zweier Größen bewiesen, tritt nun zu dem Flache noch ein Fach oder Faktor hinzu, so bleibt der Satz nach 145 in Gültigkeit, also gilt er auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, da auch die Klasse dabei stets kleiner als n bleibt und nie eine Strichzahl wird.

Beispiele. Seien 5 Fache 4ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet: 6ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flaches $\varrho = 20 - 18 = 2$. Seien 3 Fache 3ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet 5ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flachs $\varrho = 9 - 5 = 4$.

147. **Satz.** Das Enflach der Ergänzungen zweier Größen ist die Ergänzung des Enflaches der Größen, oder

$$[\bar{AB}] = \bar{[AB]} \quad \text{und} \quad \bar{[\bar{AB}]} = [AB]$$

Beweis. 1. Wenn $\alpha + \beta > n$. Es sei $A = S\alpha_a E_a$ und $B = S\beta_b F_b$, wo E_a und F_b Einheiten sind, so ist nach 130 $\bar{A} = S\alpha_a \bar{E}_a$ und $\bar{B} = S\beta_b \bar{F}_b$, und ist

$$[\bar{A}\bar{B}] = [(S\alpha_a \bar{E}_a)(S\beta_b \bar{F}_b)] = S\alpha_a \beta_b [\bar{E}_a \bar{F}_b] \quad (\text{nach 74})$$

$$= S\alpha_a \beta_b [\bar{E}_a F_b] \quad (\text{nach 139})$$

$$= \bar{S}\alpha_a \beta_b [E_a F_b] \quad (\text{nach 130})$$

$$= \bar{[(S\alpha_a E_a)(S\beta_b F_b)]} \quad (\text{nach 74})$$

$$= \bar{[AB]}$$

2. Wenn $\alpha + \beta < n$. Wir setzen $A = \bar{A}'$ und $B = \bar{B}'$. Dann ist allgemein für $[A'B']$ die Summe $\alpha' + \beta' > n$ nach 144, also ist dann nach 147, $\bar{[A'B']} = [\bar{A}'\bar{B}'] = [AB]$. Also ist $\bar{[A'B']} = \bar{[AB]}$.

Ist nun n ungerade, oder ist n , sowie α und β gerade, so ist nach 132 $\bar{A} = \bar{A}' = A'$ und ebenso $\bar{B} = \bar{B}' = B'$, mithin ist dann auch nach 132 $\bar{[A\bar{B}]} = [A'B'] = [A'B']$. Also da $\bar{[A'B']} = \bar{[AB]}$ ist, und auch $\bar{[A'B']} = \bar{[AB]}$, so ist $\bar{[AB]} = \bar{[A\bar{B}]}$.

Ist dagegen n gerade, und ist eine z. B. α gerade, die andere β aber ungerade, so ist nach 132 $\bar{B} = \bar{B}' = -B'$ und also

$\bar{[A\bar{B}]} = [A' \cdot (-B')] = -[A'B'] = \bar{[A'B']}$ nach 132, da $\alpha + \beta$ ungerade, mithin $\bar{[A'B']} = -[A'B'] = \bar{[A\bar{B}]}$ und da allgemein für $\alpha + \beta < n$ $\bar{[A'B']} = \bar{[AB]}$ ist, so ist auch $\bar{[A\bar{B}]} = \bar{[AB]}$.

Sind endlich n gerade, aber α und β beide ungerade, so ist $\bar{A} = \bar{A}' = -A'$ und $\bar{B} = \bar{B}' = -B'$ nach 132, also ist

$\bar{[A\bar{B}]} = [(-A')(-B')] = [A'B'] = \bar{[A'B']}$ nach 132, da $\alpha + \beta$ gerade.

Es ist aber auch allgemein für $\alpha + \beta < n$ $\bar{[A'B']} = \bar{[AB]}$, also ist auch $\bar{[A\bar{B}]} = \bar{[AB]}$.

3. Wenn $\alpha + \beta = n$. Wir beweisen hier den Satz zuerst für Einheiten.

Wenn E und F Einheiten sind, welche keine Einheit erster Klasse gemein haben, so ist $[EF] = \pm 1$ und ebenso $[FE] = \pm 1$ nach 137. Dann ist aber nach 138 auch $\bar{E} = [EFF]$ und $\bar{F} = [FEE]$, mithin ist $\bar{[E\bar{F}]} = [EFF(FEE)] = [\pm 1 F(\pm 1 E)] = [FE] = \pm 1$, d. h. $\bar{[EF]}$

eine Zahl und da nach 127 für Zahlen $\bar{\alpha} = \alpha$ ist, so ist auch $\bar{[EF]} = \bar{[EF]}$, also ist auch $\bar{[EF]} = \bar{[EF]}$.

Wenn E und F Einheiten sind, welche eine oder mehrere Einheiten erster Klasse gemein haben, so ist nach 92 $\bar{[EF]} = 0$. Da aber $\alpha + \beta = n$, so können die Einheiten E und F zusammen nur n Fache enthalten, es muss also mindestens eine der ursprünglichen Einheiten in E und F fehlen, es sei dies er, dann muss sowohl \bar{E} als auch \bar{F} diese Einheit enthalten, also nach 92 $\bar{[EF]} = 0$ sein. Also ist dann auch $\bar{[EF]} = \bar{[EF]}$.

Da ferner hier $\bar{[EF]} = 0$ eine Zahl ist, so ist nach 127 auch $\bar{[EF]} = \bar{[EF]}$, mithin $\bar{[EF]} = \bar{[EF]}$.

Da nun das Gesetz für Einheiten gilt, so folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Größen gilt, deren Summe der Klassen $\alpha + \beta = n$ ist.

148. **Satz.** Das Enflach der Ergänzungen mehrerer Größen ist die Ergänzung des Enflaches dieser Größen oder

$$\bar{[\bar{A}\bar{B}\bar{C}\dots]} = \bar{[ABC\dots]}$$

Beweis. Wenn der Satz für m Fache oder Faktoren gilt, so dass

$$\bar{[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}]} = \bar{[AB\dots M]} \quad (\text{Annahme}),$$

so gilt er auch für m + 1 Fache oder Faktoren, denn es sei dieser (m + 1)te Fach N, so ist

$$\begin{aligned} \bar{[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}\bar{N}]} &= \bar{[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}]\bar{N}} \\ &= \bar{[AB\dots MN]} \quad (\text{nach 147}) \end{aligned}$$

Nun gilt der Satz für 2 Fache nach 147, also gilt er auch fortschreitend für beliebig viele.

149. **Satz.** Wenn a, b, c... Größen erster Klasse sind, so ist

$$\bar{[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\dots]} = \bar{[abc\dots]}$$

Das rückschreitende Enflach der Ergänzungen von Größen erster bez. (n — 1)ter Klasse kann als ein Enflach betrachtet werden dessen Fache oder Faktoren (n — 1)ter bez. erster Klasse sind.

150. **Satz.** Die Ergänzung eines vielgliedrigen Ausdrucks (eines Polynoms) erhält man, wenn man von jedem Gliede, ohne das Vorzeichen des Gliedes zu ändern, die Ergänzung nimmt oder

$$\bar{(A \pm B \pm C \pm \dots)} = \bar{A} \pm \bar{B} \pm \bar{C} \pm \dots$$

Beweis. Es sei $A = S_{\alpha_a} \bar{E}_a$, $B = S_{\beta_a} \bar{E}_a$, $C = S_{\gamma_a} \bar{E}_a \dots$, so ist $\bar{(A \pm B \pm C \pm \dots)} =$

$$\begin{aligned}
 &= (\overline{S\alpha_a E_a} \pm \overline{S\beta_a E_a} \pm \overline{S\gamma_a E_a} \pm \dots) = \overline{S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \dots) E_a} \\
 &= S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \dots) \overline{E_a} \quad (\text{nach 130}) \\
 &= S\alpha_a \overline{E_a} \pm S\beta_a \overline{E_a} \pm S\gamma_a \overline{E_a} \pm \dots \\
 &= \overline{S\alpha_a E_a} \pm \overline{S\beta_a E_a} \pm \overline{S\gamma_a E_a} \pm \dots = \overline{A} \pm \overline{B} \pm \overline{C} \pm \dots \quad (\text{nach 130})
 \end{aligned}$$

Satz. Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen als die Bildung von Vielfachen summen beliebigen Gebietes und Modelung vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man in der Gleichung statt der Größen ihre Ergänzungen setzt oder

Wenn $f_0(A, B, \dots) = \varphi_0(A', B', \dots)$, wo f_0 und φ_0 Verknüpfungen der genannten Art sind, so ist auch

$$f_0(\overline{A}, \overline{B}, \dots) = \varphi_0(\overline{A'}, \overline{B'}, \dots)$$

Beweis. In den Verknüpfungen der Formeln f_0 und φ_0 können nur Zufügen und Abziehen, sowie Modlung vorkommen, wenn wir zur letzteren auch die Vervielfachung mit Zahlen rechnen. Nun bleibt beim Zufügen und Abziehen die Gleichung nach Satz 150 auch für die Ergänzungen und bei der Modlung nach Satz 148 auch für die Ergänzungen bestehen, mithin gilt allgemein für diese Arten der Verknüpfungen, wenn $f_0(A, B, \dots) = \varphi_0(A', B', \dots)$ auch $f_0(\overline{A}, \overline{B}, \dots) = \varphi_0(\overline{A'}, \overline{B'}, \dots)$.

Satz. Zwischen den Größen m ter und denen $(n - m)$ ter Klasse in einem Hauptgebiete n ter Stufe besteht volle Gegenseitigkeit, so dass jeder Satz, der von den einen gilt, auch für die andern gilt.

Satz. Für drei Einheiten EFG, bei denen die Summe der Klassen der Stufe des Hauptgebietes n gleich ist, ist

$$[EF(EG)] = [EFGE].$$

Beweis. 1. Wenn $[EFG]$ keine gleichen Fache enthält, so muss es alle n ursprünglichen Einheiten enthalten und ist nach 137 also $= \pm 1$. Dann ist nach 138

$$\overline{G} = [G(EF)(EF)] \quad \overline{F} = [F(EG)(EG)]$$

Diese können wir, da $[G(EF)]$ und $[F(EG)]$ gleich ± 1 ist, mit $[G(EF)]$ bez. $[F(EG)]$ vervielfachen und erhalten dann $[G(EF)] \cdot [G(EF)] = 1$, und $[F(EG)] \cdot [F(EG)] = 1$, mithin

$$[G(EF)\overline{G}] = [EF], \quad [F(EG)\overline{F}] = [EG]$$

Hier erhält man, da man die Zahlfache beliebig ordnen kann,

$$\begin{aligned} \overset{n}{[EF(EG)]} &= \overset{n}{[G(EF)\bar{G}]} \cdot \overset{n}{[F(EG)\bar{F}]} = \overset{n}{[G(EF)]} \overset{n}{[F(EG)]} \overset{n}{[\bar{G}\bar{F}]} \\ &= \overset{n}{[G(EF)]} \overset{n}{[F(EG)]} \overset{n}{[\bar{G}F]} \quad (\text{nach 147}) \end{aligned}$$

$$= \overset{n}{[G(EF)]} \overset{n}{[F(EG)]} \overset{n}{[GFEE]} \quad (\text{nach 138})$$

In diesem Ausdrucke ist $\overset{n}{[FE]} = \pm \overset{n}{[EF]}$ (nach 91), mithin bleibt das Zeichen unverändert, wenn man zweimal diese Aenderung macht, d. h. es wird

$$\begin{aligned} \overset{n}{[EF(EG)]} &= \overset{n}{[G(EF)]} \overset{n}{[E(FG)]} \overset{n}{[GEFE]} \\ &= \overset{n}{[EFGE]} \end{aligned}$$

Da $\overset{n}{[GEF]} = \pm 1$, mithin $\overset{n}{[GEF]} \cdot \overset{n}{[GEF]} = 1$ ist.

2. Wenn $\overset{n}{[EFG]}$ gleiche Fache enthält, so ist $\overset{n}{[EFG]} = 0$ nach 92. Ferner muss, da die Zahl seiner Fache n ist, mindestens eine der n Einheiten des Hauptgebietes, etwa e , in dem Fläche $\overset{n}{[EFG]}$, also auch in $\overset{n}{[EF]}$ und in $\overset{n}{[EG]}$ fehlen. Sei nun $\overset{n}{[EF]} = \bar{Q}$ und $\overset{n}{[EG]} = \bar{R}$, so müssen nach 127 sowohl Q als R diese Einheit als Fach enthalten, mithin muss nach 92 $\overset{n}{[QR]}$ gleich Null sein, also nach 127 auch die Ergänzung derselben $\overset{n}{[\bar{Q}\bar{R}]} = \overset{n}{[\bar{Q}R]}$ gleich Null sein. Mithin ist

$$\overset{n}{[EF(EG)]} = \overset{n}{[\bar{Q}\bar{R}]} = 0 = \overset{n}{[EFGE]}$$

154. **Satz.** Für drei einfache Größen A, B, C , bei denen die Summe der Stufenzahlen $\alpha + \beta + \gamma$ der Stufenzahl des Hauptgebietes n gleich ist, ist

$$\overset{n}{[AB(AC)]} = \overset{n}{[ABC \cdot A]}$$

Beweis. 1. Angenommen, der Satz gelte für den Fall, dass die drei einfachen Größen keine anderen Fache enthalten als solche, welche einer gegebenen Reihe von n Größen erster Stufe $a_1, a_2 \dots a_n$ angehören, so soll zunächst bewiesen werden, dass sie auch noch gilt, wenn man statt einer dieser Größen z. B. statt a_1 eine Vielfachenfumme der n Größen, etwa

$$a' = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = \sum_{1,n} a_a a_a \quad \text{setzt.}$$

Es kann a_1 in jeder der drei Größen A, B, C enthalten sein.

Ist a_1 in B enthalten, so sei $B = \overset{n}{[a_1 D]}$ und verwandle sich, wenn man a' statt a_1 einführt, B in $B' = \overset{n}{[a' D]}$, dann wird

$$\begin{aligned}
 {}^n[AB'(AC)] &= {}^n[A(a'D)(AC)] = \left[A \left(S_{a_1 a_2 D} \right) (AC) \right] \\
 &= S_{a_1} {}^n[A(a_2 D)(AC)] \quad (\text{nach 75}) \\
 &= S_{a_1} {}^n[A(a_2 D)CA] \quad (\text{nach Annahme}) \\
 &= \left[A \left(S_{a_1 a_2 D} \right) CA \right] \quad (\text{nach 75}) \\
 &= {}^n[Aa'DCA] = {}^n[AB'CA]
 \end{aligned}$$

Genau derselbe Beweis folgt, wenn a_1 in C enthalten ist.

Ist a_1 in A enthalten, so sei $A = [a_1 D]$ und verwandle sich, wenn man zunächst $a' = a_1 a_1 + a_2 a_2$ statt a_1 einführt, A in $A' = [a'D]$, dann ist

$$A' = a_1 [a_1 D] + a_2 [a_2 D] = a_1 A + a_2 [a_2 D] \quad (+)$$

Wenn hier noch a_2 in D enthalten ist, so wird nach 92 das letzte Stück $[a_2 D] = 0$, es würde also $A' = a_1 A$ und würde

$$\begin{aligned}
 {}^n[A'B(A'C)] &= {}^n[a_1 {}^n[AB(AC)]] = {}^n[a_1 {}^n[ABCA]] \quad (\text{nach Annahme}) \\
 &= {}^n[a_1 ABC(aA)] = {}^n[A'BCA'] \quad (\text{nach 75})
 \end{aligned}$$

Wenn dagegen a_2 nicht in D, also auch nicht in A vorkommt, so kann es nur in B oder C enthalten sein. Es sei in B und $B = [a_2 E]$. Dann ist (nach +) $A' = a_1 A + a_2 [a_2 D]$, also da a_2 auch in B enthalten $[a_2 DB] = 0$, mithin ist $[A'B] = a_1 [AB]$, und ist $[A'C] = [(a_1 A + a_2 [a_2 D])C] = a_1 [AC] + a_2 [a_2 DC]$, mithin ist

$$\begin{aligned}
 {}^n[A'B(A'C)] &= a_1 {}^n[AB(AC)] + a_1 a_2 [AB(a_2 DC)] \\
 &= a_1 {}^n[ABCA] + a_1 a_2 [AB(a_2 DC)] \quad (\text{nach Annahme})
 \end{aligned}$$

Im zweiten Stücke [ist hier, wenn man für A und B die Werte einsetzt

$$\begin{aligned}
 {}^n[AB(a_2 DC)] &= {}^n[a_1 Da_2 E(a_2 DC)] = - {}^n[a_2 Da_1 E(a_2 DC)] \quad (\text{nach 91}) \\
 &= - {}^n[a_2 Da_1 EC(a_2 D)] \quad (\text{nach Annahme}) \\
 &= {}^n[a_1 Da_2 EC(a_2 D)] = {}^n[ABC(a_2 D)] \quad (\text{nach 91})
 \end{aligned}$$

somit wird

$$\begin{aligned}
 {}^n[A'B(A'C)] &= {}^n[a_1 {}^n[ABCA]] + a_1 a_2 [ABC(a_2 D)] \\
 &= a_1 [ABC(a_1 A + a_2 a_2 D)] \\
 &= a_1 [ABCA'] = {}^n[A'BC \cdot A']
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt der Beweis, wenn a_2 in C statt in B enthalten war. Es ist also bewiesen, dass der Satz bestehen bleibt, wenn sich das eine Fach a_1 in $a_1a_1 + a_2a_2$ verwandelt, also auch, wenn man dies wieder in $a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3$ verwandelt u. s. w.

2. Der Satz 154 bleibt also, wenn er für den Fall gilt, dass die 3 Größen A, B, C nur Fache enthalten, welche irgend einer Reihe von n Größen erster Klasse $a_1, a_2 \dots a_n$ angehören, auch bestehen, wenn man statt einer dieser Größen, eine Vielfachenfumme der n Größen setzt. Führt man diese Vielfachenfumme statt der ursprünglichen Größe ein, so gilt nun der Satz für eine Reihe von n Größen und bleibt also nach Beweis 1 auch bestehen, wenn man statt einer zweiten Größe eine Vielfachenfumme der n ursprünglichen Größen einführt. Er bleibt also auch bestehen, wenn man statt der n Größen $a_1a_2 \dots a_n$ andere n Größen $b_1 \dots b_n$ einführt, welche gegenseitig frei und Vielfachenfummen jener Größen sind, und ist das Gebiet der ersten n Größen nach 22 dem Gebiete der letzten n Größen gleich.

3. Nun gilt der Satz nach 153, wenn die Größen A, B, C Einheiten sind, also gilt er auch für alle aus ihnen abgeleiteten Größen A, B, C, sofern die Reihe der n Größen erster Stufe, welche ihre Fache bilden, gegenseitig frei sind, oder sofern $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist.

155. **Satz.** Für die Größen A, B, C gilt die Gleichung

$$[AB(AC)] = [ABCA]$$

auch dann, wenn auch B und C zusammengesetzte Größen sind, sofern nur A eine einfache Größe und die Summe der Klassen der drei Größen der Stufe des Hauptgebietes gleich ist.

Beweis. Es sei $B = S\beta D\delta$, $C = S\gamma E\epsilon$,
wo D und E Zeuge (Produkte) von einfachen Größen sind, so ist

$$[AB(AC)] = S\beta\gamma c [AD\delta(AE\epsilon)] \quad (\text{nach 74})$$

$$= S\beta\gamma c [AD\delta E\epsilon A] \quad (\text{nach 153})$$

$$= [A(S\beta\delta D\delta)(S\gamma\epsilon E\epsilon)A] \quad (\text{nach 74})$$

$$= [ABCA]$$

Wenn A eine zusammengesetzte Größe ist, gilt der Satz nicht mehr allgemein. Sei z. B. $A = ab + cd$, wo a, b, c, d gegenseitig frei, und sei $B = c$, $C = d$, so wird in Bezug auf ein Gebiet 4ter Stufe $[AB(AC)] = [(ab + cd)c(ab + cd)d]$; $= [abc(abd)]$, da $[cdc]$ und $[cdd]$ verschwinden; aber $[abc(abd)] = [abcd(ab)]$. Also wird

$$[AB(AC)] = [abcd(ab)].$$

Dagegen wird

$$\begin{aligned} [ABCA] &= [(ab + cd)cd(ab + cd)] = [abcd(ab + cd)] \\ &= [abcd(ab)] + [abcd(cd)] = [abcd(ab)] + [abcd(cd)] \end{aligned}$$

Also sind beide Ausdrücke um $[abcd(cd)]$ von einander verschieden.

Satz. Für drei einfache Größen A, B, C, deren Flach nullter 156. Klasse ist, gelten die drei Gleichungen:

$$1. \quad [AB(AC)] = [ABCA]$$

$$2. \quad [AB(BC)] = [ABCB]$$

$$3. \quad [AC(BC)] = [ABCC].$$

Beweis. 1. Es seien die Klassen von A, B, C gleich α, β, γ , die Stufe des Hauptgebietes sei n. Da nun das Flach $[ABC]$ nullter Klasse sein soll, so muss nach 126 auch $0 = (\alpha + \beta + \gamma)$, d. h. $\alpha + \beta + \gamma$ durch n teilbar sein, mithin da α, β, γ kleiner als n sind, gleich n oder gleich $2n$ sein. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist, so gilt die Formel 1 nach 154. Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2n$ ist, so sei $A = \bar{A}'$, $B = \bar{B}'$, $C = \bar{C}'$ und seien α', β', γ' die Klassen von A', B', C' , so ist $\alpha' = n - \alpha$, $\beta' = n - \beta$, $\gamma' = n - \gamma$ (nach 130), mithin ist $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3n - (\alpha + \beta + \gamma) = 3n - 2n = n$. Dann aber ist

$$[AB(AC)] = [\bar{A}' \cdot \bar{B}' (\bar{A}' \cdot \bar{C}')] = [\bar{A}' B' \cdot A' C'] \quad (\text{nach 147})$$

$$= [A' B' C' A'], \text{ nach 155, da } \alpha' + \beta' + \gamma' = n. \text{ Mithin nach 148}$$

$$= [\bar{A}' \cdot \bar{B}' \cdot \bar{C}' \cdot \bar{A}'] = [ABC \cdot A].$$

2. Es sei $[AB] = [BD]$, so ist D von gleicher Klasse mit A, mithin

$$\begin{aligned} [AB(BC)] &= [BD(BC)] = [BDCB] \quad (\text{nach 156}_{11}) \\ &= [ABCB], \end{aligned}$$

da $[BD] = [AB]$ ist.

3. Es sei $[BC] = [CD]$, so ist D von gleicher Klasse mit B, mithin

$$\begin{aligned} [AC(BC)] &= [AC(CD)] = [ACDC] \quad (156_{12}) \\ &= [ABCC], \end{aligned}$$

da $[CD] = [BC]$ ist.

157. **Satz.** Für zwei einfache Größen A und C , bei denen die Summe der Klassen $\alpha + \gamma$ der Stufe n des Hauptgebietes gleich ist, gelten für die einfache der Größe A untergeordnete Größe B die folgenden Gleichungen:

$$[A(BC)] = [ACB]$$

$$[CBA] = [CAB].$$

Beweis. Nach 117 ist A in der Form BD darstellbar, mithin ist

$$[A(BC)] = [BD(BC)] = [BDCB] \quad (\text{nach } 156_a)$$

$$= [ACB] \quad \text{und}$$

$$[CB \cdot A] = [CB(BD)] = [CBDB] \quad (\text{nach } 156_a)$$

$$= [CAB]$$

158. **Satz.** Das Enflach zweier einfachen Größen, die ungleich Null sind, ist dann, und nur dann von Null verschieden, wenn die Stufe ihres verbindenden Gebietes den größten, oder, was dasselbe ist, wenn die Stufe ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten Wert hat, den sie bei den Klassen der beiden Fache oder Faktoren und der Stufe des Hauptgebietes haben kann, oder

Wenn δ die Klasse des verbindenden Gebietes, γ die des gemeinschaftlichen ist, und

wenn $\alpha + \beta < n$, d. h. wenn das Enflach ein fortschreitendes oder stehendes ist, so ist

$$[AB] > 0, \text{ dann und nur dann, wenn}$$

$$\alpha + \beta = \delta, \text{ oder, was dasselbe ist, } \gamma = 0; \text{ ferner}$$

wenn $\alpha + \beta > n$, d. h. wenn das Enflach ein rückschreitendes ist, so ist

$$[AB] > 0, \text{ dann und nur dann, wenn}$$

$$\delta = n, \text{ oder, was dasselbe ist, } \gamma = \alpha + \beta - n \text{ ist.}$$

Beweis. 1. Es sei $\alpha + \beta \leq n$, so ist das Enflach (nach 133) fortschreitend, mithin (nach 93, 92) dann und nur dann Null, wenn zwischen seinen einfachen Fachen eine Hörigkeit herrscht. Wenn also

$[AB] = 0$ ist, so lässt sich (nach 19) von den einfachen Fachen oder

Faktoren des Flaches $[AB]$ eines als Vielfachensumme aus den $\alpha + \beta - 1$ übrigen darstellen. Dann werden mithin sämtliche einfache Fache jenes Flaches von einem Gebiete von niederer als $(\alpha + \beta)$ ter Stufe umfasst, d. h. $\delta < \alpha + \beta$. Ist hingegen $[AB] > 0$, so sind die einfachen Fache dieses Flaches (nach 93) gegenseitig frei, ihr verbindendes

Gebiet ist also von $(\alpha + \beta)$ ter Stufe, d. h. $\alpha + \beta = \delta$. Also ist, wenn $\alpha + \beta \leq n$ ist, ${}^n[AB]$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\alpha + \beta = \delta$ ist. Dann aber ist nach 31 stets auch $\gamma = 0$.

Endlich ist, wenn $\alpha + \beta \leq n$ ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Größen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, Null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta$.

2. Wenn dagegen $\alpha + \beta > n$ ist, dann haben die Gebiete A und B, da sie von α ter und β ter Stufe sind, nach 32 mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$ ter, d. h. γ ter Stufe gemein. Sei demnach C eine GröÙe von γ ter Klasse in diesem gemeinsamen Gebiete, dann lassen sich A und B (nach 117) in den Formen $A = {}^n[CA_1]$, $B = {}^n[CB_1]$ darstellen, wo A_1 und B_1 GröÙen von der Klasse $\alpha - \gamma$ und $\beta - \gamma$ sind, mithin ist ${}^n[CA_1B_1]$ von n ter Klasse, da die Klasse $\gamma + \alpha - \gamma + \beta - \gamma = \alpha + \beta - \gamma = n$ ist. Mithin ist nach 155

$${}^n[AB] = {}^n[CA_1(CB_1)] = {}^n[CA_1B_1C].$$

Hier ist aber ${}^n[CA_1B_1]$ von n ter oder mit andern Worten von nullter Klasse, also eine Zahl, und diese ist dann und nur dann Null, wenn ${}^n[CA_1B_1]$, d. h. ${}^n[AB_1]$ Null ist. Aber nach Beweis 1 ist ${}^n[AB_1]$ dann und nur dann Null, wenn A und B_1 von einem Gebiete von niedriger als n ter Stufe umfasst werden, aber da C in $A = CA_1$ liegt, so werden dann auch A und CB_1 , d. h. A und B von einem Gebiete niedriger als n ter Stufe, umfasst, d. h. $\delta < n$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, ${}^n[AB]$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\delta = n$ ist. Dann aber ist nach 32 auch stets $\gamma = \alpha + \beta - n$.

Endlich ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, die grösste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n , also (nach 31) die kleinste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta - n$. Mithin ist der Satz 158 in allen Teilen bewiesen.

Erklärung. Wir setzen das Nein einer GröÙe A (Zeichen \bar{A} , 159. gelesen Nein A) gleich dem Enfläche ${}^n[AA'A']$, wo A' das Flach derjenigen n gegenseitig freien GröÙen $a_1 a_2 \dots a_n$ ist, welche in A nicht vorkommen oder $\bar{A} = {}^n[AA'A']$ * wo $[AA'] = \pm [a_1 a_2 \dots a_n]$.

Wir müssen diese Erklärung hier einfügen, um zu einer allgemeinen Geltung für die Gesetze der Modlung zu gelangen.

Satz. Alle Gesetze der Modlung gelten auch noch, wenn man 160. überall statt der ursprünglichen Einheiten erster Klasse eine beliebige

Reihe von n Größen erster Klasse setzt, welche Vielfachensummen derselben sind, und deren Enflach 1 ist.

Beweis. Es seien $e_1 \dots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, und $a_1 \dots a_n$ Vielfachensummen derselben, für welche

$$[a_1, a_2 \dots a_n] = 1 \text{ gilt.}$$

Es sei nun F' das Flach aller in der Einheit m ter Stufe E nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe des Hauptgebietes, so ist nach 138

$$\bar{E} = [EFF].$$

Sei in gleicher Weise A' das Flach aller in A nicht vorkommender Größen $a_1, a_2 \dots a_n$, so ist nach 159

$$\bar{A} = [AA'A'].$$

Wir müssen nun zunächst beweisen, dass auch für diese Größe die in Erklärung 133 aufgestellte Bestimmung ihre Geltung behält, wenn wir die Größen $a_1 \dots a_n$ an Stelle der ursprünglichen Einheiten einführen, d. h. dass

(*) $[AB] = [\bar{A}\bar{B}]$ sei, wenn $\alpha + \beta \geq n$ ist. Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, wenn $\alpha + \beta < n$ ist.

1. Sei nun zunächst $[AB] = 0$, so müssen (nach 156) die Gebiete A und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe, also ein Gebiet γ ter Stufe oder γ Fache erster Klasse gemein haben, dann werden diese Fache, da \bar{A} nur diejenigen Fache enthält, welche in A nicht vorkommen, in \bar{A} fehlen, und aus gleichem Grunde auch in \bar{B} , also werden \bar{A} und \bar{B} von einem Gebiete von niedriger als n ter Stufe umfasst, also ist (nach 158)

$$[\bar{A}\bar{B}] = 0,$$

mithin, da auch $[AB] = 0$ ist und die Ergänzung einer Zahl (nach 127) dieser gleich ist, d. h. die von Null selbst Null ist, so ist

$$[AB] = [\bar{A}\bar{B}].$$

2. Sei ferner $[AB] \geq 0$, so enthält daselbe $\alpha + \beta$ verschiedene Fache erster Klasse der Reihe $a_1 \dots a_n$. Sei nun C das Flach der übrigen Fache, so ist (nach 91) $[ABC] = \pm [a_1 \dots a_n]$, mithin, da $[a_1 \dots a_n] = 1$ ist, so ist $[ABC] = \pm 1$. Da nun $[BC]$ das Flach der in A nicht vorkommenden Fache ist, so ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$\bar{A} = [ABC(BC)], \text{ ebenso}$$

$$\bar{B} = {}^n[BAC(AC)] \text{ und } {}^n[AB] = {}^n[ABCC]$$

wo ${}^n[ABC]$ und ${}^n[BAC]$ wie bewiesen $= \pm 1$ sind, oder Zahlen sind,

$$\begin{aligned} \text{mithin ist } {}^n[\bar{A}\bar{B}] &= {}^n[ABC]{}^n[BAC]{}^n[BC(AC)] \\ &= {}^n[ABC]{}^n[BAC]{}^n[BAC \cdot C] \end{aligned} \quad (154_{,3}).$$

Da aber ${}^n[BAC] = \pm 1$ ist, so ist ${}^n[BAC]{}^n[BAC] = 1$. Also

$${}^n[\bar{A}\bar{B}] = {}^n[ABC \cdot C] = {}^n[AB].$$

Es gilt also die Formel, wenn $\alpha + \beta < n$ ist.

Dann gilt die Formel aber auch, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, und zwar folgt dieser Teil des Satzes ganz in gleicher Weise, wie Satz 147_{,2}.

Es gilt also die Erklärung 133, auch wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Größen $a_1 \dots a_n$ einführt, ebenso gelten alle früheren Sätze, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige gegenseitig freie n Größen setzt, deren Flach nicht Null ist, also auch, wenn man statt derselben die Größen $a_1 \dots a_n$ setzt. Aus diesen früheren Sätzen und der in der Erklärung festgestellten Bestimmung sind aber alle folgenden Gesetze abgeleitet, folglich gelten auch diese noch bei der angegebenen Einführung der Größen $a_1 \dots a_n$ statt der ursprünglichen Einheiten $e_1 \dots e_n$.

Zu bemerken ist hier, dass \bar{A} nicht mit \bar{A} zusammenfällt, so z. B. ist in dem Gebiete dritter Stufe e_1, e_2, e_3 , wo ${}^3[e_1 e_2 e_3] = 1$ ist, die Ergänzung von $e_1 + e_2$, da $\bar{e}_1 = {}^3[e_2 e_3]$, $\bar{e}_2 = {}^3[e_3 e_1]$ ist, ${}^3[e_1 + e_2] = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = {}^3[e_2 e_3] + {}^3[e_3 e_1]$. Dagegen ist, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, a_2 = e_2, a_3 = e_3$$

ist bei Anwendung der Bezeichnung in obigem Satze

$${}^3\bar{a}_1 = {}^3[a_1 a_2 a_3 (a_2 a_3)] = {}^3[a_2 a_3] = {}^3[e_2 e_3],$$

also von a_1 um $[e_3 e_1]$ verschieden. Im folgenden Abschnitte wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen $e_1 \dots e_n$ und $a_1 \dots a_n$ stattfinden müssen, wenn $\bar{A} = \bar{A}$ sein soll.

Satz. Wenn

$$1 = {}^n[a_1 \dots a_n] = {}^n[PP'] = {}^n[AA'] = {}^n[BB'] = {}^n[C \cdot C'] = \dots$$

ist, und alle diese Größen $P, P', A, A' \dots$ keine anderen Größen erster Klasse enthalten, als die der Reihe $a_1 \dots a_n$ angehören, auch

$$P = {}^n[ABC \dots] \text{ ist, so ist auch } P' = {}^n[A'B'C' \dots].$$

Beweis. Nach Erklärung 159 ist, da $1 = {}^n[PP'] = {}^n[AA']$

$$\bar{P} = {}^n[PP'P] = P', \quad \bar{A} = {}^n[AA'A'] = A' \text{ u. s. w.}$$

Da nun nach 160 alle früheren Sätze, also namentlich auch Satz 148 noch gelten, so ist, wenn man überall das Zeichen $\bar{\cdot}$ statt $-$ setzt,

$$\bar{\bar{[ABC \dots]}} = \bar{[ABC \dots]},$$

mithin $\bar{\bar{P}} = \bar{[ABC \dots]}$.

Folglich, da $\bar{\bar{P}} = P'$, $\bar{\bar{A}} = A'$, $\bar{\bar{B}} = B'$, $\bar{\bar{C}} = C' \dots$ ist,

$$P' = \bar{[A'B'C' \dots]}.$$

162. **Satz.** Wenn man aus n Größen erster Klasse, deren Enflach gleich 1 ist, die Geschiedsfläche (die multiplikativen Kombinationen) zur $n - 1$ ten Klasse bildet, und die einfachen Größen in jedem Geschiedsfläche nach dem Abece, die Fläche selbst nach dem Lexikon ordnet, unter der Annahme, dass die Reihe jener n Größen als ein Abece betrachtet werde, so ist das Enflach aus den $n - m$ ersten dieser Geschiedsfläche gleich dem Enflach aus den m ersten jener n Größen, d. h.

$$\bar{[A_n \dots A_{m+1}]} = \bar{[a_1 \dots a_m]},$$

wenn $A_r = \bar{[a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n]}$

und $\bar{[a_1 \dots a_n]} = 1$ ist.

Beweis. 1. Wir wollen zuerst beweisen, dass

$$\bar{[a_1 \dots a_r A_r]} = \bar{[a_1 \dots a_{r-1}]}$$

fei. Nach der Bezeichnung im Satze ist

$A_r = \bar{[a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n]}$. Mithin ist

$$\begin{aligned} \bar{[a_1 \dots a_r A_r]} &= \bar{[a_1 \dots a_r (a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n)]} \\ &= \bar{[a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_n]} \bar{[a_1 \dots a_{r-1}]} \\ &= \bar{[a_1 \dots a_{r-1}]}, \end{aligned} \quad (153_{11})$$

da $\bar{[a_1 \dots a_n]} = 1$ ist.

2. Mithin ist

$$\bar{[A_n A_{n-1}]} = \bar{[a_1 \dots a_{n-1} A_{n-1}]} = \bar{[a_1 \dots a_{n-2}]}$$

$$\bar{[A_n A_{n-1} A_{n-2}]} = \bar{[a_1 \dots a_{n-2} A_{n-2}]} = \bar{[a_1 \dots a_{n-3}]}$$

u. f. w. Also

$$\bar{[A_n A_{n-1} \dots A_{n-r}]} = \bar{[a_1 \dots a_{n-r-1}]}.$$

Mithin, wenn $n - r - 1 = m$ ist,

$$\bar{[A_n A_{n-1} \dots A_{m+1}]} = \bar{[a_1 \dots a_m]}.$$

Satz. Wenn F_1, F_2, \dots die Geschiedsfläche aus den Fachen erster Klasse einer von Null verschiedenen Größe B sind und D_a jedesmal aus denjenigen Fachen von B besteht, welche in F_a fehlen, auch die Fache so geordnet sind, dass jedesmal $[F_a D_a] = B$ ist, so ist für jede Größe A , deren Klasse die Klasse von D_a zu der des Hauptgebietes ergänzt,

$$[AB] = S[AD_a F_a] = [AD_1 F_1] + [AD_2 F_2] + \dots$$

Beweis. Es sei m die Anzahl der Fache erster Stufe von B ; es sei n die Stufe des Hauptgebietes, α die Klasse von A , und sei $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$.

Da nun nach der Annahme $B \geq 0$ ist, so sind (nach 93) die Größen $b_1 \dots b_m$ gegenseitig frei, mithin lassen sich (nach 23) zu ihnen noch $n - m$ Größen erster Klasse $b_{m+1} \dots b_n$ von der Art hinzufügen, dass alle Größen erster Klasse, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, als Vielfachensummen derselben dargestellt werden können. Auch A kann dann als Größe α ter Klasse in der Form

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots = S a_\alpha A_\alpha$$

dargestellt werden, wo A_1, A_2, \dots die Geschiedsfläche aus $b_1 \dots b_n$ zur α ten Klasse sind. Es seien diese Geschiedsfläche A_1, A_2, \dots so gewählt, dass jedesmal A_α aus denjenigen jener n Größen besteht, welche in D_a fehlen. Dies ist allemal möglich, da D_a nach der Annahme $n - \alpha$ jener Größen enthält. Dann ist, da nach der Annahme $B = [F_a D_a]$ ist

$$\begin{aligned} [AB] &= S[a_\alpha A_\alpha B] = S a_\alpha [A_\alpha B] \\ &= S a_\alpha [A_\alpha (F_a D_a)]. \end{aligned} \quad (73)$$

Da nun F_a nur solche jener n Größen $b_1 \dots b_n$ enthält, die dem D_a fehlen, und A_α sämtliche der in D_a fehlenden Größen $b_1 \dots b_n$ enthält, so ist F_a dem A_α untergeordnet, also (nach 157) $[A_\alpha (F_a D_a)] = [A_\alpha D_a F_a]$, mithin $[AB] = S a_\alpha [A_\alpha D_a F_a]$.

Ferner ist aber $[A_b D_a] = 0$ wenn b von α verschieden ist, weil dann A_b mindestens ein Fach enthält, das auch in D_a vorkommt, also kann man statt $a_\alpha [A_\alpha D_a]$ schreiben $S a_b [A_b D_a]$, wo sich die Summe nur auf den Zeiger b bezieht, d. h. es ist

$$a_\alpha [A_\alpha D_a] = S a_b [A_b D_a] = [S a_b A_b D_a] = [A_\alpha D_a],$$

mithin $[AB] = S [A D_a F_a]$.

11. Die reinen und die gemischten Enfläche.

Auch in dieser Nummer setzen wir in allen Sätzen die Stufe des Hauptgebietes gleich n , die Klasse der GröÙe A gleich α , die der GröÙe B gleich β , die der GröÙe C gleich γ u. f. w., und bemerken dies für alle Sätze vorweg.

164. **Erklärung.** Ein rein fortschreitendes Modellfläch heist das Modellfläch mehrer GröÙen, wenn diese keiner andern als der fortschreitenden Flächung unterliegen.

Ein rein rückschreitendes Modellfläch heist das Modellfläch mehrer GröÙen, wenn diese keiner andern als der rückschreitenden Modlung unterliegen. Wenn das Gesamtfläch nullter Stufe ist, so kann die letzte Modlung, welche dies Gesamtfläch bildet, nach 133 sowohl fortschreitend wie rückschreitend fein.

Beide Arten der Fläche heissen reine Modellfläche, alle andern gemischte.

Beispielsweise ist das Enfläch $[ABCD \dots HJ]$ ein rein fortschreitendes, wenn das Enfläch $[AB]$, ebenso das Enfläch von $[AB]$ mit C , das Enfläch von $[ABC]$ mit D jedes fortschreitend ist u. f. w., endlich auch das Enfläch von $[ABCD \dots H]$ mit J fortschreitend ist. Dagegen heist das Enfläch ein rein rückschreitendes, wenn das Enfläch $[AB]$, ebenso das Enfläch von $[AB]$ mit C , das von $[ABC]$ mit D jedes rückschreitend ist u. f. w., endlich auch das von $[ABCD \dots H]$ mit J rückschreitend ist. Im Hauptgebiete dritter Stufe bildet das Dreifläch $[ab(ac)(bc)]$ ein Beispiel des rein rückschreitenden Modellfläch.

165. **Satz.** Wenn ein Enfläch mehrer GröÙen $[ABC \dots]$ ein rein fortschreitendes ist, so ist das der Ergänzungen $[\overline{ABC} \dots]$ ein rein rückschreitendes und umgekehrt.

Beweis. Nach 144 gilt der Satz für zwei Fläche oder Faktoren, mithin da $[AB]$ ein fortschreitendes Fläch ist, so ist $[\overline{AB}]$ ein rückschreitendes, und da $[ABC]$ ein fortschreitendes ist, so ist $[(\overline{AB})\overline{C}]$ ein rückschreitendes, also ist $[\overline{ABC}]$ ein rein rückschreitendes u. f. w.

166. **Satz.** Ein Enfläch von m GröÙen A, B, C, \dots, L, M ist ein rein fortschreitendes, wenn die Summe der Klassen dieser GröÙen ebenbüß gros oder kleiner ist als die Stufe (n) des Hauptgebietes, hingegen ein rein rückschreitendes, wenn jene Summe ebenbüß gros oder gröÙer ist als $n(m - 1)$, ein gemischtes, wenn jene Summe gröÙer als n und kleiner als $n(m - 1)$ ist.

Beweis. 1. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Klassen der Größen A, B, C, \dots . Wenn nun $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$ ist, so ist auch $\alpha + \beta < n$, folglich ist das Enflach $\overset{P}{[AB]}$ (nach 133) ein fortschreitendes. Ebenso ist $\alpha + \beta + \gamma < n$, also das Enflach der zwei Größen $\overset{P}{[AB]}$ und C ein fortschreitendes, u. f. w. Endlich ist auch $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$, also auch das Enflach der zwei Größen $\overset{P}{[ABC \dots L]}$ und M , da die Stufe von $\overset{P}{[ABC \dots L]}$ (nach 146) gleich $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ ist, ein fortschreitendes. Ebenso folgt das Umgekehrte, dass, wenn $\overset{P}{[ABC \dots LM]}$ ein rein fortschreitendes Flach ist, dann auch $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$ sein muss.

2. Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \geq n(m-1)$ ist, so folgt: $(n-\alpha) + (n-\beta) + (n-\gamma) + \dots + (n-\lambda) + (n-\mu) \leq n$, da m die Anzahl der Größen A, B, C, \dots, L, M ist. Da nun $n-\alpha$ die Klasse der Ergänzung von A , d. h. die Klasse von \bar{A} ist u. f. w., so ist das Flach

$$\overset{P}{[\bar{A}\bar{B}\bar{C} \dots \bar{L}\bar{M}]}$$

nach Beweis 1 ein rein fortschreitendes, folglich (nach 165) $\overset{P}{[ABC \dots LM]}$ ein rein rückschreitendes.

Satz. Die Klasse eines rein fortschreitenden Enflaches ist 0, 167. wenn die Summe der Klassen seiner Fache oder Faktoren gleich der Stufe n des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Klasse jenes Enflaches gleich der Summe der Klassen seiner Fache oder Faktoren. Die Klasse eines rein rückschreitenden Enflaches ist $= \sigma - (m-1)n$, wenn σ die Summe der Klassen seiner Fache und m die Anzahl dieser Fache ist.

Beweis. Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 145 bewiesen. Ist nun das Enflach $\overset{P}{[ABC \dots LM]}$ ein rein fortschreitendes und sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$ die Klassen von A, B, C, \dots, L, M , so ist die von $\overset{P}{[AB]} = \alpha + \beta$, die also von $\overset{P}{[ABC]} = \alpha + \beta + \gamma$ u. f. w.; also die von $\overset{P}{[ABC \dots L]} = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$. Ist nun $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu < n$, so ist nach demselben Satze (145) die Klasse von $\overset{P}{[ABC \dots LM]} = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu$, wenn aber $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu = n$ ist, so ist sie nach demselben Satze null. Ist zweitens das Modellflach $\overset{P}{[ABC \dots LM]}$ ein rein rückschreitendes, so

ist nach dem angeführten Satze die Klasse von $\overset{n}{[AB]}$ gleich $\alpha + \beta - n$, also die von $\overset{n}{[ABC]}$ gleich $\alpha + \beta - n$, also die von $\overset{n}{[ABC]}$ gleich $\alpha + \beta + \gamma - 2n$ u. f. w., also wenn m die Anzahl der Fache von $\overset{n}{[ABC \dots LM]}$ ist, die Stufenzahl dieses Flaches $= \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu - (m - 1)n$.

168. **Satz.** Das Gebiet eines rein fortschreitenden Enflaches ist gleich dem die sämtlichen Fache deselben verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem für die sämtlichen Fache deselben gemeinschaftlichen Gebiete, sofern in beiden Fällen das Enflach nicht null ist.

Beweis. 1. Es sei $\overset{n}{[AB \dots]}$ ein rein fortschreitendes Flach und $A = \overset{n}{[a_1 \dots a_q]}$, $B = \overset{n}{[b_1 \dots b_r]}$, u. f. w., wo a_1, \dots, a_q , b_1, \dots, b_r , u. f. w. Größen erster Klasse sind, dann ist also

$$\overset{n}{[AB \dots]} = \overset{n}{[(a_1 \dots a_q)(b_1 \dots b_r) \dots]}.$$

In dem fortschreitenden Fläche kann man nun (nach 116) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck $= \overset{n}{[a_1 \dots a_q b_1 \dots b_r \dots]}$.

Das Gebiet des Enflaches ist also nach 108 das aus den einfachen Größen a_1, \dots, a_q , b_1, \dots, b_r, \dots ableitbare Gebiet. Ebenso ist das Gebiet von A das aus a_1, \dots, a_q ableitbare Gebiet u. f. w. und nach 30 ist das aus den Größen zweier oder mehrer Gebiete A, B, \dots ableitbare Gebiet, oder die Summe dieser Gebiete das diese verbindende Gebiet, also ist das Gebiet des fortschreitenden Flaches $\overset{n}{[AB \dots]}$ das die Fache oder Faktoren A, B, \dots verbindende Gebiet.

2. Es sei $\overset{n}{[AB]}$ ein rein rückschreitendes Enflach ungleich null, also die Summe der Stufenzahlen α und β der Fache A und B grösser als n , dann haben A und B ein Gebiet $\alpha + \beta - n$ ter Stufe gemein; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil sonst (nach 158) das Flach null sein würde. Also lassen sich A und B auf ein gemeinschaftliches Fach D von $\alpha + \beta - n$ ter Stufe von der Art bringen, dass $A = DF$, $B = DG$ und D, F, G einfache Größen sind; dann ist nach 156,₁

$$\overset{n}{[AB]} = \overset{n}{[DF(DG)]} = \overset{n}{[DFG \cdot D]}.$$

Hier ist $\overset{n}{[DFG]}$ eine von Null verschiedene Zahl, also ist das Gebiet von $\overset{n}{[AB]} \equiv D$ gleich dem den Fachen A und B gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Fach C hinzu, so wird ganz in gleicher Weise das Gebiet von

$$\overline{\overline{[ABC]}} \equiv \overline{\overline{[DC]}} \equiv E,$$

wenn E das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, also das dem A, B, C gemeinschaftliche u. f. w.

Satz. In einem reinen Enfläche kann man Klammern beliebig 169. setzen und weglassen, d. h. es ist

$$\overline{\overline{[A(BC)]}} = \overline{\overline{[ABC]}},$$

wenn $\overline{\overline{[ABC]}}$ ein reines Enfläche ist.

Beweis. 1. In dem rein fortschreitenden Fläche kann man nach 116 die Klammern beliebig setzen oder weglassen.

2. Wenn das Enfläche $\overline{\overline{[ABC]}}$ ein rein rückschreitendes ist, so ist nach 165 das Enfläche $\overline{\overline{[A\overline{B}\overline{C}]}}$ ein rein fortschreitendes, also nach Beweis 1

$$\overline{\overline{[A(\overline{B}\overline{C})]}} = \overline{\overline{[A\overline{B}\overline{C}]}},$$

d. h. nach 151

$$\overline{\overline{[A(BC)]}} = \overline{\overline{[ABC]}}.$$

Satz. Ein reines Enfläche verändert seinen Wert nicht, wenn 170. man seine Fläche in lauter Fläche erster bezüglich $(n - 1)$ ter Klasse auflöst, je nachdem das gegebene Enfläche fortschreitend oder rückschreitend war. Das fortschreitende Enfläche bleibt auch in Bezug auf diese neuen Fläche fortschreitend und ebenso das rückschreitende Enfläche bleibt auch in Bezug auf die neuen Fläche rückschreitend oder

$$\text{Wenn } P = \overline{\overline{[AB \dots G]}}$$

ein reines Enfläche der Fläche A, B, ... G ist, und

$A = \overline{\overline{[a_1 \dots a_q]}}$, $B = \overline{\overline{[a_{q+1} \dots a_r]}}$ u. f. w., $G = \overline{\overline{[a_{s+1} \dots a_t]}}$ und $a_1 \dots a_t$ Größen erster oder $(n - 1)$ ter Klasse sind, je nachdem das Enfläche $\overline{\overline{[AB \dots G]}}$ ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist, so ist auch

$$P = \overline{\overline{[a_1 a_2 \dots a_t]}}$$

und zwar ist auch dies Enfläche ein rein fortschreitendes oder rückschreitendes, je nachdem das gegebene Enfläche $\overline{\overline{[AB \dots G]}}$ es war.

Beweis. Es sei das Enfläche $\overline{\overline{[AB \dots G]}}$ ein rein fortschreitendes, so ist die Summe der Klassen von A, B, ... G, d. h. t, kleiner als n, somit bleibt es auch nach 166 ein rein fortschreitendes in Bezug auf die Fläche $a_1 \dots a_t$, wenn man $\overline{\overline{[a_1 \dots a_q]}}$ statt A setzt u. f. w., mithin

kann man nach 169 die Klammern weglassen und erhält $P = [a_1 a_2 \dots a_n]$. Wenn aber $[AB \dots G]$ ein rein rückschreitendes Enflach ist, so wird $[\overline{A} \overline{B} \dots \overline{G}]$ nach 165 ein rein fortschreitendes, und wenn $A = [a_1 \dots a_n]$ ist u. f. w., und a_1, \dots, a_n Größen $(n-1)$ ter Klasse sind, so ist $\overline{A} = [\overline{a_1} \dots \overline{a_n}]$ u. f. w., wo $\overline{a_1} \dots \overline{a_n}$ Größen erster Klasse sind, somit nach Beweis 1

$$[\overline{A} \overline{B} \dots \overline{G}] = [\overline{a_1} \dots \overline{a_n}].$$

Mithin nach 151 auch

$$[AB \dots G] = [a_1 \dots a_n],$$

und dies nach 165 ein rein rückschreitendes Enflach.

171. **Satz.** Wenn α, β, \dots Klassen der Fache eines reinen Enflaches P und φ die Klasse des Enflaches, ferner δ die Stufenzahl des verbindenden, γ die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, so ist

1) wenn das Enflach P ein fortschreitendes ist, P dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse δ , wenn

$$\delta = \alpha + \beta + \dots,$$

2) wenn das Enflach P ein rückschreitendes ist, so ist P dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse γ , wenn

$$\gamma = \alpha + \beta + \dots - (m-1)n \text{ ist.}$$

Beweis. 1. Wenn das Enflach P ein fortschreitendes ist, so kann man die Fache oder Faktoren nach 170 in lauter Fache erster Klasse auflösen; die Anzahl dieser Fache erster Klasse ist nach 109 gleich $\alpha + \beta + \dots$; das Flach dieser Fache ist nach 93 und 92 dann und nur dann von Null verschieden, wenn die Fache erster Klasse gegenseitig frei sind, d. h. nach 21 wenn das verbindende Gebiet von $(\alpha + \beta + \dots)$ ter Stufe, also $\delta = \alpha + \beta + \dots$ ist. Dann ist die Klasse des Flaches nach $109 = \alpha + \beta + \dots$, d. h. $= \delta$.

2. Wenn das Enflach P ein rückschreitendes ist, so gilt der Satz zunächst für zwei Fache. Denn nach 158 ist P dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\gamma = \alpha + \beta - n$, und nach 145 ist auch $\varphi = \alpha + \beta - n$, das heist $\varphi = \gamma$. Mithin gilt der Satz für zwei Fache. Durch wiederholte Anwendung erhält man daraus den Satz für beliebige viele Fache.

172. **Satz.** Ein reines Enflach bleibt sich selbst deckend, wenn man die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändert, d. h. $P_{A,B} \equiv P_{B,A}$.

Beweis. 1. Es sei zuerst das Enflach $[AB]$ ein fortschreitendes, so ist nach 89

$${}^n[AB] = (-1)^{\alpha\beta} {}^n[BA], \text{ mithin } {}^n[AB] \equiv {}^n[BA].$$

Sei dagegen das Enflach ${}^n[AB]$ ein rückschreitendes, so ist ${}^n[\overline{AB}]$ nach 165 ein fortschreitendes Enflach und da $n - \alpha$ und $n - \beta$ die Klassen von \overline{A} und \overline{B} sind

$${}^n[\overline{AB}] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)} {}^n[\overline{BA}],$$

folglich nach 151

$${}^n[AB] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)} {}^n[BA], \text{ mithin auch } {}^n[AB] \equiv {}^n[BA].$$

2. Es sei ferner das Enflach ${}^n[PAB]$, wo A und B zwei auf einander folgende Fache sind, ein reines, so ist

$${}^n[PAB] = {}^n[P(AB)] \quad (169)$$

$$\equiv {}^n[P(BA)] \quad (\text{nach } 172_{1,1})$$

$$= {}^n[PBA] \quad (169),$$

mithin ${}^n[PAB] \equiv {}^n[PBA]$.

3. Indem man nun zwei auf einander folgende Fache vertauscht, so kann man nach und nach jedes Fach auf jede beliebige Stelle bringen, also den Fachen jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Enflach sich deckend bleibt.

Satz. Wenn ein reines Enflach zwei Fache enthält, deren 173. Klasse nicht null ist, und deren eines dem andern untergeordnet ist, so ist das Enflach null, oder

Es ist $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Enflach und von den Größen A und B eine der andern untergeordnet ist.

Beweis. 1. Seien von den Größen A und B die eine der andern untergeordnet, etwa B dem A, so ist B das gemeinschaftliche Gebiet und A das verbindende, also ist das Enflach ${}^n[AB] = 0$, da die Stufe von $B > 0$, und die von $A < n$ ist nach 158

2. Wenn nun das Enflach $P_{A,B}$ zwei Fache A und B enthält, deren eines dem andern untergeordnet ist, so kann man nach 172 die Fache oder Faktoren so ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Flach sich selbst deckend bleibt. Dann kann man nach 169 diese beiden Fache in eine Klammer schliesen. Ihr Enflach ist null nach Beweis 1, mithin ist ein Fach oder Faktor von P null, also auch P selbst null.

Satz. Ein gemischtes Enflach dreier Größen ${}^n[ABC]$ ist dann 174. und nur dann null, wenn entweder ${}^n[AB] = 0$ ist, oder alle drei

Größen A, B, C von einem Gebiete von niederer als nter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als 0ter Stufe gemein haben.

Beweis. Es sei nach 166 $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$. Ferner sei $[AB] > 0$, und sei zuerst $\alpha + \beta > n$ etwa $= n + \zeta$, so lassen sich nach 135 A und B auf ein gemeinschaftliches Fach ζ ter Stufe Z bringen, so dass $A = ZA'$, $B = ZB'$ ist; dann ist

$$[AB] = [ZA'B'Z] \quad (156,1),$$

mithin da $[AB]$ nach der Annahme > 0 ist, so muss auch $[ZA'B'] > 0$ sein. Dann ist

$$[ABC] = [ZA'B'(ZC)]$$

also, da $[ZA'B']$ eine von Null verschiedene Zahl ist, so ist $[ABC]$ dann und nur dann null, wenn $[ZC]$ es ist. Die Stufe von $[ZC]$ aber ist $= \zeta + \gamma = \alpha + \beta - n + \gamma$, also $< n$, da $\alpha + \beta + \gamma < 2n$ ist. Also ist das Enflach $[ZC]$ nach 158 dann und nur dann null, wenn Z und C ein Fach von höherer als nullter Stufe gemein haben, d. h. (da Z das gemeinfame Fach von A und B ist) wenn A, B und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben.

Es sei zweitens $\alpha + \beta \leq n$, so ist $[AB]$ ein fortschreitendes Enflach, mithin, da $[AB]$ nach der Annahme > 0 ist, das Enflach $[ABC]$ nach 158 dann und nur dann null, wenn $[AB]$ und C, d. h. A, B und C, von einem Gebiete niederer als nter Stufe umfasst werden. Der Satz ist hiermit bewiesen.

175. **Satz.** Die Ordnung, in welcher man mit zwei einfachen Größen, deren eine der andern untergeordnet ist, fortschreitend modelt, ist gleichgültig für das Ergebnis, d. h.

$$[ABC] = [ACB], \text{ wo B dem C, bez. C dem B untergeordnet ist.}$$

Beweis. Wenn B von nullter Stufe, d. h. eine Zahl ist, so findet nach 4 die Gleichheit beider Seiten statt. Wenn die Enflache nicht gemischt sind, so sind beide Seiten nach 173 null, mithin ist der Satz nur noch zu erweisen für den Fall, dass das Enflach $[ABC]$ gemischt ist und zugleich B von höherer als nullter Stufe ist. Es ist für diesen Fall $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$, durch β von Null verschieden und zugleich $\beta \leq \gamma$, da B dem C untergeordnet. Wir nehmen zunächst an, A sei eine einfache Gröse; dann sind nur drei

Fälle möglich: entweder es ist $\alpha + \gamma < n$, oder es ist $\alpha + \gamma \geq n$ und dabei $\alpha + \beta \leq n$, oder es ist $\alpha + \beta > n$.

a. Es sei zunächst $\alpha + \gamma < n$, so werden die drei Größen A, B, C von einem Gebiete $\alpha + \gamma$ ter Stufe, also von einem Gebiete von niedriger als nter Stufe umfasst, da B dem C untergeordnet ist, somit sind nach 173 sowohl ${}^n[ABC]$ als ${}^n[ACB]$ null, also

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB].$$

b. Sei demnächst $\alpha + \gamma \geq n$ und $\alpha + \beta \leq n$, ersteres etwa $= n + \zeta$, wo ζ auch null sein kann, so müssen nach 135 sich A und C auf ein gemeinschaftliches Fach Z von ζ ter Stufe bringen lassen in der Art, dass $C = {}^n[ZC']$ ist, wo Z und C' einfache Größen sind und Z dem A untergeordnet ist. Dann ist C' von $(\gamma - \zeta)$ ter Stufe, also die Summe der Klassen von A und C' gleich $\alpha + \gamma - \zeta = n$, also ist nach 157

$${}^n[AC] = {}^n[A(ZC)] = {}^n[AC'Z], \text{ mithin}$$

$${}^n[ACB] = {}^n[AC'(ZB)]$$

Das Enflach ${}^n[ZB]$ ist hier ein fortschreitendes; denn es ist $\zeta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$, da ja das Enflach ein gemischtes sein sollte.

Sei nun zunächst ${}^n[ZB]$ null, so haben nach 158 Z und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da Z dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein; das Enflach ${}^n[AB]$ ist aber, da $\alpha + \beta \leq n$ ist, ein fortschreitendes, also ist es nach 158 null, mithin ist auch ${}^n[ABC] = 0$, ebenso wie ${}^n[ACB]$, und folglich beide einander gleich.

Sei dagegen ${}^n[ZB] \geq 0$, so ist, da Z und B beide dem C untergeordnet sind, auch ihr verbindendes Gebiet ${}^n[ZB]$ dem Gebiete von C untergeordnet, also kann C nach 117 in der Form ${}^n[ZBF]$ dargestellt werden, wo F wieder eine einfache GröÙe ist. Dann wird, da wir oben $C = ZC'$ setzten, $C' = BF$ gesetzt werden können, und man erhält:

$${}^n[ACB] = {}^n[AC'(ZB)] = {}^n[ABF(ZB)].$$

Ferner ist aber auch, da Z dem A untergeordnet, also auch ${}^n[ZB]$ dem ${}^n[AB]$ untergeordnet und ${}^n[ABF] = {}^n[AC']$ von nullter Klasse ist, wie dies oben bewiesen, auch:

$${}^n[ABC] = {}^n[AB(ZBF)] = {}^n[ABF(ZB)] \quad (\text{nach 157}).$$

Mithin ist $\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB]$.

c. Sei endlich $\alpha + \beta > n$, so find, da $\beta \leq \gamma$, auch $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$, also dann, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Klassen der Ergänzungen von A, B, C find,

$$\overset{n}{[}\overline{ABC}] = \overset{n}{[}\overline{ACB}] \quad (\text{nach } 175_{,,})$$

also nach 151

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB].$$

Also ist der Satz bewiesen, sofern A eine einfache GröÙe ist.

d. Sei endlich A eine zusammengesetzte GröÙe, so ist sie immer nach 108 eine Vielfachensumme von einfachen GröÙen. Es sei $A = \sum \alpha_a A_a$, wo alle A_a einfache GröÙen find, so ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \sum \alpha_a \overset{n}{[}A_a BC] \quad (73)$$

$$= \sum \alpha_a \overset{n}{[}A_a CB] \quad (\text{nach } 175_{,,})$$

$$= \overset{n}{[}ACB] \quad (73).$$

176. Satz. Wenn A, B, C drei einfache GröÙen find, so find die Enflächen $\overset{n}{[}ABC]$ und $\overset{n}{[}ACB]$ nur in folgenden Fällen deckend oder es ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB], \text{ nur dann,}$$

a) wenn $\alpha + \beta + \gamma \leq n$ ist, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^\beta \gamma \overset{n}{[}ACB],$$

b) wenn $\alpha + \beta + \gamma \geq 2n$ ist, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \overset{n}{[}ACB],$$

c) wenn $\overset{n}{[}ABC]$ ein gemischtes Enfläch ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als nter Stufe umfasst werden; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB] = 0,$$

d) wenn $\overset{n}{[}AB]$ und $\overset{n}{[}AC]$ null find, dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB] = 0,$$

e) wenn $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ ist und B und C entweder ein Gebiet von tter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete tter Stufe umfasst werden; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = (-1)^{(\beta - t)(\gamma - t)} \overset{n}{[}ACB],$$

f) wenn B dem C untergeordnet ist; dann ist

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB].$$

Beweis. a. Die erste Formel ist in 89 bewiesen.

b. Wenn $\alpha + \beta + \gamma \geq 2n$ ist, so ist $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) \leq n$, folglich, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Klassen der Ergänzungen von A, B, C sind, so ist in diesem Falle

$$\overset{n}{[\overline{A}\overline{B}\overline{C}]} = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)(n-\gamma)} \overset{n}{[\overline{A}\overline{C}\overline{B}]} \quad (\text{nach 176, a})$$

Also nach 151

$$\overset{n}{[ABC]} = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)(n-\gamma)} \overset{n}{[ACB]}.$$

Da in beiden Fällen $\alpha + \beta + \gamma$ entweder $\leq n$ oder $\geq 2n$ war, so bleibt nur der Fall übrig, wo $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ ist, also der Fall des gemischten Enflachs.

c. Angenommen zuerst $\overset{n}{[ABC]}$ sei null. Ein gemischtes Enflach $\overset{n}{[ABC]}$ ist nach 174 dann und nur dann null, wenn entweder $\overset{n}{[AB]} = 0$ ist, oder alle drei Größen A, B, C von einem Gebiete niedriger als nter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, so ist sowohl $\overset{n}{[ABC]}$ als $\overset{n}{[ACB]}$ null, und also $\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[ACB]} = 0$, somit Formel (c) bewiesen.

d. Wenn $\overset{n}{[AB]} = 0$ ist. Wenn hier $\overset{n}{[ABC]}$ mit $\overset{n}{[ACB]}$ deckend sein soll, so muss auch $\overset{n}{[ACB]}$ null sein, dies kann aber, da die beiden Fälle der Formel c ausgeschlossen sind, nicht anders geschehen als wenn auch $\overset{n}{[AC]} = 0$ ist, und es tritt also dann der Fall (d) ein. Es bleiben also nur noch die Fälle des von Null verschiedenen gemischten Enflaches übrig.

e. Da $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ ist, so können wir $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ setzen, wo $t > 0$ und $< n$ ist. Nun sind hier wie in 175 drei Fälle zu unterscheiden. Erstens der, wo die Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ beide kleiner als n sind. Dann ist, da $\overset{n}{[AB]}$ und $\overset{n}{[AC]}$ dann von Null verschiedene fortschreitende Enflache sind, $\alpha + \beta$ die Klasse von $\overset{n}{[AB]}$ und $\alpha + \gamma$ die von $\overset{n}{[AC]}$. Dann haben $\overset{n}{[AB]}$ und C nach 31 ein Fach oder einen Faktor von $\alpha + \beta + \gamma - n$ ter, d. h. tter Klasse gemein. Dieser sei Z, und sei $C = \overset{n}{[ZC']}$, so ist die Summe der Klassen von A, B, C' gleich n, also $\overset{n}{[ABC']}$ eine Zahl, und Z ist dem $\overset{n}{[AB]}$ untergeordnet. Mithin ist dann nach 157

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[AB(ZC')]} = \overset{n}{[ABC' \cdot Z]} \equiv Z.$$

Mithin muss, wenn $\overset{n}{[ABC]} \equiv \overset{n}{[ACB]}$ sein soll, auch $\overset{n}{[ACB]} \equiv Z$ sein, d. h. $\overset{n}{[AC]}$ und B müssen sich auf ein mit Z deckendes gemeinschaftliches Fach bringen lassen, d. h. auf das Fach Z selbst; mithin muss Z dem B untergeordnet sein, es war aber auch dem C untergeordnet, d. h. B und C lassen sich auf das gemeinschaftliche Fach tter Klasse Z bringen, oder sie haben ein Gebiet tter Stufe gemein. Es sei $B = \overset{n}{[ZF]}$, so ist

$$\overset{n}{[ABC]} = \overset{n}{[AB(ZC')]} = \overset{n}{[ABC'Z]} \quad (157)$$

$$= \overset{n}{[A(ZF)C'Z]} = \overset{n}{[AZFC'Z]} \quad (169)$$

$$\overset{n}{[ACB]} = \overset{n}{[AC(ZF)]} = \overset{n}{[ACFZ]} \quad (157)$$

$$= \overset{n}{[A(ZC')FZ]} = \overset{n}{[AZC'F \cdot Z]} \quad (169).$$

Da nun $C = \overset{n}{[ZC']}$ war, so ist C' von $(\gamma - t)$ ter Klasse, und da $B = \overset{n}{[ZF]}$ war, so ist F von $(\beta - t)$ ter Klasse, mithin

$$\overset{n}{[AZFC'Z]} = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} \overset{n}{[AZC'FZ]} \quad (89),$$

also

$$\overset{n}{[ABC]} = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} \overset{n}{[ACB]},$$

d. h. es ergibt sich der erste Teil der Formel e.

Seien hingegen die beiden Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ grösser als n, so sind die Summen $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma)$ kleiner als n, und $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) = n + (n - t)$. Folglich sind in diesem Falle (nach dem ersten Teile der Formel e) die Enfläche $\overset{n}{[A\bar{B}\bar{C}]}$ und $\overset{n}{[A\bar{C}\bar{B}]}$ nur dann einander deckend, wenn sich \bar{B} und \bar{C} auf ein gemeinschaftliches Fach von $(n - t)$ ter Klasse bringen lassen. Dieses sei \bar{Z} und sei $\bar{B} = \overset{n}{[\bar{Z}\bar{F}]}$, $\bar{C} = \overset{n}{[\bar{Z}\bar{C}]}$, so ist (nach dem ersten Teile von e)

$$\overset{n}{[A\bar{B}\bar{C}]} = (-1)^{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \overset{n}{[A\bar{C}\bar{B}]}.$$

Aber nach 147 ist dann

$$B = \overset{n}{[ZF]}, \quad C = \overset{n}{[ZC']}$$

$$\overset{n}{[ABC]} = (-1)^{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \overset{n}{[ACB]} = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} \overset{n}{[ACB]},$$

d. h. es ist der zweite Teil der Formel (e) bewiesen, auch werden dann B und C beide (da das Flach $B = \overset{n}{[ZF]}$ ist und zugleich B von geringerer Stufe als Z ist, mithin als rückschreitendes Enflach erscheint,

und ebenso $C = \overset{n}{[}ZC']$, und also B und C beide dem Z untergeordnet find) von dem Gebiete Z umfasst.

f. Es bleibt somit nur noch der Fall übrig, wo von den Summen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma$ die eine, etwa die erstere, ebenso gros oder kleiner, die andere ebenso gros oder grösser als n ist. Dann lassen sich nach 31 $\overset{n}{[}AB]$ und C auf ein gemeinschaftliches Fach $\alpha + \beta + \gamma - n$ ter, d. h. tter Klasse bringen. Dieses sei Z, und sei $C = \overset{n}{[}ZC']$ (wo C' von nullter Klasse, wenn $\alpha + \beta = n$ ist), so wird

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}AB(ZC')] = \overset{n}{[}ABC'Z] \quad (157).$$

Ferner sei $\alpha + \gamma = n + u$, so haben A und C ein Fach von uter Klasse gemein, dieses sei F, und sei $C = \overset{n}{[}FG]$, so ist

$$\overset{n}{[}AC] = \overset{n}{[}A(FG)] = \overset{n}{[}AGF] \quad (157).$$

Also

$$\overset{n}{[}ACB] = \overset{n}{[}AGFB] = \overset{n}{[}AG(BF)].$$

Soll also $\overset{n}{[}ABC] \equiv \overset{n}{[}ACB]$ sein, so muss, da $\overset{n}{[}ABC']$ und $\overset{n}{[}AG]$ von Null verschiedene Zahlen sind, $Z \equiv \overset{n}{[}BF]$ sein, d. h. es muss B dem Z untergeordnet sein, aber auch Z ist dem C untergeordnet, mithin auch B dem C. Dies aber ist die Bedingung der Formel (f) und nach 175 ist dann

$$\overset{n}{[}ABC] = \overset{n}{[}ACB].$$

Der Satz ist mithin vollständig in allen Teilen bewiesen.

Satz. Wenn A, B, C drei einfache Grössen sind, so sind die 177. Enfläche $\overset{n}{[}BAC]$ und $\overset{n}{[}B(AC)]$ nur in folgenden Fällen deckend, d. h. es ist

$$\overset{n}{[}BAC] \equiv \overset{n}{[}B(AC)] \text{ nur dann,}$$

a. b. wenn beide Enfläche reine sind, d. h. wenn $\alpha + \beta + \gamma \leq n$ oder $\geq 2n$, dann ist $\overset{n}{[}BAC] = \overset{n}{[}B(AC)]$,

c. d. wenn $\overset{n}{[}AB]$ und $\overset{n}{[}AC]$ null sind, oder wenn $\overset{n}{[}BAC]$ ein gemischtes Modellfläch ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem niederen Gebiete als nter Stufe umfasst werden, so ist

$$\overset{n}{[}BAC] = \overset{n}{[}B(AC)] = 0,$$

e. wenn $\alpha + \beta + \gamma = n + t$ und B und C entweder ein Gebiet

von t ter Stufe gemein haben, oder von einem Gebiete t ter Stufe umfasst werden, so ist, sofern $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma < n$ sind,

$$[BAC] = (-1)^{\alpha} [B(AC)],$$

sofern dagegen $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$ sind, so ist

$$[BAC] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)} [B(AC)],$$

f. wenn B und C eine der andern untergeordnet ist, so ist, sofern $\alpha + \beta < n$ und $\alpha + \gamma \geq n$ ist,

$$[BAC] = (-1)^{\beta(n-\gamma)} [B(AC)], \text{ ferner}$$

sofern $\alpha + \beta > n$ und $\alpha + \gamma \leq n$ ist,

$$[BAC] = (-1)^{(n-\beta)\gamma} [B(AC)], \text{ ferner}$$

sofern zugleich $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$ oder zugleich $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma < n$ sind,

$$[BAC] = [B(AC)] = 0.$$

Beweis. Es ist in allen diesen Fällen

$$[BAC] \equiv [ABC] \quad (\text{nach 89})$$

$$\equiv [ACB] \quad (\text{nach 175})$$

$$\equiv [B(AC)] \quad (\text{nach 89}).$$

Die Formel a. und b. folgt unmittelbar aus 169. Die Formel c. und d. folgt unmittelbar, da $[AC] = 0$ ist und da $[BA] = \pm [AB] = 0$ ist u. s. w., siehe 176.

178. **Satz.** Ein Enflach nullter Klasse bleibt sich selbst deckend, wenn man die Ordnung aller seiner Fache umkehrt, oder die letzten Fache in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung in Klammern schließt, d. h.

$$\begin{aligned} [A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n] &\equiv [A_n (A_{n-1} \dots (A_2 A_1))] \\ &\equiv [A_1 \dots A_{n-r-1} \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_{n-r}))]. \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen

$$[A_1 A_2 \dots A_{n-2}] = P,$$

dann ist

$$[A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n] = [P A_{n-1} A_n].$$

Da das Enflach von nullter Klasse fein soll, so muss die Summe der Klassen von P, A_{n-1} , A_n nach 146 durch n teilbar sein, also, da die einzelnen Klassen > 0 und $< n$ sind, entweder gleich n oder gleich $2n$ sein; im erstern Falle ist das Enflach der drei Größen

P, A_{n-1}, A_n ein rein fortschreitendes, im letztern ein rein rück schreitendes, in beiden also ein reines, somit nach 177

$$[PA_{n-1}A_n] \equiv [P \cdot (A_n A_{n-1})],$$

oder

$$[A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n] \equiv [A_1 \dots A_{n-2} \cdot (A_n A_{n-1})].$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als ein Enflach der drei Größen

$[A_1 \dots A_{n-3}], A_{n-2}$ und $[A_n A_{n-1}]$, so erhalten wir auf gleiche Weise

$$[A_1 \dots A_{n-3} \cdot A_{n-2} \cdot A_n A_{n-1}] \equiv [A_1 \dots A_{n-3} \cdot (A_n (A_{n-1} A_{n-2}))].$$

Wendet man dies Verfahren rmal an, so erhält man

$$[A_1 \dots A_n] \equiv [A_1 \dots A_{n-r-1} \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_{n-r}))],$$

d. h. das Enflach bleibt sich selbst deckend, wenn man die letzten Fache in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung in Klammern schließt. Hiernach wird nun auch

$$[A_1 A_2 \dots A_n] \equiv [A_1 \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_2))],$$

somit nach 89

$$\equiv [A_n (A_{n-1} \dots (A_2 A_1))],$$

also ist auch der erste Teil des Satzes bewiesen.

12. Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet.

Erklärung. Wenn C im Hauptgebiete nter Stufe eine Viel- 179.
fachenfumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) zu
irgend einer Klasse, $A_1 \dots A_n$, aus den n freien Größen erster bez.
($n-1$)ter Klasse, a_1, \dots, a_n ist, d. h. wenn

$$C = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$$

und wenn C_1 die entsprechende Vielfachenfumme der Geschiedsfläche
zu derselben Klasse $A_1 \dots A_r$ aus m derselben freien Größen, etwa
aus a_1, \dots, a_m ist, d. h. wenn

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r,$$

so heist C_1 die Zurückleitung der Größe C auf das Gebiet

$[a_1 \dots a_m]$ unter Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \dots a_n]$.

Die Zurückleitung heist eine fortschreitende, wenn die
Größen $a_1 \dots a_n$ erster Klasse, sie heist eine rückschreitende,
wenn die Größen $a_1 \dots a_n$ Größen ($n-1$)ter Klasse sind.

Die Zurückleitungen mehrerer Größen heissen in demselben Sinne
genommen, wenn sie auf dasselbe Gebiet und unter Ausschluss des-
selben Gebietes zurückgeleitet sind.

Als Beispiel für diese Zurückleitungen nehmen wir den Raum, der, wie wir sahen, wenn wir von Punkten ausgehen, ein Hauptgebiet vierter Stufe ist. Es seien a, b, c, d vier gegenseitig freie Größen erster Stufe, d. h. vier nicht in ein und derselben Ebene liegende Punkte, so ist $C_1 = [bc] + [ca] + [ab]$ die fortschreitende Zurückleitung von $C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$ auf das Gebiet oder auf die Ebene $[abc]$, unter Ausschluss des Gebietes d . Bezeichnen wir ferner $[bcd]$ mit a' , $[cad]$ mit b' , $[abd]$ mit c' und $[acb]$ mit d' , so sind a', b', c', d' Größen $(n-1)$ ter Stufe, da $n=4$ ist und setzen wir noch $[abcd]=1$, so ist $[b'c'] = [cad \cdot abd] = [abcd][ad] = [ad]$, $[c'a'] = [bd]$, $[a'b'] = [cd]$, $[a'd'] = [bc]$, $[b'd'] = [ca]$, $[c'd'] = [ab]$, und es wird

$$C = [a'd'] + [b'd'] + [c'd'] + [b'c'] + [c'a'] + [a'b'].$$

Dann wird, wenn

$$C' = [b'c'] + [c'a'] + [a'b']$$

ist, C' die rückschreitende Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a'b'c']$, unter Ausschluss des Gebietes d' , sein, d. h., da $[a'b'c'] = [cd \cdot abd] \equiv d$, und $d' \equiv [abc]$ ist, dann ist C' die Zurückleitung von C auf das Gebiet d , unter Ausschluss des Gebietes $[abc]$, d. h. es ist C' im Raume die Zurückleitung einer Linie auf einen Punkt als rückschreitende Zurückleitung. Die Zurückleitung selbst ist in der Raumlehre gleichbedeutend mit der Beschattung oder Projektion im weitesten und eigentlichsten Sinne des Wortes.

180. **Satz.** Wenn die Stufe m des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, grösser ist, als die Klasse p der zurückgeleiteten Grösse, so ist die Zurückleitung fortschreitend, wenn dagegen die erstere Stufe m kleiner ist als p , so ist die Zurückleitung rückschreitend; wenn die Stufe und die Klasse gleich sind, so kann die Zurückleitung sowohl fortschreitend als rückschreitend sein.

Beweis. Es seien $a_1 \dots a_n$ gegenseitig freie Größen erster Klasse und seien $A_1, \dots A_n$ die Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_n$ zur p ten Klasse, und $A_1, \dots A_r$ die Geschiedsfläche zur p ten Klasse aus $a_1 \dots a_m$ und sei

$$C = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n$$

$$C_1 = a_1 A_1 + \dots + a_r A_r,$$

also nach 179 sei C_1 die fortschreitende Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet $[a_1 \dots a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \dots a_n]$, so würde es, wenn $m < p$ wäre, gar keine Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_m$ zur p ten Klasse geben, also auch keine fortschreitende Zurückleitung. Es muss also für die fortschreitende Zurückleitung

$m \geq p$ sein, d. h. es muss die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gros oder grösser sein als die Klasse der zurückgeleiteten Grösse.

Macht man dieselben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass a_1, \dots, a_n in dem Hauptgebiete n ter Stufe Grössen $(n-1)$ ter Klasse sind, so ist die Zurückleitung eine rückschreitende; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher, $m \geq p$ sein. Aber hier ist nach 130 die Stufenzahl von $[a_1 \dots a_m]$ gleich $n-m$ und die von C gleich $n-p$, somit muss, da $m \geq p$ ist, auch $n-m \leq n-p$ sein, d. h. die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, wird ebenso gros oder kleiner als die Klasse der zurückgeleiteten Grösse, d. h. es gilt der Satz.

Satz. Die Zurückleitung A' einer Grösse A auf ein Gebiet B , 181. unter Ausschluss des Gebietes C , ist

$$A' = \frac{[B(AC)]}{[BC]}, \text{ und es ist } A' = [B(AC)], \text{ wenn } [BC] = 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Es seien $a_1 \dots a_n$ n gegenseitig freie Grössen erster oder $(n-1)$ ter Klasse, und $A_1 \dots A_n$ die Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_n$, und $A_1 \dots A_r$ die aus $a_1 \dots a_m$ und $A = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n$, mithin $A' = a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$, und sei $[a_1 \dots a_m] = B$, $[a_{m+1} \dots a_n] = C$, so ist

$[AC] = [(a_1 A_1 + \dots + a_r A_r + a_{r+1} A_{r+1} + \dots + a_n A_n)C]$; aber da A_1, \dots, A_r die Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_m$ sind, und da A_{r+1}, \dots, A_n diejenigen Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_n$ sind, welche nicht zugleich Geschiedsfläche aus $a_1 \dots a_m$ sind, so muss jede der Grössen A_{r+1}, \dots, A_n mindestens eins der Fache oder Faktoren $a_{m+1} \dots a_n$ enthalten, also mindestens ein Fach mit $C = [a_{m+1} \dots a_n]$ gemein haben. Die Fläche $[A_{r+1}C], \dots, [A_nC]$ sind aber in Bezug auf die Fache $a_1 \dots a_n$ nach 164 reine, mithin null, da sie gleiche Fache oder Faktoren enthalten, also wird

$$[AC] = [(a_1 A_1 + \dots + a_r A_r)C] = a_1 [A_1 C] + \dots + a_r [A_r C].$$

Also ist

$$[B(AC)] = a_1 [B(A_1 C)] + \dots + a_r [B(A_r C)].$$

Da nun jede der Grössen A_1, \dots, A_r aus Fachen oder Faktoren besteht, die in B enthalten sind, so ist jede derselben dem B unter-

geordnet, folglich, da auch die Summe der Klassen von B und C n beträgt, so ist $\overset{n}{[}BC]$ eine Zahl und ist nach 157

$$\overset{n}{[}B(A_1C)] = \overset{n}{[}BCA_1], \dots, \overset{n}{[}B(A_rC)] = \overset{n}{[}BCA_r],$$

also

$$\overset{n}{[}B(AC)] = \overset{n}{[}BC(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r)] = \overset{n}{[}BCA'].$$

Also, da $\overset{n}{[}BC]$ eine Zahl ist, so ist nach 4

$$A' = \frac{\overset{n}{[}B(AC)]}{\overset{n}{[}BC]}.$$

182. **Satz.** Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Größe nter Klasse sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller dieser Größen ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt; oder

Wenn $P = \alpha A + \beta B + \dots$ ist, wo α, β, \dots Zahlen sind und P', A', B', \dots die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von P, A, B, \dots sind, so ist auch $P' = \alpha A' + \beta B' + \dots$.

Beweis. Es sei L das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und M das ausgeschlossene Gebiet und $\overset{p}{[}LM] = 1$, so erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \dots,$$

wenn man sie mit M modelt

$$\overset{n}{[}PM] = \alpha \overset{n}{[}AM] + \beta \overset{n}{[}BM] + \dots$$

und wenn man diese mit L flacht

$$\overset{n}{[}L(PM)] = \alpha \overset{n}{[}L(AM)] + \beta \overset{n}{[}L(BM)] + \dots,$$

d. h. nach 181

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \dots$$

183. **Satz.** Die fortschreitende Zurückleitung eines rein fortschreitenden und die rückschreitende eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem Enflache der in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen der Fache oder Faktoren jenes Flaches, oder

Wenn das reine Enflach $P = \overset{p}{[}AB \dots E]$ ist, und $P', A', B', \dots E'$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von $P, A, B, \dots E$ sind (und zwar fortschreitende bezüglich rückschreitende, je nachdem das Flach fortschreitend oder rückschreitend ist), so ist auch

$$P' = \overset{p}{[}A'B' \dots E'].$$

Beweis. Es sei $A = \overset{n}{[}a_1 \dots a_n]$, $B = \overset{n}{[}a_{n+1} \dots a_1]$, \dots
 $E = \overset{n}{[}a_{t+1} \dots a_r]$, wo $a_1 \dots a_r$ Größen erster bezüglich $(n-1)$ ter

Klasse sind, je nachdem das Enflach $\overset{n}{[}AB \dots E]$ ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist. Dann ist

$$P = \overset{n}{[}a_1 \dots a_v]$$

ein reines Enflach von Größen erster oder $(n-1)$ ter Klasse. Ferner sei $L = \overset{n}{[}u_1 \dots u_l]$ das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, $M = \overset{n}{[}u_{l+1} \dots u_n]$ das ausgeschlossene Gebiet und $\overset{n}{[}LM] = 1$, wobei $u_1 \dots u_n$ Größen erster oder $(n-1)$ ter Klasse sind, je nachdem $a_1 \dots a_v$ es sind. Nun ist nach 181

$$P' = \overset{n}{[}L(PM)] \\ = \overset{n}{[}u_1 \dots u_l(a_1 \dots a_v \cdot u_{l+1} \dots u_n)].$$

Wenn nun das ursprüngliche Enflach $\overset{n}{[}AB \dots E]$ ein fortschreitendes ist, so soll auch die Zurückleitung eine fortschreitende sein, mithin nach 180 die Stufe von L eben so groß oder größer als die Klasse von P sein, d. h. $m \geq v$, folglich $v + n - m < n$, d. h. das Enflach $\overset{n}{[}a_1 \dots a_v \cdot u_{l+1} \dots u_n]$ ein rein fortschreitendes, also auch $= \overset{n}{[}a_1 \dots a_v u_{l+1} \dots u_n]$, und da alle Fache oder Faktoren von erster Klasse sind, nach 133 und 115 ein Einheitsflach. Die Größen $a_1 \dots a_v$ seien nun Vielfachensummen von $u_1 \dots u_m$ und sei $a_r = {}^r a_1 u_1 + \dots + {}^r a_l u_l$, so können wir in dem Enflache $\overset{n}{[}a_1 \dots a_v u_{l+1} \dots u_n]$ statt $a_r = {}^r a_1 u_1 + \dots + {}^r a_l u_l$ die Zurückleitung von a_r auf das Gebiet $L = \overset{n}{[}u_1 \dots u_l]$, mit Ausschluss des Gebietes $M = \overset{n}{[}u_{l+1} \dots u_n]$, d. h. $a'_r = {}^r a_1 u_1 + \dots + {}^r a_l u_l$ setzen, da $u_{l+1} \dots u_n$ bereits als Fache oder Faktoren in jenem Fläche vorkommen und $u_{l+1} \cdot u_{l+1} = u_n \cdot u_n = 0$ ist. Mithin wird

$$P' = \overset{n}{[}u_1 \dots u_l \cdot a'_1 \dots a'_v u_{l+1} \dots u_n].$$

Hier ist $a'_1 \dots a'_v$ dem $u_1 \dots u_l$ untergeordnet, also nach 157

$$P' = \overset{n}{[}u_1 \dots u_n] \cdot \overset{n}{[}a'_1 \dots a'_v] = \overset{n}{[}a'_1 \dots a'_v].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = \overset{n}{[}a'_1 \dots a'_h], B' = \overset{n}{[}a'_{h+1} \dots a'_l], \dots$$

$$E' = \overset{n}{[}a'_{l+1} \dots a'_v].$$

Mithin ist

$$P' = \overset{n}{[}A'B' \dots E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Enflach $\overset{n}{[}AB \dots E]$ ein rückschreitendes ist, und ebenso auch die Zurückleitung von P auf L , unter Ausschluss

von M , eine rückschreitende, so ist die Klasse von P kleiner oder ebensoviele als die Stufe von L , mithin kehrt sich das rückschreitende Flach und ebenso die rückschreitende Zurückleitung, wenn wir statt der Größen ihre Ergänzungen nehmen, nach 165 und 131 in das fortschreitende Flach und in die fortschreitende Zurückleitung um. Seien daher $P_1, Q_1, R_1, A_1, B_1, \dots E_1$ die Ergänzungen von $P, Q, R, A, B, \dots E$, und seien $P'_1, A'_1, B'_1, \dots E'_1$ die Zurückleitungen von $P_1, A_1, B_1, \dots E_1$ auf Q_1 , unter Ausschluss von R_1 , so ist nach 151

$$P_1 = [A_1 B_1 \dots E_1],$$

und nach Beweis 1

$$P'_1 = [A'_1 B'_1 \dots E'_1]. \quad (a)$$

Ferner ist nach 181

$$P' = [L(PM)], P'_1 = [L_1(P_1 M_1)] = [L(PM)] \quad (\text{nach } 148),$$

also $P'_1 = \bar{P}'$ und ebenso $A'_1 = \bar{A}', B'_1 = \bar{B}' \dots$, also (nach a)

$$\bar{P}' = [\bar{A}' \bar{B}' \dots \bar{E}'], \text{ mithin nach } 151$$

$$P' = [A' B' \dots E'].$$

3. Seien endlich $A, B, \dots E$ zusammengesetzte Größen und zwar

$$A = \alpha_r A_r, B = \beta_s B_s, \dots E = \varepsilon_v E_v,$$

wo $A_r, B_s, \dots E_v$ einfache Größen sind und seien $A'_r, B'_s, \dots E'_v$ die Zurückleitungen von $A_r, B_s, \dots E_v$, so ist

$$P = [\alpha_r A_r \beta_s B_s \dots \varepsilon_v E_v] = \alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v [A_r B_s \dots E_v]$$

$$= \alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v P_{r,s,\dots,v}, \text{ wenn } P_{r,s,\dots,v} = [A_r B_s \dots E_v] \text{ ist.}$$

Also nach 182

$$P' = \alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v P'_{r,s,\dots,v} = \alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v [A'_r B'_s \dots E'_v]$$

nach Beweis 1 und 2; und also nach 75

$$P' = [\alpha_r A'_r \beta_s B'_s \dots \varepsilon_v E'_v], \text{ mithin nach } 182$$

$$= [A' B' \dots E'].$$

184. Satz. Das reine Enflach von Größen erster Klasse oder von Größen $(n-1)$ ter Klasse in einem Hauptgebiete n ter Stufe ist ein Einheitsflach dieser Größen.

Beweis. Das reine Enflach von Größen erster Klasse ist nach 164 und 133 ein fortschreitendes, also nach 133 und nach 115 auch ein Einheitsflach, mithin ist auch das reine Enflach von beliebigen Größen erster Klasse ein Einheitsflach dieser Größen. Ebenso ist auch das reine Enflach von Größen $(n-1)$ ter Klasse ein Einheitsflach dieser

Größen, denn nach 151 ist es genau denselben Gesetzen unterworfen wie das Flach von Größen erster Klasse.

Satz. Eine Gleichung, deren Glieder Größen m ter Klasse sind, 185. wird, wenn n die Stufe des Hauptgebietes ist, durch so viel Zahlgleichungen ersetzt, als es Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus n Einfachen oder Elementen zur m ten Klasse giebt, und zwar erhält man einen ersetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den Geschiedsflächen (multiplikativen Kombinationen) zur $(n - m)$ ten Klasse aus einer beliebigen Schar von n Größen erster Klasse, deren Enflach 1 ist, flacht.

Beweis. Die gegebene Gleichung sei

$$P = A + B + \dots$$

wo P, A, B, \dots Größen m ter Klasse; es seien ferner e_1, \dots, e_n Größen erster Klasse, deren Enflach $[e_1 \dots e_n] = 1$ ist, und seien E_1, E_2, \dots, E_v die Geschiedsfläche zur m ten Klasse aus e_1, \dots, e_n , und F_1, F_2, \dots, F_v die ergänzenden Geschiedsfläche, d. h. die Geschiedsfläche aus denselben Einheiten zur $(n - m)$ ten Klasse und zwar so geordnet, dass $[E_1 F_1] = [E_2 F_2] = \dots = [E_v F_v] = 1$ sei, so muss bewiesen werden, dass die obige Gleichung durch den Verein von Gleichungen ersetzt wird.

$$[PF_a] = [AF_a] + [BF_a] + \dots$$

wo a die Werte von 1 bis v erhält. Nach 108 sind die Größen P, A, B, \dots Vielfachensummen von $E_1 \dots E_v$. Nun sei

$$P = \pi_1 E_1 + \dots + \pi_v E_v, \quad A = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_v E_v, \\ B = \beta_1 E_1 + \dots + \beta_v E_v, \dots$$

so ist

$$[PF_a] = [S\pi_s E_s F_a] = S\pi_s [E_s F_a].$$

Aber da E_s und F_a , wenn $s \geq r$ ist, notwendig gleiche Einheiten (e_1, \dots, e_n) als Fache oder Faktoren enthalten, so ist für diesen Fall $[E_s F_a] = 0$, also

$$[PF_a] = \pi_a [E_a F_a] = \pi_a$$

Aus gleichem Grunde ist

$$[AF_a] = \alpha_a, \quad [BF_a] = \beta_a, \dots$$

Gilt nun die Gleichung $P = A + B + \dots$, so gilt auch die aus ihr durch Modlung hervorgegangene Gleichungsgruppe

$$[PF_a] = [AF_a] + [BF_a] + \dots$$

Gilt umgekehrt die letztere, so hat man für jedes a von $1 \dots v$, wenn man für ${}^{\text{P}}\text{PF}_a$, ${}^{\text{P}}\text{AF}_a$, ${}^{\text{P}}\text{BF}_a, \dots$ die gefundenen Werte setzt,

$$\pi_a = \alpha_a + \beta_a + \dots, \text{ also auch } \pi_a E_a = \alpha_a E_a + \beta_a E_a + \dots$$

für jedes a von 1 bis v . Addirt man diese sämtlichen Gleichungen, so erhält man

$$S\pi_a E_a = S\alpha_a E_a + S\beta_a E_a + \dots,$$

d. h.

$$P = A + B + \dots$$

Somit ersetzen sich die Gleichung $P = A + B + \dots$ und der Gleichungsverein ${}^{\text{P}}\text{PF}_a = {}^{\text{P}}\text{AF}_a + {}^{\text{P}}\text{BF}_a + \dots$ gegenseitig und ist der Satz also bewiesen.

Befonders ist der Fall hervorzuheben, wenn $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots$ ist, dann ist

$${}^{\text{P}}\text{AF}_r = \alpha_r,$$

d. h. ${}^{\text{P}}\text{AF}_1 = \alpha_1, {}^{\text{P}}\text{AF}_2 = \alpha_2, \dots$

Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

Einleitung. Wir haben in Satz 77 die innere Webung die Art der Webung oder Multiplikation genannt, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedenen Einheiten null, das Zeug oder Produkt zweier gleichen Einheiten eins ist, d. h. für welche

$$E_a \cdot E_b = 0 \quad \text{und} \quad E_a \cdot E_a = E_b \cdot E_b = 1 \quad \text{ist.}$$

Dieselben Formeln gelten aber auch, wenn man, statt zwei Einheiten innerlich zu verweben, das Enflach aus einer Einheit und der Ergänzung einer Einheit nimmt; denn wie wir in Satz 186 sehen werden, gelten für die Enflache von Einheiten gleicher Klasse die Formeln

$$[E_a \bar{E}_b] = 0 \quad \text{und nach 128 auch} \quad [E_a \bar{E}_a] = [E_b \bar{E}_b] = 1$$

Wir werden also die innere Webung so erklären können, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Einheiten auf das Enflach einer Einheit in die Ergänzung der andern zurückgeführt wird und gelten dann für die innere Webung alle über die Enflache gewonnenen Sätze.

13. Die Grundgesetze der Innungslehre.

Erklärung. Das Innenzeug oder das innere Produkt 186. zweier Einheiten beliebiger Klassen ist das Enflach der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder

Wenn E und F Einheiten beliebiger Klassen sind, so ist

$[EF]$ das Innenzeug oder das innere Produkt der Einheiten E und F . Das Zeichen des Innenzeuges ist ein liegendes Kreuz, z. B. $E \times F$ gelesen Innenzeug EF .

Ich habe das innere Produkt ein Innenzeug genannt, weil es ganz eigentümliche, keinem andern Zeuge oder Produkte zukommende Eigenschaften besitzt

und daher auch einer eigenen Benennung bedarf, welche im Deutschen nicht durch ein vorgesetztes Adjektiv gewonnen werden kann.

Da diese Art der Multiplikation ganz eigentümliche Gesetze hat, so muss sie auch, wenn man vor Verwechslungen sicher sein soll, ihr eigentümliches Zeichen haben, welches ich hiermit einführe.

187. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier gleichen Einheiten ist eins, das zweier verschiedenen Einheiten gleicher Klasse ist null, oder $\overset{p}{[E_r \bar{E}_r]} = 1, \overset{p}{[E_r \bar{E}_s]} = 0$.

Beweis. Nach 128 ist $\overset{p}{[E_r \bar{E}_r]} = 1$. Nach 127 aber ist \bar{E}_s dem Fläche aller in dem Fläche E_s nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse gleich; da nun E_r von E_s verschieden ist und zugleich beide Fläche von einer gleichen Anzahl ursprünglicher Einheiten sind, so enthält E_r notwendig solche Einheiten als Fache oder Faktoren, welche in E_s fehlen, mithin in \bar{E}_s vorkommen; also ist $\overset{p}{[E_r \bar{E}_s]}$ nach 92 gleich Null.

188. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier Einheiten E und F ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern untergeordnet ist, oder

Es ist $\overset{p}{[EF]} = 0$, wenn von E und F nicht eine der andern untergeordnet; dagegen ist $\overset{p}{[EF]} > 0$, wenn von E und F eine der andern untergeordnet ist.

Beweis. Der Satz ist für Einheiten gleicher Klasse in 187 bewiesen. Wenn ferner E und F zwei Einheiten verschiedener Klasse sind, und zwar E von höherer Klasse als F ist, so setzen wir $F = \overset{p}{[E_1 G]}$, wo E_1 dem E untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Größe erster Klasse mit E gemein hat. Dann ist F dem E untergeordnet, sofern G von nullter Klasse, d. h. eine Zahl ist. Dagegen nicht dem E untergeordnet, wenn G von erster oder höherer Klasse ist. Es sei ferner $E = \overset{p}{[E_1 E_2]}$ und sei $\overset{p}{[E_1 G E_2 H]} = 1$ das Zeug aller n ursprünglichen Einheiten. Dann ist nach 139 das Flach $\overset{p}{[E_2 H]}$ die Ergänzung von $F = \overset{p}{[E_1 G]}$, d. h. $\bar{F} = \overset{p}{[E_1 G]} = \overset{p}{[E_2 H]}$, also

$$\overset{p}{[E\bar{F}]} = \overset{p}{[E_1 E_2 (\bar{E}_1 G)]} = \overset{p}{[E_1 E_2 (E_2 H)]}.$$

Wenn nun F dem E untergeordnet ist, so ist, wie oben gezeigt, G von nullter Klasse, mithin da $\overset{p}{[E_1 G E_2 H]} = 1$ auch $\overset{p}{[E_1 E_2 H]}$ von nullter Klasse, also nach 156, der Ausdruck $\overset{p}{[E\bar{F}]} = \overset{p}{[E_1 E_2 (E_2 H)]}$

$= [E_1 E_2 H \cdot E_2]$, wo E_1 und $[E_1 E_2 H]$ von Null verschieden sind, also auch das Zeug oder Produkt, d. h. $[EF] > 0$.

Wenn dagegen F dem E nicht untergeordnet ist, so ist G von erster oder höherer Klasse, und dann ist die Summe der Klassen von E_1 , E_2 und H geringer als die Summe der Klassen von E_1 , G , E_2 , H , d. h. kleiner als n , also nach 158 $[EF] = [E_1 E_2 \cdot E_2 H] = 0$.

Satz. Wenn E und F Einheiten sind und $[EF] > 0$, so ist 189.

$$[EFE] = F \text{ und } [F(EF)] = \bar{E}.$$

Beweis. Es sei $[EFG] = 1$ das Enflach aller Einheiten erster Klasse, so ist $\bar{E} = [FG]$, mithin nach 156,₂

$$\begin{aligned} [EFE] &= [EF(FG)] = [EFGF] \\ &= F. \end{aligned}$$

Ferner ist dann, da $[EFG] = 1$ auch $[EF] = G$, mithin $[F(EF)] = [FG] = \bar{E}$.

Satz. Wenn E , F , G Einheiten sind, und weder $[EF]$ noch 190. $[EG]$ null ist, so ist, wenn F von höherer Klasse ist als G

$$[EF(\bar{E}G)] = [FG],$$

wenn dagegen G von höherer Klasse ist als F , so ist $[F(\bar{E}G)] = [FG]$.

Sind F und G von gleicher Klasse, so sind beide Formeln gültig.

Beweis. Wenn von F und G nicht eine der andern untergeordnet ist, so sind auch $[EF]$ und $[EG]$ nicht eine der andern untergeordnet, also sind dann nach 188 beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

1. Wenn G dem F untergeordnet ist, so sei $F = [GH]$. Dann ist

$$[EF(\bar{E}G)] = [EGH(\bar{E}G)] = H \quad (189)$$

$$= [GH\bar{G}] \quad (189)$$

$$= [FG].$$

2. Wenn F dem G untergeordnet ist, so sei $G = [HF]$. Dann ist

$$[F(\bar{E}G)] = [F(\bar{E}HFE)] = \bar{H} \quad (189)$$

$$= [F(\bar{H}F)] \quad (189)$$

$$= [FG].$$

Wenn F und G von gleicher Klasse sind, und wenn dabei jede der andern untergeordnet ist, so müssen beide zusammenfallen, mithin ist nach 107 sowohl G dem F , als F dem G untergeordnet, und es gelten mithin beide Formeln.

191. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier beliebigen Größen ist gleich dem Einfache der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder

$$\text{Es ist } A \times B = \overset{n}{[AB]}.$$

Beweis. Es seien A_1, \dots, A_n die Einheiten, deren Vielfachen-summe A , und seien B_1, \dots, B_m die Einheiten, deren Vielfachen-summe B .

Es sei $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ und $B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_m B_m$, wo $A_1 \dots A_n$ die Einheiten, deren Vielfachen-summe A ist und ebenso $B_1 \dots B_m$ die Einheiten, deren Vielfachen-summe B ist und bezeichne $A \times B$ in diesem Satze das Innenzeug oder das innere Produkt, so ist $A \times B = (\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \dots + \beta_m B_m) = S \alpha_a \beta_b (A_a \times B_b)$ (74), wo sich die Summe auf die Werte $1, \dots, n$ für a und auf $1, \dots, m$ für b bezieht. Da nun A_a und B_b Einheiten sind, so ist nach 186 $A_a \times B_b = \overset{n}{[A_a \bar{B}_b]}$, mithin ist

$$A \times B = S \alpha_a \beta_b \overset{n}{[A_a \bar{B}_b]} = \overset{n}{[S \alpha_a A_a S \beta_b \bar{B}_b]} \quad (74)$$

$$= \overset{n}{[AS \beta_b \bar{B}_b]} = \overset{n}{[A \bar{(S \beta_b B_b)}]} \quad (150)$$

$$= \overset{n}{[AB]}.$$

192. **Satz.** Wenn α und β die Klassen von A und B sind und $\alpha < \beta$ ist, so ist

$$\overset{n}{[AB]} = (-1)^{\alpha(\beta-1)} \overset{n}{[BA]}, \text{ oder}$$

Es ist $\overset{n}{[AB]}$ der Ergänzung von $\overset{n}{[BA]}$ gleich, nur wenn die Klasse von A ungerade und zugleich die von B gerade ist, dann ist $\overset{n}{[AB]}$ der Ergänzung von $\overset{n}{[BA]}$ entgegengesetzt.

Beweis. Es ist

$$\overset{n}{[BA]} = \overset{n}{[BA]} \quad (147)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)} \overset{n}{[B \cdot A]} \quad (132)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)} (-1)^{\alpha(n-\beta)} \overset{n}{[AB]} \quad (89)$$

$$= (-1)^{\alpha(2n-\alpha-\beta)} \overset{n}{[AB]}.$$

Es ist aber $\overset{n}{(2n-\alpha-\beta)}$ deckend mit $\alpha(\beta-\alpha)$ oder deckend mit $\alpha(\beta-1)$, da α^2 mit α gleichzeitig gerade oder ungerade ist, mithin ist

$$\overline{[BA]}^n = (-1)^{\alpha(\beta-1)} [AB]^n, \text{ oder auch}$$

$$[AB]^n = (-1)^{\alpha(\beta-1)} \overline{[BA]}^n.$$

Durch den so eben erwiesenen Satz kann man den Fall, wo das zweite Fach eines inneren Zeuges oder Produktes von höherer Klasse ist als das erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo das erste Fach von höherer Klasse ist als das zweite. Diesen letztern Fall legen wir daher in der Regel der Betrachtung zu Grunde.

Satz. Die Klasse des Innenzeuges oder innern Produktes, dessen 193. beide Fache oder Faktoren nach der Reihe die Klassen α und β haben, während die Stufe des Hauptgebietes n beträgt, ist, wenn $\beta > \alpha$ ist, gleich $\alpha + n - \beta$, dagegen, wenn $\beta \leq \alpha$ ist, gleich $\alpha - \beta$.

Beweis. Es seien A und B die beiden Fache oder Faktoren, deren Klassen beziehlich α und β sind, so ist die Klasse von \overline{B} gleich $n - \beta$.

Wenn demnach $\beta > \alpha$ ist, so ist auch n gröser als $\alpha + n - \beta$; d. h. die Summe der Klassen von A und \overline{B} ist kleiner als die Stufe des Hauptgebietes, also ist nach 133 die Klasse des Flaches $[AB]$ gleich jener Summe, d. h. gleich $\alpha + n - \beta$.

Wenn dagegen $\beta \leq \alpha$ ist, so ist auch n eben so gros oder kleiner als $\alpha + n - \beta$, d. h. die Summe der Klassen von A und \overline{B} ist eben so gros oder gröser als n , also nach 145 die Klasse des Flaches $[AB]$ um n kleiner als jene Summe, d. h. gleich $\alpha - \beta$.

Satz. Die Anzahl der Einheiten, deren Vielfachensumme ein 194. Innenzeug oder inneres Produkt ist, ist gleich der Anzahl der Geschiede aus so viel Einheiten, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur so vielten Klasse, als der Unterschied der Klassen der beiden Fache oder Faktoren beträgt.

Beweis. Nach 193 ist die Klasse des innern Zeuges oder Produktes entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem β gröser als α ist, oder nicht. Die Einheiten von gleicher Klasse sind im ersten Falle die Geschiedsfläche aus den n Einheiten erster Klasse zur $(n + \alpha - \beta)$ ten, im zweiten zur $(\alpha - \beta)$ ten Klasse. Aber die Anzahl der Geschiede aus n Einfachen zur $(n + \alpha - \beta)$ ten Klasse ist nach Zahlenlehre 390 gleich der Anzahl der Geschiede aus n Einfachen zur $(\beta - \alpha)$ ten Klasse.*) Die Klassenzahl ist dann im ersten

*) Nach Zahlenlehre 390 ist $p^m = \frac{p!}{m!(p-m)!} = p^{\cdot p-m}$.

Fälle $\beta - \alpha$, im zweiten Falle ist sie $\alpha - \beta$, in beiden Fällen also den Unterschieden von α und β gleich.

195. **Satz.** Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen gleicher Klasse ist eine Zahl und zwar

Wenn $E_1 \dots E_m$ sämtlich Einheiten von a ter Klasse sind, so ist

$$[(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)(\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m)] = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Beweis. Der Unterschied der Klassen ist in diesem Falle null, also das Zeug nach 194 nullter Klasse, d. h. eine Zahl. Und zwar, wenn wir

$$\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m = \sum_{1,m} \alpha_a E_a \quad \text{und} \quad \beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m = \sum_{1,m} \beta_b E_b \quad \text{setzen,}$$

so ist

$$\left[\left(\sum_{1,m} \alpha_a E_a \right) \left(\sum_{1,m} \beta_b E_b \right) \right] = \sum_{1,m} \alpha_a \beta_b [E_a E_b] \quad (\text{nach 74}).$$

Nun ist nach 187 das Zeug $[E_a E_b]$, wenn a und b verschieden sind, gleich null, und wenn a und b gleich ist, gleich 1, mithin wird das obige Zeug

$$= \sum_{1,m} \alpha_a \beta_a = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

196. **Satz.** Wenn E_1, \dots, E_m Einheiten von beliebiger, aber von gleicher Klasse sind, so ist

$$[(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)(\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m)] = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Beweis. Es sei $\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m$ mit $\sum_r \alpha_r E_r$, und $\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m$ mit $\sum_s \beta_s E_s$ bezeichnet, so ist

$$[(\sum_r \alpha_r E_r)(\sum_s \beta_s E_s)] = \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s [E_r E_s] \quad (74).$$

Nun ist nach 187 das Zeug $[E_r E_s]$ gleich null, wenn E_r und E_s verschiedene Einheiten sind und gleich eins, wenn r gleich s ist, somit wird der gewonnene Ausdruck

$$= \sum_r \alpha_r \beta_r = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

197. **Satz.** Die beiden Facte eines Innenzeuges (die beiden Factoren eines inneren Produktes) sind vertauschbar, wenn sie von gleicher Klasse sind, oder

$$[AB] = [BA], \text{ wenn } A \text{ und } B \text{ von gleicher Klasse sind.}$$

Beweis. Es mögen E_1, \dots, E_m die Einheiten darstellen, welche mit A und B von gleicher Klasse sind und sei $A = \sum_a \alpha_a E_a$, $B = \sum_b \beta_b E_b$, so ist nach 195

$$[AB] = \sum_a \alpha_a \beta_a = \sum_b \beta_b \alpha_a = [BA].$$

198. **Erklärung.** Das Innenquader oder das innere Quadrat einer Größe A heist das Enflach $[AA]$.

Das Zeichen des Innenquaders von A ist A^2 gelesenen Innenquader von A .

Satz. Das Innenquader jeder Größe ist eine Zahl und zwar ist 199.

$$(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2.$$

Beweis. $(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)^2$

$$= [(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m) (\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)] \quad (198)$$

$$= \alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_m \alpha_m \quad (197).$$

Erklärung. Der Zahlwert (numerische Wert) einer Größe A 200. heist die 2te Tiefe (die positive Quaderwurzel) aus dem Innenquader dieser Größe. Zahlwertig gleich (numerisch gleich) heissen zwei Größen von gleichem Zahlwerte, d. h. deren Innenquader gleich sind.

Diese Erklärung stimmt mit den in der Zahlenlehre bei den Zahlen und bei den Winkelgrößen (imaginären Größen) gegebenen Erklärungen; denn der Zahlwert von $+a$ und $-a$ ist dort als $(\pm a^2)^{1/2} = a$ und der von $a+ib$ als $(a^2 + b^2)^{1/2}$ erklärt. In der Raumlehre ist entsprechend der Zahlwert einer Linie die Länge derselben gemessen durch die Längeneinheit, u. f. w.

14. Normverein und Kreifeländerung.

Erklärung. Normig zu einander heissen zwei von Null 201. verschiedene Größen, deren Innenzeug oder inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heissen normig zu einander, wenn ihre Teile es sind.

Allseitig normig zu einander heissen zwei Gebiete, wenn jede Größe erster Klasse, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normig ist; und allseitig normig zu einander heissen zwei Größen, wenn ihre Gebiete es sind.

Nimmt man in dem Raume die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander sind.

Erklärung. Ein Normverein (ein Normalfsystem) nter 202. Stufe heist ein Verein von n zahlwertig gleichen (von Null verschiedenen) Größen erster Klasse, von denen jede zu jeder normig ist.

Ein vollständiger Normverein heist er, wenn n zugleich die Stufe des Hauptgebietes ist. Der Zahlwert jener n Größen heist zugleich der Zahlwert des Normvereins.

Einfach heist der Normverein, dessen Zahlwert 1 ist.

Im Raume bilden z. B. drei gleichlange und gegen einander senkrechte Strecken einen Normverein.

203. **Satz.** Der Verein der ursprünglichen Einheiten erster Klasse ist ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1.

Beweis. Es seien e_1, \dots, e_n die ursprünglichen Einheiten, so ist nach 187

$$1 = e_1^2 = \dots = e_n^2$$

$$0 = [e_1 e_2] = \dots$$

204. **Erklärung.** Eine Kreifeländerung heist jede Umgestaltung eines Vereins, durch welche 2 Größen a und b des Vereins sich beziehlich in $xa + yb$ und in $\pm(xb - ya)$ verwandeln, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Die Kreifeländerung heist eine Plusänderung (eine positive), wenn a und b sich in $xa + yb$ und $+(xb - ya)$ verwandeln, eine Strichänderung (eine negative), wenn a und b sich in $xa + yb$ und $-(xb - ya)$ verwandeln.

Wenn hierbei $x = \cos \alpha$ und $y = \sin \alpha$ ist, und a und b zahlwertig gleich und zu einander normig sind, so sagt man, der Verein habe sich von a nach b hin um den Winkel α geändert.

Wenn im Raume a und b zwei gleichlange und zu einander senkrechte Strecken darstellen, so sieht man leicht, dass durch die Kreifeländerung, durch welche a in $a_1 = a \cos \alpha + b \sin \alpha$, b in $b_1 = b \cos \alpha - a \sin \alpha$ übergeht, a_1 und b_1 von derselben Länge sind wie a und b und gegen einander senkrecht bleiben. Es bleiben also a und b bei jener Aenderung normige oder senkrechte Halbmesser eines festen Kreises. Und ist der Winkel von a bis a_1 gleich α . Sind dagegen a und b beliebige Strecken, so werden a_1 und b_1 normige Halbmesser einer bestimmten Ellipse, in welcher auch a und b normige Halbmesser sind.

205. **Satz.** Jeder Normverein geht durch Kreifeländerung in einen zahlwertig gleichen Normverein über.

Beweis. Es seien a, b, c, \dots die Größen eines Normvereins.

d. h. nach 201, es sei $a^2 = b^2 = c^2 = \dots$ und sei $0 = [a\bar{b}] = [\bar{a}c] = [\bar{b}c] = \dots$. Nun ändere sich durch Kreifeländerung a in $a_1 = xa + yb$ und b in $b_1 = xb - ya$, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist, so ist zu zeigen, dass a_1, b_1, c, \dots einen Normverein bilden, in welchem $a_1^2 = a^2$ ist. Es ist, da $[a\bar{b}] = 0$ ist,

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (xa + yb)^2 = x^2 a^2 + y^2 b^2, \text{ d. h. da } b^2 = a^2 \\ &= (x^2 + y^2) a^2, \text{ d. h. da } x^2 + y^2 = 1 \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist $b_1^2 = a^2$. Ferner ist, da $[a\bar{b}] = 0$

$$\begin{aligned} [a_1 \bar{b}_1] &= [(xa + yb)(xb - ya)] = xy(b^2 - a^2), \\ &\text{d. h. da } b^2 = a^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Endlich ist

$$\overset{n}{[a, \bar{c}]} = \overset{n}{[(xa + yb)\bar{c}]} = x\overset{n}{[a\bar{c}]} + y\overset{n}{[b\bar{c}]},$$

und dies gleich Null, weil $\overset{n}{[a\bar{c}]}$ und $\overset{n}{[b\bar{c}]} = 0$ sind. Aus gleichem Grunde ist $\overset{n}{[b, \bar{c}]} = 0$ u. f. w. Folglich ist der Verein a_1, b_1, c, \dots ein Normverein, dessen Zahlwert gleich dem des gegebenen ist, da $a_1^2 = a^2$.

Satz. Das Enflach der Größen eines Normvereins bleibt bei der 206. Kreifeländerung des Vereins unverändert, wenn die Aenderung eine Plusänderung (positiv) ist, erhält dagegen den entgegengesetzten Wert, wenn die Aenderung eine Strichänderung (negativ) ist.

Beweis. Es gehe a durch Kreifeländerung in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist; so wird

$$\begin{aligned}\overset{n}{[a_1 b_1]} &= \overset{n}{[(xa + yb)(xb - ya)]} \text{ und dies, da } \overset{n}{[aa]}, \overset{n}{[bb]} \text{ nach 92 null sind,} \\ &= x^2 \overset{n}{[ab]} - y^2 \overset{n}{[ba]} \text{ und dies, da } \overset{n}{[ba]} = -\overset{n}{[ab]} \\ &= (x^2 + y^2) \overset{n}{[ab]} \quad (\text{nach 88}) \\ &= \overset{n}{[ab]}, \text{ da } x^2 + y^2 = 1.\end{aligned}$$

Also $\overset{n}{[a_1 b_1]} = \overset{n}{[ab]}$. Kommen nun zu den gleichen Flächen $\overset{n}{[ab]}$ und $\overset{n}{[a_1 b_1]}$ noch an den entsprechenden Stellen gleiche Fache oder Faktoren hinzu, so bleiben die Fläche gleich.

Bei der Strichänderung wird

$$\overset{n}{[a_1 b_1]} = -\overset{n}{[(xa + yb)(xb - ya)]}, \text{ mithin } = -\overset{n}{[ab]} \text{ und wird also das Flach entgegengesetzt, mithin bewiesen.}$$

Satz. Die Größen eines Normvereins sind gegenseitig frei und 207. jede Größe erster Klasse lässt sich als Vielfachensumme der Größen eines beliebigen vollständigen Normvereins darstellen.

Beweis. 1. Es seien a, b, c, \dots Größen eines Normvereins. Gefetzt nun, es seien dieselben nicht gegenseitig frei, sondern lasse sich die eine als Vielfachensumme der andern darstellen, etwa

$$a = \beta b + \gamma c + \dots,$$

so webe oder multipliziere man beide Seiten innerlich mit a , so wird

$$a^2 = \beta \overset{n}{[ba]} + \gamma \overset{n}{[ca]} + \dots$$

Hier ist $\overset{n}{[ba]}, \overset{n}{[ca]}, \dots$ null nach 201. Also wäre $a^2 = 0$, im Widerspruch mit 202. Es lässt sich also keine der Größen a, b, c, \dots als Vielfachensumme der übrigen darstellen, d. h. nach 9 sie sind gegenseitig frei.

2. Ein vollständiger Normverein in einem Hauptgebiete n ter Stufe besteht nach 202 aus n Größen, und da diese nach Beweis 1 gegenseitig frei sind, so kann nach 20 jede GröÙe erster Stufe, da sie immer dem Hauptgebiete angehören muss, als Vielfachenfumme der n Größen dargestellt werden.

208. **Satz.** Wenn eine GröÙe A zu mehreren Größen gleicher Stufe B, C, \dots normig ist, so ist sie auch zu jeder GröÙe normig, welche eine Vielfachenfumme derfelben ist.

Beweis. Wenn A zu B, C, \dots normig ist, so ist nach 201

$$0 = [\overline{AB}] = [\overline{AC}] = \dots$$

Also ist auch

$$[\overline{A(\beta B + \gamma C + \dots)}] = \beta [\overline{AB}] + \gamma [\overline{AC}] + \dots = 0. \quad (74)$$

209. **Satz.** Alle Größen erster Klasse, welche zu m Größen eines vollständigen Normvereins n ter Stufe normig sind, gehören dem Gebiete der $n - m$ übrigen Größen des Vereines an.

Beweis. Es sei der Verein a_1, \dots, a_n ein vollständiger Normverein, und seien m seiner Größen, etwa a_1, \dots, a_m zu irgend einer GröÙe erster Klasse c normig, so ist zu zeigen, dass c dem Gebiete a_{m+1}, \dots, a_n angehört. Nach 207 lässt sich c als eine Vielfachenfumme der Größen des vollständigen Normvereins a_1, \dots, a_n darstellen.

$$c = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Hier ist, da c zu a_1 normig ist, nach 201

$$0 = [\overline{a_1 c}] = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 [\overline{a_1 a_2}] + \dots + \alpha_n [\overline{a_1 a_n}] = \alpha_1 a_1^2.$$

Da nun a_1^2 nach 202 nicht null ist, so folgt aus der Gleichung $\alpha_1 a_1^2 = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Auf gleiche Weise folgt, dass auch $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ null sind. Folglich ist

$$c = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \dots + \alpha_n a_n,$$

d. h. c gehört dem Gebiete a_{m+1}, \dots, a_n an.

210. **Satz.** Jeder Normverein kann durch fortgesetzte Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass eine seiner Größen einer beliebig gegebenen GröÙe erster Klasse aus dem Gebiete des Vereines gleich wird, sofern der Zahlwert der GröÙe dem des Normvereins gleich ist.

Beweis. Es seien a_1, \dots, a_n die Größen des gegebenen Normvereins, und sei c die gegebene GröÙe, deren Zahlwert gleich a_1 ist, auch sei

$$c = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Man wandle nun a_1 und a_2 durch Kreifeländerung nach 204 so um, dass a_1 in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2$, also

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man c_2 und a_3 durch Kreifeländerung so um, dass c_2 in

$$c_3 = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} c_3 + \alpha_4 a_4 + \dots + \alpha_n a_n.$$

In dieser Weise fahre man fort, bis

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} c_n \text{ wird.}$$

Nun ist nach der Bedingung des Satzes c zahlwertig gleich mit a_1 , also nach 200

$$a_1^2 = c^2 = (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n)^2$$

und da $[a_1, \bar{a}_1]$, $[a_1, \bar{a}_2]$ u. f. w. nach 187 gleich Null sind,

$$a_1^2 = \alpha_1^2 a_1^2 + \dots + \alpha_n^2 a_n^2$$

und da nach 201 auch $a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_n^2$ ist, so wird

$$a_1^2 = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) a_1^2 \quad \text{oder} \quad \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1,$$

mithin $c = c_n$,

d. h. es ist durch fortgesetzte Kreifeländerung a_1 in $c_1, c_2, \dots, c_n = c$ verwandelt.

Satz. Zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, deren Gebiete 211. eines dem andern gleich oder untergeordnet ist, können durch fortgesetzte Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass, wenn sie von gleicher Stufe sind, das eine in das andere übergeht, wenn sie von ungleicher Stufe sind, das höherer Stufe die Größen des andern enthält.

Beweis. Es seien a_1, a_2, a_3, \dots und b_1, b_2, b_3, \dots zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, auch sei das Gebiet b_1, b_2, b_3, \dots entweder von gleicher oder höherer Stufe als das von a_1, a_2, a_3, \dots , so müssen nach 52 alle Größen a_1, a_2, a_3, \dots dem Gebiete b_1, b_2, b_3, \dots angehören. Somit kann man nach 210 den Normverein b_1, b_2, b_3, \dots durch Kreifeländerung so umwandeln, dass eine seiner Größen $= a_1$ wird. Der hierdurch erzeugte Normverein bestehe aus den Größen a_1, c_2, c_3, \dots .

Da nun a_2, a_3, \dots , als Größen des Normvereins a_1, a_2, a_3, \dots , zu a_1 , also zu einer Größe des Normvereins a_1, c_2, c_3, \dots normig sind, so müssen sie nach 209 dem Gebiete der übrigen Größen dieses Vereines, d. h. dem Gebiete c_2, c_3, \dots angehören. Demnach kann man wieder den Verein c_2, c_3, \dots durch Kreifeländerung so umwandeln, dass eine seiner Größen $= a_2$ wird. Der hierdurch erzeugte Normverein bestehe aus den Größen a_2, d_3, d_4, \dots , so müssen wieder aus demselben Grunde, wie vorher, a_3, a_4, \dots dem Gebiete d_3, d_4, \dots angehören. Der Normverein $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ ist dann durch Kreifeländerungen übergegangen in $a_1, a_2, d_3, d_4, \dots$. So kann man, wenn der Verein b_1, b_2, \dots von höherer Stufe ist als a_1, a_2, \dots , fortfahren, bis der zuletzt hervorgehende Verein alle Größen des gegebenen Vereines a_1, a_2, a_3, \dots enthält. Sind beide Vereine von gleicher Stufe, so kann man fortfahren, bis der Verein alle Größen des Vereins a_1, a_2, a_3, \dots , mit Ausnahme des letzten, enthält. Diese letzte Größe sei a_n , und sei der so hervorgehende Normverein $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, q$, so muss nach der angewandten Schlussfolge a_n dem Gebiete q angehören, d. h. beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist nun $q = \beta a_n$, wo β eine Zahl ist, so ist, da beide im Zahlwerte einander gleich sind, $q^2 = a_n^2$, also $\beta^2 = 1$, somit $q = \mp a_n$. Wenn nun $q = -a_n$ ist, so hat man nur statt der letzten Kreifeländerung die entgegengesetzte zu nehmen, so ist dann auch $q = a_n$, mithin ist dann der eine der gegebenen Normvereine in den andern durch Kreifeländerung übergegangen.

212. Satz. In jedem Gebiete m ter Stufe kann man einen Normverein gleicher Stufe von beliebigem Zahlwerte aufstellen und zwar so, dass dieser Verein Teil eines vollständigen Normvereins ist.

Beweis. Das Gebiet der ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n sei das Hauptgebiet. Der Verein dieser Einheiten ist nach 203 ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1. In dem Gebiete m ter Stufe A innerhalb des Hauptgebietes sei nun a_1 eine Größe erster Klasse vom Zahlwerte 1. Nach 210 kann nun jener vollständige Normverein durch Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass a_1 eine der Größen des hervorgehenden Normvereins wird. Dann ist a_1 zu den $n - 1$ übrigen Größen dieses Normvereins, also nach 208 auch zu jeder Größe ihres Gebietes A_1 normig. Dies Gebiet ist von $(n - 1)$ ter Stufe und hat also mit dem Gebiete m ter Stufe A nach 31 ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n - 1 + m - n = m - 1$ ist. Es sei in diesem gemeinschaftlichen Gebiete wieder a_2 eine Größe

erster Klasse vom Zahlwerte 1. Da a_2 also auch dem Gebiete A_1 angehört, so ist sie nach dem obigen zu a_1 normig, aber auch, da beide gleich 1 sind, mit a_1 im Zahlwerte gleich, also bilden a_1 und a_2 einen Normverein vom Zahlwerte 1. Also lässt sich nach 209 der vollständige Normverein e_1, \dots, e_n in einen andern Normverein umwandeln, welcher a_1 und a_2 enthält. Das Gebiet A_2 der übrigen $n - 2$ Größen dieses Normvereins ist von $(n - 2)$ ter Stufe, und alle Größen erster Klasse, die diesem Gebiete angehören, sind normig zu a_1 und a_2 . Nun haben A und A_2 ein Gebiet $m - 2$ ter Stufe gemein; in ihm sei a_3 eine beliebige GröÙe erster Klasse vom Zahlwerte 1, so hat man schon einen Normverein von drei Größen a_1, a_2, a_3 in A , und so kann man fortfahren. Hat man so in A einen Normverein von $(m - 1)$ Größen a_1, \dots, a_{m-1} erhalten, so enthält der vollständige Normverein, zu dem er gehört, ausserdem noch $n - m + 1$ Größen, d. h. ihr Gebiet, welches A_{m-1} heisse, ist von $(n - m + 1)$ ter Stufe, hat also mit dem Gebiete m ter Stufe A noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n - m + 1 + m - n = 1$ ist. Es sei a_m eine GröÙe erster Klasse dieses Gebietes vom Zahlwerte 1, so ist a_m , da es in A_{m-1} liegt, zu a_1, \dots, a_{m-1} normig und a_1, \dots, a_m bilden also einen Normverein m ter Stufe in dem Gebiete m ter Stufe A . Diesem Normvereine kann man dadurch, dass man alle seine Größen mit einer und derselben beliebigen Zahl vervielfacht, jeden beliebigen Zahlwert geben.

15. Die normige Zurückleitung.

Erklärung. Die normige Zurückleitung A' einer GröÙe A 213. auf ein Gebiet B heist die Zurückleitung der GröÙe A auf das Gebiet B , unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes (Vergl. 28 und 179).

In der Raumlehre ist die senkrechte Abschattung oder Projektion die normige Zurückleitung. Sei z. B. a, b, c ein vollständiger Normverein und $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$ eine beliebige GröÙe des Hauptgebietes, so ist die normige Zurückleitung der GröÙe p auf das Gebiet bc gleich $\beta b + \gamma c$, die auf das Gebiet c gleich γc .

Satz. Die normige Zurückleitung A' einer GröÙe A auf ein 214. Gebiet B ist

$$A' = \frac{B \cdot (A\bar{B})}{B^2}, \text{ und sie ist } A' = \frac{B \cdot (A\bar{B})}{B}, \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Nach 213 ist A' die Zurückleitung von A auf B , unter

Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, d. h. des Gebietes \bar{B} . Wird \bar{B} mit C bezeichnet, so ist nach 181

$$A' = \frac{[B(AC)]}{[BC]}, \text{ also } = \frac{[B \cdot (A\bar{B})]}{[B\bar{B}]} = \frac{[B \cdot (A\bar{B})]}{B^2}.$$

215. **Satz.** Wenn die Klasse von A gleich der von B ist, so ist die Zurückleitung

$$A' = \frac{[A\bar{B}B]}{B^2}, \text{ und sie ist } A' = [A\bar{B}B], \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Wenn A und B gleicher Klasse sind, so ist nach 167 $[A\bar{B}]$ eine Zahl und kann also statt $[B \cdot (A\bar{B})]$ geschrieben werden $[A\bar{B}B]$.

216. **Satz.** Die Ergänzung des Enflaches A von m Größen eines vollständigen Normvereins vom Zahlwerte eins ist, wenn die n einfachen Fache (Faktoren) von $[AB]$ die n Größen des Normvereins sind, dem Enflache der (n — m) übrigen Größen des Vereins gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $[AB] = +1$ oder $= -1$ ist, d. h. es ist

$$\bar{A} = [ABB].$$

Beweis. 1. Für den Verein der ursprünglichen Einheiten ist diese Formel in 138 als Erklärung festgesetzt.

2. Es ist nun noch zu beweisen, dass, wenn diese Formel für irgend einen Normverein a, b, c, ... gilt, so dass $\bar{A} = [ABB]$, sie auch für jeden aus ihm durch Kreiseländerung hervorgehenden Normverein gilt. Es gehe nun durch Kreiseländerung a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über und verwandle sich A in A_1 , B in B_1 ; so ist zu zeigen, dass auch $\bar{A}_1 = [A_1B_1B_1]$ sei. Da nun A und B nach dem Satze zusammen alle Größen a, b, ... des Normvereins und zwar sowohl A als B jede dieser Größen nur einmal enthalten sollen, so kommen a und b entweder beide in A, oder beide in B, oder eine in A und die andere in B vor. Wir haben nun schon in 206 bewiesen, dass das Enflach $[a_1b_1]$ bei dieser Aenderung gleich $[ab]$ bleibt; somit bleibt in den beiden ersten Fällen sowohl A als B unverändert, also bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen.

Im dritten Falle sei a in A enthalten, b in B, und sei A' die GröÙe, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a setzt, und B' die GröÙe, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b setzt.

Dann unterscheiden sich die Fläche $\overset{P}{[A'B']}$ und $\overset{P}{[AB]}$ nur durch gegenseitige Vertauschung der beiden einfachen Fläche a und b , folglich ist dann nach 88 $\overset{P}{[A'B']} = -\overset{P}{[AB]}$. Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA', \quad B_1 = xB - yB',$$

folglich nach 151

$$\bar{A}_1 = x\bar{A} + y\bar{A}'$$

Da nun A und A' nur Größen des Normvereins a, b, \dots als einfache Fläche oder Faktoren enthalten, und B und B' die jedesmal übrigen, so gilt (nach der Annahme) für sie die obige Gleichung, d. h. es ist

$$\bar{A} = \overset{P}{[ABB]}, \quad \bar{A}' = \overset{P}{[A'B'B]},$$

und da $\overset{P}{[A'B']} = -\overset{P}{[AB]}$, auch $\bar{A}' = -\overset{P}{[ABB']}$, mithin

$$\bar{A}_1 = x\overset{P}{[ABB]} - y\overset{P}{[ABB']} = \overset{P}{[AB(xB - yB')]} = \overset{P}{[ABB_1]}.$$

Endlich ist nach 206 $\overset{P}{[A_1B_1]} = \overset{P}{[AB]}$, indem die einfachen Fläche von $\overset{P}{[A_1B_1]}$ aus denen von $\overset{P}{[AB]}$ durch positive Kreiseländerung hervorgehen. Also ist

$$\bar{A}_1 = \overset{P}{[A_1B_1B_1]},$$

d. h. wenn die Gleichung für irgend einen Normverein gilt, so gilt sie auch für jeden daraus durch positive Kreiseländerung hervorgehenden, und ebenso auch für jeden daraus durch negative Aenderung hervorgehenden. Denn nach 204 wird die positive Kreiseländerung in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von b_1 ändert, dann ändert sich auch das Vorzeichen von B_1 , wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt. Also bleibt die Gleichung überhaupt bei jeder Kreiseländerung des Normvereins bestehen, wenn sie für irgend einen Normverein gilt. Nach Beweis 1 gilt sie aber für den Normverein der ursprünglichen Einheiten, also nun auch für jeden daraus durch Kreiseländerung abgeleiteten Verein. Nach 211 kann man aber jeden Normverein des Zahlwertes 1 aus jenem ableiten, also gilt die Gleichung für jeden Normverein vom Zahlwerte 1.

Satz. Alle bisher aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, 217. wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen beliebigen vollständigen Normverein mit dem Zahlwerte Eins setzt.

Beweis. Alle in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgefetze gelten nach 160 auch dann noch, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten beliebige n Größen setzt, welche Viel-

fachensummen derselben sind und deren Flach 1 ist, also auch, wenn man die Grösen eines vollständigen Normvereins einsetzt. Ferner gilt nach 216 der Begriff der Ergänzung wie er in 128 in Bezug auf den Verein der ursprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jeden Normverein mit dem Zahlwerte Eins. Aber auf diesem Begriff der Ergänzung und den in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgeetzen beruhen alle Sätze der Innungslehre, wie sie bisher entwickelt worden sind. Also gelten diese Sätze noch, wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen Normverein mit dem Zahlwerte eins setzt.

Der Begriff des Innenzeuges ist also nicht mehr an den Verein der ursprünglichen Einheiten geknüpft, man kann vielmehr statt jenes Vereins einen beliebigen Normverein vom Zahlwerte eins setzen, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung erleidet. Es ist also der Begriff des Innenzeuges oder des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normvereins geknüpft, und dieser tritt daher in den später folgenden Entwicklungen statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten hervor.

218. Satz. Die Bedingungsgleichungen für die innere Webung zweier Grösen erster Klasse sind

$$[e, \bar{e}_r] = 0, \text{ wenn } r > s, \text{ und } [e, \bar{e}_r] = [\bar{e}_s, e] = \dots = 1,$$

und zwar gelten dieselben auch, wenn man statt der Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n einen beliebigen vollständigen Normverein setzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten ist in 187 bewiesen. Also gelten sie nach 217 auch für jeden einfachen vollständigen Normverein von dem Zahlwerte eins. Sie gelten aber auch für jeden beliebigen vollständigen Normverein vom Zahlwerte λ . Denn sind a, b zwei Grösen desselben und ist λ der Zahlwert des Normvereins, so dass $a = \lambda a', b = \lambda b'$ gesetzt werden kann, wo a' und b' den Zahlwert 1 haben, so ist $[a', \bar{b}'] = 0$, also auch $[\lambda a', \bar{\lambda b}'] = 0$, d. h. $[a \bar{b}] = 0$ und $[a' \bar{a}] = 1$, also $[a \bar{a}] = [\lambda a' \bar{\lambda a}'] = \lambda^2 [a' \bar{a}'] = \lambda^2$. Ebenso $[b \bar{b}] = \lambda^2$, also $[a \bar{a}] = [b \bar{b}]$. Die beiden obigen Gruppen von Gleichungen enthalten aber auch die vollständigen Bestimmungsgleichungen, d. h. es herrscht zwischen den Zeugen oder Produkten $[e, \bar{e}_r]$ keine andere Zahlbeziehung, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare. Es lassen sich nämlich vermöge der beiden Gruppen alle Zeuge oder Produkte $[e, \bar{e}_r]$, sofern r gleich s ist, gleich $[e, \bar{e}_1]$ setzen, während sie verschwinden, sobald r von s verschieden ist. Hat man also irgend eine Bedingungsgleichung

$$S\alpha_{r,s}[\overset{n}{e_r}\bar{e_s}] = 0,$$

so verwandelt sie sich in

$$S\alpha_{r,r}[\overset{n}{e_1}\bar{e_1}] = 0,$$

also, da $[\overset{n}{e_1}\bar{e_1}]$ gleich 1 ist, in

$$S\alpha_{r,r} = 0.$$

Ist aber letzteres der Fall, so geht die Gleichung

$$S\alpha_{r,s}[\overset{n}{e_r}\bar{e_s}] = 0$$

schon aus den obigen beiden Gruppen hervor, somit enthalten jene beiden Gruppen die vollständigen Bestimmungsgleichungen.

Für die innere Webung oder Multiplikation zweier beliebiger Größen von den Stufen p und q ($q \geq p$) sind die Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

$[\overset{p}{E}\bar{F}] = 0$, wenn E und F eine der andern nicht gleich oder untergeordnet

$[\overset{p}{E}\bar{E}G] = [\overset{p}{E'}\bar{E'}G]$, wo E, F, G, E' Fläche der ursprünglichen Einheiten sind, E, E' von p ter, $F, [\overset{p}{E}G]$ und $[\overset{p}{E'}G]$ von q ter Klasse ungleich null sind.

$$\text{Satz.} \quad [\overset{n}{a}\bar{b}] = [\overset{n}{b}\bar{a}]. \quad 219.$$

Beweis. Unmittelbar aus 197.

$$\begin{aligned} \text{Satz.} \quad & [\overset{p}{(a_1a_1 + a_2a_2 + \dots)}\bar{(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \dots)}] \\ & = a_1\beta_1a_1^2 + a_2\beta_2a_2^2 + \dots, \end{aligned} \quad 220.$$

wenn a_1, a_2, \dots zu einander normig sind.

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad & \text{Es ist } [\overset{n}{a_1a_1 + a_2a_2 + \dots}\bar{(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \dots)}] \\ & = [\overset{p}{a_1a_1 + a_2a_2 + \dots}(\beta_1\bar{a_1} + \beta_2\bar{a_2} + \dots)] = [\overset{p}{(S\alpha_{aa})(S\beta_{\bar{a}\bar{a}})}] \\ & = S\alpha_a\beta_{\bar{a}}[\overset{p}{a_a}\bar{a_{\bar{a}}}] \\ & = S\alpha_a\beta_a[\overset{p}{a_a}\bar{a_a}], \end{aligned} \quad (74)$$

weil a_a und $a_{\bar{a}}$, wenn a von \bar{a} verschieden ist, nach der Annahme zu einander normig sind, also nach 218 ihr Innenzeug null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= S\alpha_a\beta_aa_a^2 = a_1\beta_1a_1^2 + a_2\beta_2a_2^2 + \dots$$

$$\text{Satz.} \quad [\overset{n}{(a_1a_1 + a_2a_2 + \dots)}\bar{(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \dots)}] = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots, \quad 221.$$

wenn a_1, a_2, \dots ein einfacher Normverein.

Beweis. Nach 220 ist

$$\begin{aligned} & [\overset{n}{(a_1a_1 + a_2a_2 + \dots)}\bar{(\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \dots)}] \\ & = a_1\beta_1a_1^2 + a_2\beta_2a_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Da aber a_1, a_2, \dots ein einfacher Normverein sind, so ist $a_1^2 = a_2^2 = \dots = 1$, also der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots$$

222. **Satz.** Wenn a_1, a_2, \dots zu einander normig sind, so ist

$$(a_1 + a_2 + \dots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

Beweis. Unmittelbar aus 220.

223. **Satz.** $(a + b)^2 = a^2 + 2[a\bar{b}] + b^2$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= {}^n[(a + b)(\bar{a} + \bar{b})] \\ &= [{}^n a \bar{a}] + [{}^n a \bar{b}] + [{}^n b \bar{a}] + [{}^n b \bar{b}] \end{aligned} \quad (74),$$

also nach 218

$$= a^2 + 2[a\bar{b}] + b^2.$$

224. **Satz.** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b\bar{c}] + 2[c\bar{a}] + 2[a\bar{b}]$.

Beweis wie in 223.

Die Sätze 222 bis 224 enthalten, auf den Raum bezogen, den Pythagoräischen Lehrsatz nebst seiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum.

225. **Satz.** Wenn die Gebiete von A und B zu einander allseitig normig sind, und C eine beliebige GröÙe von niederer oder gleicher Klasse wie B ist, so ist

$$\begin{aligned} [{}^n AB(\bar{AC})] &= A^2 [{}^n B\bar{C}] \text{ und} \\ [{}^n CA(\bar{BA})] &= A^2 [{}^n C\bar{B}]. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Es sei ein Normverein mit dem Zahlwerte 1 angenommen, dessen GröÙen sich auf die Gebiete A und B verteilen, und sei derselbe zu einem vollständigen Normvereine ergänzt. Dann ist C als Vielfachenfumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) der GröÙen jenes Normvereins ableitbar. (106. 109).

Es sei $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \dots$, ferner sei $A = \alpha A_1$, $B = \beta B_1$, wo A_1, B_1 Geschiedsfläche (kombinatorische Produkte) der GröÙen des Normvereins sind, so ist

$$\begin{aligned} [{}^n AB(\bar{AC})] &= \alpha^2 \beta [{}^n A_1 B_1 \bar{A}_1 (\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \dots)] \\ &= \alpha^2 \beta \gamma_1 [{}^n A_1 B_1 \bar{A}_1 C_1] + \alpha^2 \beta \gamma_2 [{}^n A_1 B_1 \bar{A}_1 C_2] + \dots \end{aligned}$$

Aber $[{}^n A_1 B_1 \bar{A}_1 C_r]$ ist, wenn A_1, B_1, C_r Einheiten höherer Klasse, d. h. Geschiedsfläche der ursprünglichen Einheiten sind, nach 190 gleich $[{}^n B_1 \bar{C}_r]$. Dasselbe findet aber nach 217 auch noch statt, wenn

jene Größen Geschiedsfläche der Größen eines einfachen Normvereins sind, also auch in diesem Falle. Somit wird

$$\begin{aligned} {}^n[AB(\overline{AC})] &= \alpha^2\beta\gamma_1[{}^nB_1\overline{C}_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[{}^nB_1\overline{C}_2] + \dots \\ &= \alpha^2\beta[{}^nB_1(\gamma_1\overline{C}_1 + \gamma_2\overline{C}_2 + \dots)] \\ &= \alpha^2\beta[{}^nB_1\overline{C}]. \end{aligned}$$

Da nun A_1 ein Geschiedsfläch von Größen eines einfachen Normvereins ist, so ist $A_1^2 = 1$ und ist der gefundene Ausdruck

$$\begin{aligned} &= \alpha^2\beta A_1^2[{}^nB_1\overline{C}] = (\alpha A_1)^2[{}^n\beta B_1\overline{C}] \\ &= A^2[{}^n\beta\overline{C}]. \end{aligned}$$

2. Auf gleiche Weise ergibt sich die zweite Formel des Satzes.

Satz. Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen ändert seinen Wert nicht, wenn man statt der einen Größe ihre normige Zurückleitung auf das Gebiet der andern setzt, d. h.

$${}^n[A\overline{B}] = {}^n[A\overline{B}'] \text{ und}$$

$${}^n[B\overline{A}] = {}^n[B'\overline{A}],$$

wenn B' die normige Zurückleitung von B auf das Gebiet A ist und also A von gleicher oder höherer Klasse als B ist.

Beweis. Es sei das Hauptgebiet von n ter Stufe, A von m ter, B von p ter Klasse, so kann man nach 212 einen vollständigen Normverein a_1, \dots, a_n so annehmen, dass m seiner Größen, etwa a_1, \dots, a_m , in A liegen, und sein Zahlwert 1 sei. Die p Fache oder Faktoren von B sind dann nach 207 als Vielfachensummen von a_1, \dots, a_n darstellbar, also ist B eine Vielfachensumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) von a_1, \dots, a_n zur p ten Klasse. Diese Geschiedsfläche seien $B_1, B_2, \dots, B_q, B_{q+1}, \dots, B_r$, wo B_1, \dots, B_q die Geschiedsfläche aus a_1, \dots, a_m seien; und sei

$$B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} + \dots + \beta_r B_r,$$

so sind nach 188 und 217 die Zeuge $[{}^nA\overline{B}_{q+1}], \dots, [{}^nA\overline{B}_r]$ alle gleich null, da jede der Größen B_{q+1} bis B_r solche Fache oder Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und diese Größen also der Größe A nicht gleich oder untergeordnet sind, also wird

$$\begin{aligned} {}^n[A\overline{B}] &= \beta_1[{}^nA\overline{B}_1] + \dots + \beta_q[{}^nA\overline{B}_q] \\ &= [{}^nA(\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q)]. \end{aligned}$$

Aber nach 179 ist $\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q$ die Zurückleitung von B auf das Gebiet a_1, \dots, a_m , mit Ausschluss des Gebietes a_{m+1}, \dots, a_n ,

letzteres Gebiet ist aber nach 216 die Ergänzung des ersteren; also ist $\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q$ die normige Zurückleitung von B auf das Gebiet a_1, \dots, a_m , d. h. auf das Gebiet von A , also gleich B' und somit

$${}^n[\overline{AB}] = {}^n[\overline{AB'}].$$

Aus gleichem Grunde ist ${}^n[\overline{BA}] = {}^n[\overline{B'A}]$.

227. **Satz.** Wenn man in einem Innenzeuge oder innern Produkte zweier Größen gleicher Klasse die eine auf das Gebiet der andern normig zurückleitet, und diese Zurückleitung so wie die GröÙe, auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und dasselbe Maß misst, dessen Zahlwert Eins ist, so ist das Zeug der beiden Messungs-Brüche gleich dem gegebenen Innenzeuge oder innern Produkte, d. h. es ist

$${}^n[\overline{AB}] = \alpha\beta', \text{ wenn } A = \alpha E,$$

und die normige Zurückleitung B' von A auf B gleich $\beta'E$, wo der Zahlwert von E gleich Eins ist.

Beweis. Nach 198 ist

$${}^n[\overline{AB}] = {}^n[\overline{AB'}].$$

Es sei E ein Gebietsteil von A mit dem Zahlwerte Eins, und sei $A = \alpha E$, $B' = \beta'E$, so ist ${}^n[\overline{AB'}] = \alpha\beta'{}^n[\overline{EE}] = \alpha\beta'E^2 = \alpha\beta'$, da $E^2 = 1$ ist.

228. **Erklärung.** Wenn A ein Geschiedsfläch (eine multiplikative Komplexion) aus a_1, a_2, \dots, a_n ist, so heist das Geschiedsfläch B , welches die sämtlichen in A nicht enthaltenen gegebenen Größen erster Stufe enthält, und mit einem solchen Vorzeichen (\pm) versehen ist, dass ${}^n[\overline{AB}] = {}^n[a_1 a_2 \dots a_n]$ ist, das zu A ergänzende Geschiedsfläch.

229. **Satz.** Wenn A (Alpha) mit A von gleicher Klasse, B (Beta) aber von gleicher oder niederer Klasse ist als B , und ${}^n[\overline{AB}] > 0$ ein Enfläch von Größen erster Klasse ist, auch A, A_1, \dots die Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) aus den Größen erster Klasse von ${}^n[\overline{AB}]$, und B, B_1, \dots die zu A, A_1, \dots ergänzenden Geschiedsfläche sind, so ist

$$(a) \quad {}^n[\overline{AB}(\overline{AB})] = {}^n[\overline{A\overline{A}(B\overline{B})}] + {}^n[\overline{A_1\overline{A}(B_1\overline{B})}] + \dots \text{ und}$$

$$(b) \quad {}^n[\overline{BA}(\overline{BA})] = {}^n[\overline{B\overline{B}(A\overline{A})}] + {}^n[\overline{B\overline{B}_1(A\overline{A}_1)}] + \dots$$

Beweis. 1. Es seien zunächst die Größen erster Klasse in ${}^n[\overline{AB}]$ alle zu einander normig. Da A von gleicher Klasse mit A ist,

so ist es als eine Vielfachenfumme aus den Geschiedsflächen A, A_1, \dots darstellbar. Es sei also

$$A = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots,$$

so ist

$$\begin{aligned} {}^n[AB(\overline{AB})] &= {}^n[AB(\overline{(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots)B})] \\ &= \alpha {}^n[AB(\overline{AB})] + \alpha_1 {}^n[AB(\overline{A_1 B})] + \dots \end{aligned}$$

Da nun nach der Voraussetzung B, B_1, \dots die ergänzenden Geschiedsfläche zu A, A_1, \dots sind, so ist nach 228 ${}^n[AB] = {}^n[A_1 B_1] = \dots$, und erhalten wir die Gleichung

$${}^n[AB(\overline{AB})] = \alpha {}^n[AB(\overline{AB})] + \alpha_1 {}^n[A_1 B_1(\overline{A_1 B_1})] + \dots$$

Da ferner die einfachen Größen in ${}^n[AB]$ alle zu einander normig, auch dieselben sind mit denen von ${}^n[A_1 B_1]$ u. f. w. nach der Annahme, so ist A zu B allseitig normig, und ebenso A_1 zu B_1 u. f. w. Folglich ist nach 225 der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^2 {}^n[B\overline{B}] + \alpha_1 A_1^2 {}^n[B_1\overline{B_1}] + \dots$$

Nun ist aber ${}^n[A_r \overline{A}] = {}^n[A_r(\overline{\alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots})] = \alpha_r A_r^2$, weil A_r mit den zu ihm normigen Größen A, A_1, \dots ausgenommen A_r , innerlich gewebt oder multipliziert, null giebt nach 188, 217. Also kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck ${}^n[A_r \overline{A}]$ statt $\alpha_r A_r^2$ setzen und jener Ausdruck wird

$$= {}^n[A_r \overline{A}] {}^n[B\overline{B}] + {}^n[A_1 \overline{A}] {}^n[B_1\overline{B_1}] + \dots = {}^n[A_r \overline{A}(B\overline{B})] + {}^n[A_1 \overline{A}(B_1\overline{B_1})] + \dots,$$

d. h. die Formel (a) gilt für unsere Voraussetzung.

2. Die Formel (a) gilt also, wenn die Größen erster Klasse in ${}^n[AB]$ alle zu einander normig sind, sie bleibt aber auch noch bestehen, wenn man diese Reihe von Fachen oder Faktoren nach 110 linig ändert, d. h. statt irgend eines Faches a setzt $a + \beta b$, wo β eine Zahl und b einer der andern Fache ist. Hierbei behält nach 111 das Zeug oder Produkt ${}^n[AB]$, also auch die linke Seite unserer Formel, denselben Wert. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, z. B. ${}^n[A_r \overline{A}(B_r \overline{B})]$, so können a und b entweder beide in A_r vorkommen, oder beide in B_r , oder eins in A_r , das andere in B_r . In den beiden ersten Fällen bleibt sowohl der Wert von A_r als der von B_r unverändert, also auch das betreffende Glied. Im letzten Falle kommt dafür noch ein anderes Glied ${}^n[A_r \overline{A}(B_r \overline{B})]$ vor von der Art,

dass, wo das eine der Zeuge oder Produkte A_r und A_s den Fach a enthält, das andere den Fach b enthält, und dass die Zeuge B_r und B_s , da sie die jedesmal dem A_r und A_s fehlenden Fache enthalten, in derselben gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, alle die Zeuge im Uebrigen aber dieselben Fache enthalten. Es kommt also a in einer der Grösen A_r und A_s vor; es mag a in A_r vorkommen. Nun sei A' die Gröse, welche aus A_r hervorgeht, indem man darin b statt a setzt, und B' die Gröse, welche aus B_r hervorgeht, indem man darin a statt b setzt. Dann enthält also A' dieselben Fache wie A_s und B' wie B_s ; es sind also nach 91 dann A' und B' den Grösen A_s und B_s entweder gleich oder entgegengesetzt. Da $\overset{P}{[A'B']}$ aus $\overset{P}{[A_r B_r]}$ durch Vertauschung der beiden einfachen Fache a und b hervorgeht, so ist nach 88 $\overset{P}{[A'B']} = -\overset{P}{[A_r B_r]} = -\overset{P}{[A_s B_s]}$, da $\overset{P}{[A_s B_s]} = \overset{P}{[A_r B_r]}$ nach der Annahme ist. Wenn also $A' = \mp A_s$ ist, so ist $B' = \pm B_s$. Wenn man nun die linige Aenderung von a in $a + \beta b$ einführt, so verwandelt sich, da B_r und A' kein a enthalten und also unverändert bleiben, während A_r in $A_r + \beta A'$ und B' in $B' + \beta B_r$ sich verwandelt, auch $\overset{P}{[A, \bar{A}(B, \bar{B})]} + \overset{P}{[A_s, \bar{A}(B, \bar{B})]} = \overset{P}{[A, \bar{A}(B, \bar{B})]} - \overset{P}{[A' \bar{A}(B' \bar{B})]}$ in $\overset{P}{[(A_r + \beta A') \bar{A}(B, \bar{B})]} - \overset{P}{[A' \bar{A}(B' + \beta B_r) \bar{B}]} = \overset{P}{[A, \bar{A}(B, \bar{B})]} - \overset{P}{[A' \bar{A}(B' \bar{B})]} + \beta \overset{P}{[A' \bar{A}(B, \bar{B})]} - \beta \overset{P}{[A' \bar{A}(B, \bar{B})]} = \overset{P}{[A, \bar{A}(B, \bar{B})]} - \overset{P}{[A' \bar{A}(B' \bar{B})]}$, d. h. der Wert jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt somit die ganze rechte Seite unserer Formel bei jener linigen Aenderung ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn sie geändert werden, sich zu Gliederpaaren gestalten, deren Summe ungeändert bleibt. Da somit beide Seiten der Formel bei liniger Aenderung ungeändert bleiben, so bleibt die Formel, wenn sie für irgend eine Reihe von Fachen gilt, auch bei deren liniger Aenderung bestehen.

3. Die Reihe von Fachen a, b, \dots sei endlich eine ganz beliebige, nur sei ihr Enflach $\overset{P}{[AB]} \geq 0$, so lässt sich nach 212 stets eine Reihe zu einander normiger Grösen erster Stufe a_1, a_2, \dots angeben, von der Art, dass $\overset{P}{[ab \dots]} = \overset{P}{[a_1 a_2 \dots]}$. Dann lässt sich aber nach 113 die Grösenreihe a, b, \dots aus a_1, a_2, \dots durch linige Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unsere Formel für die Reihe der zu einander normigen Fache a_1, a_2, \dots , also nach Beweis 2 auch für die durch fortgesetzte linige Aenderung daraus hervorgehende Reihe von Fachen, also auch für a, b, \dots , d. h. allgemein.

Erklärung. Die Summe $S[A_1 \bar{A} (B_1 \bar{B}) \dots (L_1 \bar{L}) (M_1 \bar{M})]$ 230.
bezeichnet die Summe, welche man erhält, wenn man aus den Größen erster Klasse des Zeuges $[AB \dots M]$ die Geschiedsfläche zur fovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von A beträgt, und jedes folches Geschiedsfläch als eine der Größen A_1 setzt, wenn man demnächst zu jedem dieser Geschiedsfläche, aus den in ihm nicht vorkommenden Größen erster Klasse des Zeuges $[AB \dots M]$ die Geschiedsfläche zur fovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von B beträgt und jedes folches Geschiedsfläch als eine der Größen B_1 setzt und so fortfährt bis zu M_m , endlich das Vorzeichen so bestimmt, dass $[A_1 B_1 \dots M_m] = [AB \dots M]$ ist.

Als Beispiel möge gelten $[ABC] = [(ab)(cd)e]$. Hier ist jene Summe die Summe von:

ab, cd, e	ad, bc, e	bc, ad, e	be, ac, d	ce, ab, — d
ab, ce, — d	ad, bc, — c	bc, ac, — d	be, ad, — c	ce, ad, b
ab, de, c	ad, ce, b	bc, dc, a	be, cd, a	ce, bd, — a
ac, bd, — e	ae, bc, — d	bd, ac, — c	cd, ab, e	de, ab, c
ac, be, d	ae, bd, c	bd, ae, c	cd, ae, — b	de, ac, — b
ac, de, — b	ae, cd, — b	bd, ce, — a	cd, bc, a	de, bc, a.

Satz. Wenn A und A von gleicher Klasse sind, ebenso B und 231.
 B , Γ und C u. f. w., M aber von gleicher oder niederer Klasse ist wie M und $[AB \dots LM] > 0$ ein Enfläch von Größen erster Klasse ist, auch $[A_1 B_1 \dots L_1 M_1]$ dieselben Größen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie $[AB \dots LM]$, nur in anderer Folge, und zwar in der Art, dass beide Zeuge einander gleich sind, auch ferner A_1 oben so viel Größen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie A , B_1 wie B u. f. w., so ist

$$[AB \dots LM \bar{A} B \bar{A} M] = S[A_1 \bar{A} (B_1 \bar{B}) \dots (L_1 \bar{L}) (M_1 \bar{M})].$$

Beweis. Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 229 bewiesen, denn es ist nach 229

$$\begin{aligned} [AB \bar{A} B] &= [A \bar{A} (B \bar{B})] + [A_1 \bar{A} (B_1 \bar{B})] + \dots \\ &= S[A_1 \bar{A} (B_1 \bar{B})]. \end{aligned}$$

Wendet man diesen Satz wiederholt an, so kommt man zu dem Satze für beliebig viele Fache oder Faktoren. Zunächst nämlich kann man das Zeug oder Produkt $[AB \dots LM]$ als aus den zwei Fachen oder Faktoren A und $[BC \dots LM]$ bestehend anfehen. Dann wird

$$\begin{aligned} \bar{[AB \dots LM \overline{AB \dots AM}]} &= \bar{[A(BC \dots LM) \overline{A(B \Gamma \dots AM)}]} \\ &= S[A_a \bar{A} (BC \dots LM)_b \overline{B \Gamma \dots AM}]. \end{aligned}$$

Der gefundene Ausdruck ist aus demselben Grunde wieder

$$= S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) (CD \dots LM)_c \overline{C \Gamma \dots AM}];$$

und setzt man dies fort, so erhält man zuletzt

$$= S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) \dots (L_l \bar{A}) (M_m \bar{M})].$$

232. Satz. Wenn in dem Innenzeuge oder innern Produkte

$\bar{[AB \dots \overline{AB \dots}]}$ die Größen A und A von gleicher Klasse sind, ebenso B und B und so fort, so ist

$$\bar{[AB \dots \overline{AB \dots}]} = \frac{\bar{[A'B' \dots]}}{\bar{[AB \dots]}},$$

wo $A' = S[A_a \bar{A} A_a]$, $B' = S[B_b \bar{B} B_b]$ u. f. w., und wo die A_a die Geschiedsfache aus den einfachen Fachen oder Faktoren des Enflaches $\bar{[AB \dots]}$ zur so vielen Klasse sind, als die Klasse von A beträgt und entsprechend die B_b u. f. w.

Beweis. Nach 231 ist

$$\begin{aligned} \bar{[AB \dots \overline{AB \dots}]} &= S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) \dots], \text{ wo} \\ [A_a B_b \dots] &= [AB \dots] \text{ ist.} \end{aligned}$$

Da nun A mit A von gleicher Klasse ist, also auch A_a mit A , so ist nach 195 $[A_a \bar{A}]$ eine Zahl und aus gleichem Grunde $[B_b \bar{B}]$, u. f. w. Folglich ist

$$S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) \dots] = S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) \dots] [A_a B_b \dots] : [A_a B_b \dots].$$

Also, da $[A_a B_b \dots]$ gleich $[AB \dots]$ ist,

$$= S[A_a \bar{A} (B_b \bar{B}) \dots] [A_a B_b \dots] : [AB \dots].$$

Oder, da nach 71 die Zahlfache beliebigen Fachen eines Zeuges zugeordnet werden können,

$$= S([A_a \bar{A}] A_a \dots [B_b \bar{B}] B_b \dots) : [AB \dots].$$

Hier enthält nach 231 in jedem Zeuge $[A_a B_b \dots]$ A_a andere Fache erster Klasse als B_b , u. f. w. Da nun aber die Zeuge, in denen A_a , B_b , ... gleiche Fache erster Klasse enthalten, null sind, so können wir diese Zeuge zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann nach 75 den Ausdruck

$$= {}^n[(S[A, \overline{A}A_r])(S[B, \overline{B}B_r]) \dots] : [AB \dots],$$

$$\text{d. h.} = \frac{{}^n[A'B' \dots]}{{}^p[AB \dots]}.$$

Satz. Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen mter 233. Klasse $A = abc \dots$ und $B = a'b'c' \dots$, deren jede aus m einfachen Facen besteht, ist gleich der Flachtausche oder Determinante (Δ) aus m Reihen von je m Gliedern, die man erhält, wenn man nach der Ordnung jeden einfachen Fac von A mit jedem von B zu einem Innenzeuge knüpft, d. h. es ist

$$[abc \dots (\overline{a'b'c' \dots})] = \Delta \begin{cases} [{}^n\overline{aa'}], [{}^n\overline{ab'}], [{}^n\overline{ac'}], \dots \\ [{}^n\overline{ba'}], [{}^n\overline{bb'}], [{}^n\overline{bc'}], \dots \\ [{}^n\overline{ca'}], [{}^n\overline{cb'}], [{}^n\overline{cc'}], \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$= S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots),$$

$$\text{wo } \alpha_1 = [{}^n\overline{aa'}], \alpha_2 = [{}^n\overline{ab'}], \alpha_3 = [{}^n\overline{ac'}], \dots$$

$$\beta_1 = [{}^n\overline{ba'}], \beta_2 = [{}^n\overline{bb'}], \beta_3 = [{}^n\overline{bc'}], \dots$$

$$\gamma_1 = [{}^n\overline{ca'}], \gamma_2 = [{}^n\overline{cb'}], \gamma_3 = [{}^n\overline{cc'}], \dots$$

u. f. w.

Beweis. Nach 232 ist

$$[abc \dots (\overline{a'b'c' \dots})] = \frac{{}^p[a_1 b_1 c_1 \dots]}{{}^n[abc \dots]},$$

$$\text{wo } a_1 = [{}^n\overline{aa'a}] + [{}^n\overline{ba'b}] + [{}^n\overline{ca'c}] + \dots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots$$

$$b_1 = [{}^n\overline{ab'a}] + [{}^n\overline{bb'b}] + [{}^n\overline{cb'c}] + \dots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots$$

$$c_1 = [{}^n\overline{ac'a}] + [{}^n\overline{bc'b}] + [{}^n\overline{cc'c}] + \dots = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots$$

.....

ist. Aber nach 98 ist $[{}^n a_1 b_1 c_1 \dots]$

$$= [(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots)(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots)(\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots) \dots]$$

$$= \Delta_a^m [abc \dots] = S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) [abc \dots].$$

Also

$$[abc \dots (\overline{a'b'c' \dots})] = \frac{{}^p[a_1 b_1 c_1 \dots]}{{}^n[abc \dots]} = \frac{S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) [abc \dots]}{{}^n[abc \dots]}$$

$$= S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots).$$

$$234. \quad \text{Satz.} \quad [ab\bar{a'b'}] = [a\bar{a}'(b\bar{b}')] - [a\bar{b}'(a'\bar{b})].$$

$$235. \quad \text{Satz.} \quad [ab]^2 = a^2b^2 - [a\bar{b}]^2.$$

$$236. \quad \text{Satz.} \quad [abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2[b\bar{c}]^2 - b^2[c\bar{a}]^2 - c^2[a\bar{b}]^2 \\ + 2[a\bar{b}(b\bar{c})(c\bar{a})].$$

$$237. \quad \text{Satz.} \quad [abcd]^2 = \Delta \left\{ \begin{array}{l} a^2, [a\bar{b}], [a\bar{c}], [a\bar{d}] \\ [b\bar{a}], b^2, [b\bar{c}], [b\bar{d}] \\ [c\bar{a}], [c\bar{b}], c^2, [c\bar{d}] \\ [d\bar{a}], [d\bar{b}], [d\bar{c}], d^2. \end{array} \right.$$

Die Sätze 234 bis 237 folgen unmittelbar aus 233, wenn man beachtet, dass nach 177 $a'\bar{b} = \bar{a}'b$ u. f. w.

$$238. \quad \text{Satz.} \quad [abc] = [a\bar{c}b] - [b\bar{c}a].$$

$$239. \quad \text{Satz.} \quad [abcd] = [a\bar{d}(bc)] + [b\bar{d}(ca)] + [c\bar{d}(ab)].$$

$$240. \quad \text{Satz.} \quad [abode] = [a\bar{e}(bcd)] + [b\bar{e}(cad)] + [c\bar{e}(abd)] + [d\bar{e}(cba)].$$

Die Sätze 238 bis 240 folgen wieder unmittelbar aus 231 oder 233, wenn man in 238 c, in 239 d und in 240 e als zweiten Fach des innern Zeuges oder Produktes $[A\bar{B}]$ betrachtet und diesem Fache noch 1 als zweiten Fach zufügt und demnächst beachtet, dass nach den Gesetzen der Flachung

$$[ab] = -[ba], [a(bc)] = [b(ca)] = [c(ab)] \text{ und}$$

$$[a(bcd)] = [b(cad)] = [c(abd)] = [d(cba)] \text{ ist.}$$

241. **Satz.** Wenn man aus einer Reihe von n Größen erster Klasse a_1, a_2, \dots, a_n die Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) A, A_1, \dots zu irgend einer Klasse (der m ten) bildet, und jedes derselben mit dem ergänzenden Geschiedsfläche B, B_1, \dots zu einem Innenzeuge oder innern Produkte knüpft, so ist die Summe dieser Zeuge null, d. h. es ist

$$[A\bar{B}] + [A_1\bar{B}_1] + \dots = 0.$$

Beweis. 1. Es sei zuerst angenommen $m \geq n - m$. Der Fach A hat als Geschiedsfläche (multiplikative Komplexion) von a_1, \dots, a_n die Form

$$A = [a_r a_s \dots a_z],$$

wo r, s, \dots, z beliebige m verschiedene unter den Zahlen $1 \dots n$ sind. Der Fach B muss als ergänzende Geschiedsfläche zu A diejenigen $n - m$ unter den Größen $a_1 \dots a_n$ als Fache enthalten, welche unter den Größen a_r, a_s, \dots, a_z nicht vorkommen. Es seien dies $a_{r'}, a_{s'}, \dots, a_{z'}$.

so dass also $B = (-1)^p [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u]$ ist. Ferner muss das durch $(-1)^p$ angedeutete Vorzeichen nach 229 so bestimmt werden, dass $[AB] = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ wird, d. h. dass

$$(-1)^p [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u \bar{a}_v \dots \bar{a}_z \bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u] = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n] \text{ ist. Von (a)}$$

gleicher Form sind die sämtlichen übrigen Zeuge $[A_i \bar{B}_i]$ u. s. w. Sollen die Geschiedsfläche A, B, A_1, B_1, \dots wohlgeordnete sein, so hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass $r < s < \dots < u < v < \dots < z$ und $r' < s' < \dots < u'$ sei. Fügen wir diese Bedingung hinzu, so wird

$$[A\bar{B}] + [A_1\bar{B}_1] + \dots = S(-1)^p [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u \bar{a}_v \dots \bar{a}_z (\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u)].$$

Fassen wir hier $\bar{a}_v \dots \bar{a}_z$ zu einem Fache oder Faktor zusammen und fügen dem zweiten Fache des Innenzeuges an letzter Stelle noch den Fach 1 hinzu, so wird die Bedingung von 231 erfüllt, also wird der obige Ausdruck

$$[A\bar{B}] + [A_1\bar{B}_1] + \dots = S(-1)^p [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u (\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u) (\bar{a}_v \bar{a}_w \dots \bar{a}_z)], \quad (b)$$

wobei noch die Gleichung (a) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen $r' < s' < \dots < u'$ und $v < w < \dots < z$ geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass $r < s < \dots < u$ sei, wegfällt, und die Summe sich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht.

In dieser Summe sind nun alle Glieder paarweise einander entgegengesetzt und heben sich also. Sei nämlich

$$(-1)^p [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u (\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u) (\bar{a}_v \bar{a}_w \dots \bar{a}_z)]$$

eines dieser Glieder, wo die Zeiger bestimmte (von einander verschiedene) Werte haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen p einen solchen Wert hat, dass die Gleichung (a) erfüllt wird. Da die Zeiger $r, r', s, s', \dots, u, u'$ alle von einander verschieden sind, so wird irgend einer der kleinste unter ihnen sein müssen, dies sei r , sein Fach $[\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u]$. Dies angenommen, vertausche man r und r' und ändere das Zeichen, so erhält man einen Ausdruck

$$(-1)^{p+1} [\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u (\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u) (\bar{a}_v \bar{a}_w \dots \bar{a}_z)], \quad (c)$$

so soll gezeigt werden, dass auch dieser Ausdruck gleichfalls als Glied in der obigen Summe (b) vorkommt. Sollte der Zeiger r grösser sein

als s' , so gebe man dem Fache $[\bar{a}_r \bar{a}_s \dots \bar{a}_u]$ unter den übrigen Flächen $[\bar{a}_s \bar{a}_r] \dots [\bar{a}_u \bar{a}_u]$ eine solche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Zeiger in jedem dieser Fläche kleiner sein

soll als der zweite Zeiger des nächst folgenden Flaches. Es werde diese Bedingung erfüllt, wenn man das Flach $\overset{n}{[a_r \bar{a}_r]}$ um d Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle diese Fläche Zahlen sind. Es ist nun noch zu beweisen, dass auch die durch Gleichung (a) ausgedrückte Bedingung für das so hervorgehende Glied gilt, d. h. dass sie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr $p + 1$ statt p setzt, auf der linken Seite a_r mit a_r vertauscht und diese beiden Fläche um d Stellen nach rechts rückt. Das Zeug, welches auf diese Weise aus $(-1)^p \overset{n}{[a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z a_r a_s \dots a_u]}$ hervorgeht, heisse D ; so ist

$$D = (-1)^{p+1} \overset{n}{[a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z a_r a_s \dots a_u]}.$$

Denn man kann in diesem Fläche D die Faktoren a_r und a_r gleichzeitig wieder um d Stellen zurückrücken, ohne dass sich nach 89 der Wert des Flaches ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck nach 88, wenn man a_r und a_r vertauscht,

$$\begin{aligned} D &= -(-1)^{p+1} \overset{n}{[a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z a_r a_s \dots a_u]} \\ &= (-1)^p \overset{n}{[a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z a_r a_s \dots a_u]} \\ &= \overset{n}{[a_1 a_2 \dots a_u]} \quad (\text{nach a}). \end{aligned}$$

Also ist jener Ausdruck (c) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (b) unterworfen sind, ist also, da jene Summe alle Glieder enthält, die jenen Bedingungen genügen, selbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt sich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$\begin{aligned} &(-1)^p \overset{n}{[a_r \bar{a}_r (a_s \bar{a}_s) \dots (a_u \bar{a}_u) (a_v a_w \dots a_z)]} \\ &+ (-1)^{p+1} \overset{n}{[a_r \bar{a}_r (a_s \bar{a}_s) \dots (a_u \bar{a}_u) (a_v a_w \dots a_z)]} = 0, \end{aligned}$$

da $(-1)^{p+1} = -(-1)^p$ ist und $\overset{n}{[a_r \bar{a}_r]} = \overset{n}{[a_r \bar{a}_r]}$ ist nach 197. Auf gleiche Weise findet sich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugehörtes, welches sich mit ihm aufhebt; also ist jene Summe null, also auch das dieser Summe gleiche

$$\overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \dots = 0.$$

2. Wenn $m < n - m$ ist, so ist nach 192, wenn noch $m(n - m - 1) = c$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \dots &= (-1)^c \overset{n}{[B\bar{A}]} + (-1)^c \overset{n}{[B_1 \bar{A}_1]} + \dots \\ &= (-1)^c (\overset{n}{[B\bar{A}]} + \overset{n}{[B_1 \bar{A}_1]} + \dots) \quad (148). \end{aligned}$$

Hier ist nach Beweis 1 die in Klammer geschlossene Summe 0, also

$$\overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \dots = (-1)^c (0) = 0 \quad (147).$$

$$\text{Satz. } [ab(\overline{cd})] + [ac(\overline{db})] + [ad(\overline{bc})] = 0. \quad 242.$$

$$\text{Satz. } [abc] + [bca] + [cab] = 0. \quad 243.$$

$$\text{Satz. } [abcd] - [boda] + [cdab] - [dabc] = 0. \quad 244.$$

Der Satz 242 folgt unmittelbar aus 241. Die Sätze 243 bis 244 folgen ebenso, wenn man im ergänzenden Geschiedsfläche statt der Größen a, b, c, d das Flach derselben mit 1 setzt.

Satz. Wenn man aus einer Reihe von $4m$ Größen erster Stufe $245.$ $a_1 \dots a_{4m}$ die sämtlichen Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) A, B, C, \dots zur $2m$ ten Klasse, welche eine dieser Größen, z. B. a_1 enthalten, bildet, und jede derselben mit den ergänzenden Geschiedsflächen A', B', C', \dots zu einem Innenzeuge knüpft, so ist die Summe dieser Zeuge null, d. h.

$$[AA'] + [BB'] + \dots = 0.$$

Beweis. Da A, B, \dots die sämtlichen a_1 enthaltenden Geschiedsfläche aus $4m$ Elementen zur $2m$ ten Klasse sind, so sind ihre ergänzenden Geschiedsfläche A', B', \dots die sämtlichen Geschiedsfläche aus denselben Größen erster Klasse zu derselben Klasse, welche a_1 nicht enthalten. Ferner, da die Klassen von $A, B, \dots, A', B', \dots$ gerade sind, so ist nach 89 auch $[AA'] = [A'A]$, und also nach 229, wenn A' das ergänzende Geschiedsflach von A ist, auch A das ergänzende Geschiedsflach von A' , und ebenso B das von B' , mithin nach 241

$$[AA'] + [BB'] + \dots + [A'A] + [B'B] + \dots = 0.$$

$$\text{Aber nach 197 ist } [AA'] = [A'A], [BB'] = [B'B] \dots$$

Also

$$2[AA'] + 2[BB'] + \dots = 0, \text{ d. h.}$$

$$[AA'] + [BB'] + \dots = 0.$$

16. Die Winkelfolgen der Innenzeuge.

Erklärung. Der Winkel AB (Zeichen $\angle AB$) heist der $246.$ Winkel zwischen 0 und π , diese miteingeschlossen, dessen Cosinus gleich dem durch die Zahlwerte α und β der Größen A und B geteilten Innenzeuge oder innern Produkte jener Größen A und B ist, sofern A und B gleicher Klasse und ungleich Null sind, d. h. es ist

$$\cos \angle AB = \frac{[AB]}{\alpha\beta} \quad \angle AB = M[0, \pi].$$

Der Sinus $\overset{n}{[abc \dots]}$, wo a, b, c, \dots Größen erster Stufe, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ihre Zahlwerte und der Sinus nicht eine Strichgröße (nicht negativ) ist, ist der Ausdruck, welcher dem Zahlwerte nach gleich $\frac{\overset{n}{[abc \dots]}}{\alpha\beta\gamma}$ ist, d. h. es ist

$$(\sin \overset{n}{[abc \dots]})^2 = \frac{\overset{n}{[abc \dots]}^2}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} \quad \sin \overset{n}{[abc \dots]} \geq 0.$$

247. **Satz.** Wenn a, b Größen erster Klasse sind, so ist

$$\sin \overset{n}{[ab]} = \sin \angle ab.$$

Beweis. Nach 246 ist

$$(\sin \overset{n}{[ab]})^2 = \frac{\overset{n}{[ab]}^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{a^2 b^2 - \overset{n}{[ab]}^2}{\alpha^2 \beta^2} \quad (235)$$

$$= \frac{\alpha^2 \beta^2 - \overset{n}{[ab]}^2}{\alpha^2 \beta^2} \quad (200)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left[\frac{\overset{n}{[ab]}}{\alpha\beta} \right]^2 \\ &= 1 - (\cos \angle ab)^2 \\ &= (\sin \angle ab)^2. \end{aligned} \quad (246)$$

Und da nach der Erklärung 246 $\sin \overset{n}{[ab]}$ nie eine Strichgröße (nie negativ) und $\angle ab$ ein Winkel zwischen 0 und π , also $\sin \angle ab$ auch nicht eine Strichgröße ist, so folgt aus $(\sin \overset{n}{[ab]})^2 = (\sin \angle ab)^2$, auch $\sin \overset{n}{[ab]} = \sin \angle ab$.

248. **Satz.** $\overset{n}{[AB]} = \alpha\beta \cos \angle AB$, wenn A und B von gleicher Klasse und α und β ihre Zahlwerte sind.

Beweis. Unmittelbar aus 246.

249. **Satz.** $\overset{n}{[ab]}^2 = (\alpha\beta \sin \angle ab)^2$, wo α und β die Zahlwerte von a und b sind.

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Nach 235 ist } \overset{n}{[ab]}^2 &= \alpha^2 \beta^2 - \overset{n}{[ab]}^2 \\ &= \alpha^2 \beta^2 - (\alpha\beta \cos \angle ab)^2 \\ &= \alpha^2 \beta^2 (1 - (\cos \angle ab)^2) \\ &= \alpha^2 \beta^2 (\sin \angle ab)^2. \end{aligned} \quad (248)$$

In diesen Formeln tritt der Gegensatz zwischen dem äußeren und inneren Zeuge in einfachster Gestalt hervor. Während das innere Zeug oder Produkt zweier Größen erster Klasse $\overset{n}{[ab]}$ gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den Cosinus des Zwischenwinkels ist, so ist das äußere Zeug oder Produkt derselben Größen

abgesehen vom \mp Zeichen, gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den sinus des Zwischenwinkels.

Satz. $[\overline{ab}(cd)] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle ab)(\sin \angle cd)\cos \angle ab(cd)$, 250.
wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlwerte von a, b, c, d find.

Beweis. Der Zahlwert von $[\overline{ab}]$ ist $([\overline{ab}]^2)^{1/2}$ und der von $[\overline{cd}]$ ist $([\overline{cd}]^2)^{1/2}$, also ist nach 248

$$\begin{aligned} [\overline{ab}(cd)] &= ([\overline{ab}]^2 [\overline{cd}]^2)^{1/2} (\cos \angle ab(cd)) \\ &= [(\alpha\beta \sin \angle ab)^2 (\gamma\delta \sin \angle cd)^2]^{1/2} \cos \angle ab(cd) \quad (249). \end{aligned}$$

Aber da das Zeug $\alpha\beta(\sin \angle ab)\gamma\delta(\sin \angle cd)$ ein Pluswert oder positiv ist, so hebt sich das fortschreitende Erhöhen dieser Größen durch 2 und $1/2$ auf, und es wird

$$[\overline{ab}(cd)] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle ab)(\sin \angle cd)\cos \angle ab(cd).$$

Satz. Die normige Zurückleitung von A auf eine Größe gleicher 251.
Klasse B ist im Zahlwerte gleich $A \cos \angle AB$.

Beweis. Wenn A' die normige Zurückleitung von A auf B ist, so ist nach 215

$$\begin{aligned} A' &= \frac{[\overline{AB}]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta(\cos \angle AB) \cdot B}{\beta^2} \quad (248) \\ &= \alpha(\cos \angle AB) \cdot \frac{B}{\beta}, \text{ also im Zahlwerte } = A \cos \angle AB. \end{aligned}$$

Satz. Wenn a, b, c, \dots zu einander normig find, so ist für 252.
jede aus ihnen hörig, d. h. als Vielfachenfumme derselben darstellbare
Größe k

$$\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots,$$

wo x, α, β, \dots die Zahlwerte von k, a, b, \dots find.

Beweis. Es sei $k = xa + yb + \dots$, so erhalten wir durch innere Webung oder Multiplikation mit a , weil $[\overline{ba}]$ u. f. w. null find,

$$[\overline{ak}] = x[\overline{aa}] = x\alpha^2 \quad (200),$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } x &= \frac{[\overline{ak}]}{\alpha^2} = \frac{\alpha x \cos \angle ak}{\alpha^2} \quad (248) \\ &= \frac{x}{\alpha} \cos \angle ak. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist $y = \frac{y}{\beta} \cos \angle bk$ u. f. w. Diese Werte von x, y, \dots in die obige Formel eingesetzt, giebt

$$k = \frac{x}{\alpha}(\cos \angle ak) \cdot a + \frac{x}{\beta}(\cos \angle bk) \cdot b + \dots, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots$$

253. **Satz.** Wenn a, b, c, \dots zu einander normig und k und l zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachensummen derselben darstellbar sind, so ist
- $$\cos \angle kl = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

Beweis. Nach 246 ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, \lambda$ die Zahlwerte von a, b, c, \dots, k, l sind,

$$\begin{aligned} \cos \angle kl &= \frac{[k\bar{l}]}{x\lambda} = \left[\frac{k}{x} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right] = \left[\left(\frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{a}{\alpha} \cos \angle al + \frac{b}{\beta} \cos \angle bl + \dots \right) \right] \quad (252) \\ &= \frac{a^2}{\alpha^2} (\cos \angle ak) \cos \angle al + \frac{b^2}{\beta^2} (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots, \end{aligned}$$

weil $[a\bar{b}]$ u. f. w. null sind. Da nun $a^2 = \alpha^2$, $b^2 = \beta^2$, u. f. w., so erhält man

$$\cos \angle kl = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

254. **Satz.** Statt eine GröÙe erster Klasse k auf eine andere l zurückzuleiten, kann man jene zuerst auf die GröÙen eines Normvereins zurückleiten und dann die so erhaltenen Zurückleitungen auf l zurückleiten, und diese letzten Zurückleitungen zufügen oder addieren, vorausgesetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normig sind.

Beweis. Es ist dieser Satz nur ein anderer Ausdruck für das in Satz 253 Bewiefene.

255. **Satz.** Wenn a, b, \dots zu einander normig und k und l zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachensummen derselben darstellbar und gleichfalls zu einander normig sind, so ist

$$0 = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man $\angle kl = 90^\circ$ setzt.

256. **Satz.** Wenn a, b, \dots zu einander normig sind, so ist für jedes zu ihnen hörige, oder als Vielfachensumme derselben darstellbare k

$$1 = (\cos \angle ka)^2 + (\cos \angle kb)^2 + \dots$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man $l = k$ setzt.

257. **Satz.** Wenn $a + b + \dots = 0$ ist, und α, β, \dots die Zahlwerte von a, b, \dots sind, so ist

$$a) \alpha : \beta : \dots = \sin a' : \sin b' : \dots,$$

wo a', b', \dots die zu a, b, \dots ergänzenden Geschiedsfläche aus a, b, \dots find,

$$b) \alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \dots = 0,$$

wo x eine beliebige Gröse ist,

$$c) (\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \dots = 0.$$

Beweis. 1. Modelt man die Gleichung

$$a + b + \dots = 0$$

mit $\overset{n}{[cd \dots]}$, so erhält man, da alle andern Glieder zwei gleiche Fache enthalten und also null werden,

$$\overset{n}{[acd \dots]} + \overset{n}{[bcd \dots]} = 0, \text{ also } \overset{n}{[acd \dots]}^2 = \overset{n}{[bcd \dots]}^2,$$

wo $\overset{n}{[acd \dots]}$ das Enflach aller Grösen a, b, c, \dots , mit Ausnahme von b und $\overset{n}{[bcd \dots]}$ das Enflach aller Grösen, mit Ausnahme von a ist. Somit ist nach 246

$$(\alpha \gamma \delta \dots)^2 (\sin \overset{n}{[acd \dots]})^2 + (\beta \gamma \delta \dots)^2 (\sin \overset{n}{[bcd \dots]})^2 = 0,$$

$$\text{oder } \alpha^2 (\sin \overset{n}{[acd \dots]})^2 = \beta^2 (\sin \overset{n}{[bcd \dots]})^2.$$

Nun ist $\overset{n}{[cad \dots]}$ das ergänzende Geschiedsfläche zu b , also $= b'$, und

$\overset{n}{[bcd \dots]}$ das ergänzende zu a , also $= a'$, also $\sin b' = \sin \overset{n}{[cad \dots]}$ und

$\sin a' = \sin \overset{n}{[bcd \dots]}$, also, da $\alpha, \beta, \sin a', \sin b'$ Pluswerte find,

$$\alpha \sin b' = \beta \sin a', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \sin a' : \sin b';$$

und somit allgemein

$$\alpha : \beta : \dots = \sin a' : \sin b' : \dots.$$

2. Webt oder multipliziert man die Gleichung $a + b + \dots = 0$ innerlich mit einer beliebigen, von null verschiedenen Gröse erster Stufe x , so erhält man

$$\overset{n}{[ax]} + \overset{n}{[bx]} + \dots = 0,$$

also wenn ξ der Zahlwert von x ist, so ist

$$\alpha \xi \cos \angle ax + \beta \xi \cos \angle bx + \dots = 0, \text{ d. h.}$$

$$\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \dots = 0.$$

3. Setzt man in die so erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werte von $\alpha : \beta : \gamma : \dots$ ein, so erhält man

$$(\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \dots = 0.$$

Die erste Formel des Satzes enthält für drei Grösen den bekannten Satz dass im Dreiecke die Seitenlängen sich wie die sinus der Gegenwinkel verhalten. Alle drei Formeln haben übrigens nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grösen a, b, \dots keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung $a + b + \dots = 0$ dargestellt ist, d. h. wenn die n Grösen a, b, \dots in keinem Gebiete, von niederer als $(n-1)$ ter Stufe vereinigt find.

258. **Satz.** $(a + b)^2 = a^2 + 2a\beta \cos \angle ab + \beta^2$, wo α, β die Zahlwerte von a, b find.

Beweis. Unmittelbar aus 223, wenn man die Werte nach 248 nimmt.

259. **Satz.** $(a + b + c)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \angle bc + 2\gamma\alpha \cos \angle ca + 2\alpha\beta \cos \angle ab$, wo α, β, γ die Zahlwerte von a, b, c find.

Beweis. Unmittelbar aus 224.

260. **Satz.** $(\sin \angle AB)(\sin \angle AB)\cos \angle AB(AB) = S(\cos \angle A, A)\cos \angle B, B$, wo A , die Geschiedsfläche aus den Größen erster Klasse von $[AB]$, zur so vielen Klasse, als die Klasse von A beträgt, und B , die ergänzenden Geschiedsfläche find.

Beweis. Nach 228 ist

$$[AB\overline{AB}] = S[A_a\overline{A}] [B_a\overline{B}]$$

Die Zahlwerte von A, B, A und B seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die Zahlwerte von $[AB]$ und von $[A_aB_a]$ sind nach 228 einander gleich. Nach 250 ist dann die erste Seite

$$[AB\overline{AB}] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle AB)(\sin \angle AB)\cos \angle AB(AB)$$

und nach 248 ist die zweite Seite

$$S[A_a\overline{A}(B_a\overline{B})] = \alpha\beta\gamma\delta S(\cos \angle A_a A)\cos \angle B_a B,$$

mithin ist

$$(\sin \angle AB)(\sin \angle AB) \cdot \cos \angle AB(AB) = S(\cos \angle A_a A)\cos \angle B_a B$$

261. **Satz.** $(\sin^n[abc \dots])(\sin^n[a'b'c' \dots])\cos \angle (abc \dots a'b'c' \dots)$
 $= A \begin{cases} \cos \angle aa', \cos \angle ab', \dots \\ \cos \angle ba', \cos \angle bb', \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$

Beweis. Nach 233 ist

$$[abc \dots \overline{a'b'c' \dots}] = A \begin{cases} aa', ab', ac', \dots \\ ba', bb', bc', \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$$

mithin wenn man nach 250 und nach 248 die Werte einführt und beide Seiten durch die gleichen Zahlwerte teilt, so folgt unmittelbar der Satz.

262. **Satz.**

$$(\sin^n[ab])(\sin^n[cd])\cos \angle ab(cd) = (\cos \angle ac)\cos \angle bd - (\cos \angle ad)\cos \angle bc.$$

Beweis. Unmittelbar aus 234, wenn man die Werte nach 250 und 248 einführt.

Satz.

263.

$$(\sin[ab])(\sin[ac])\cos \angle ab(ac) = \cos \angle bc - (\cos \angle ac) \cdot \cos \angle ab.$$

Beweis. Unmittelbar aus 261, wenn man a und c statt c und d

setzt, da $\cos \angle aa = \frac{[aa]}{a^2} = 1$ ist.

Der Satz enthält eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie.

$$\text{Satz. } (\sin \angle ab)^2 = 1 - (\cos \angle ab)^2. \quad 264.$$

$$\text{Satz. } (\sin \angle abc)^2 = 1 - (\cos \angle bc)^2 - (\cos \angle ac)^2 - (\cos \angle ab)^2 \quad 265.$$

$$+ 2(\cos \angle ab)(\cos \angle bc)\cos \angle ca.$$

Beweis. Unmittelbar aus 236, wenn man die Werte nach 249

und 248 einführt, da $\frac{a^2b^2c^2}{a^2\beta^2\gamma^2} = 1$ ist, wo α, β, γ die Zahlwerte von

a, b, und c.

$$\text{Satz. } (\sin[ab])(\sin[cd])\cos \angle ab(cd) + (\sin[ac])(\sin[bd])\cos \angle ac(bd) \quad 266.$$

$$+ (\sin[ad])(\sin[bc])\cos \angle ad(bc) = 0.$$

Beweis. Unmittelbar aus 242.

Satz. $(\sin A)(\sin A')\cos \angle AA' + (\sin B)(\sin B')\cos \angle BB' + \dots = 0$, 267.
wenn A, B, C, .. die Geschiedsfläche aus 4n Größen erster Stufe zur
2nten Klasse und A', B', C', .. deren ergänzende Geschiedsfläche sind.

Beweis. Unmittelbar aus 245.

Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

268. **Satz.** Wenn m Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten gegeben sind von der Form

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m = \nu_1$$

$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \cdots + \mu_2 x_m = \nu_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m = \nu_m, \text{ so ist}$$

$$x_1 = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}, \quad x_2 = \frac{\Delta^m(\alpha_a \nu_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)} \dots \dots$$

$$x_m = \frac{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \nu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \mu_m)}, \text{ wo } a, b, c, \dots, m \text{ sämtlich einander ungleich find.}$$

Beweis. Um eine Gleichung zu gewinnen, in welcher alle Unbekannten ausser einer, z. B. x_1 , verschwinden, bildet man neue Gleichungen, in denen stets nur die Vorzahlen einer Unbekannten vorkommen, indem man die Vorzahlen α_1, β_1, \dots mit e_1 , die α_2, β_2, \dots

mit e_2 u. s. w. vervielfacht, wo $[e_1 e_2 \cdots e_m] = 1$ ist, also

$$* \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_m e_m = a \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \cdots + \beta_m e_m = b \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \cdots + \mu_m e_m = m \\ \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3 + \cdots + \nu_m e_m = n \end{array} \right.$$

und bildet daraus die Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots + mx_m = n,$$

so ersetzt dieselbe nach 16 die gegebenen m Gleichungen; denn es ist dann $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \dots + \mu_1 x_m) e_1 = \nu_1 e_1$ u. f. w. Um nun ein x_a , z. B. x_1 zu finden, vervielfacht man die Gleichung $+$ mit $bc \dots m$, dann werden alle Glieder $bbc \dots m$, $bcc \dots m$, $\dots bc \dots mm$ nach 92 null und es bleibt nur

$$x_1 \overset{m}{[abc \dots m]} = \overset{m}{[nbc \dots m]}.$$

Und ebenso $x_2 \overset{m}{[abc \dots m]} = \overset{m}{[anc \dots m]}$ u. f. w.

$$x_m \overset{m}{[abc \dots m]} = \overset{m}{[abc \dots ln]}.$$

Hier kann nun $\overset{m}{[abc \dots m]}$ gleich Null oder ungleich Null sein.

Im letztern Falle kann man die Gleichung durch $\overset{m}{[abc \dots m]}$ teilen oder dividiren und erhält dann

$$x_1 = \frac{\overset{m}{[nbc \dots m]}}{\overset{m}{[abc \dots m]}}, \quad x_2 = \frac{\overset{m}{[anc \dots m]}}{\overset{m}{[abc \dots m]}}, \quad \dots \quad x_m = \frac{\overset{m}{[abc \dots ln]}}{\overset{m}{[abc \dots lm]}}.$$

oder wenn man für diese Größen $a, b, \dots m$, n die Werte nach * einführt, so erhält man nach 94

$$x_1 = \frac{S(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \overset{m}{[e_a e_b e_c \dots e_m]}}{S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \overset{m}{[e_a e_b e_c \dots e_m]}},$$

wo $a, b, c, \dots m$ sämmtlich einander ungleich sein müssen (da sonst $\overset{m}{[e_a e_b e_c \dots e_m]} = 0$ wird) und dieser Ausdruck nach 96

$$x_1 = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \overset{m}{[e_1 e_2 \dots e_m]}}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \overset{m}{[e_1 e_2 \dots e_m]}} = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)},$$

da $\overset{m}{[e_1 e_2 \dots e_m]} = 1$ gesetzt ist. Und entsprechend

$$x_2 = \frac{\Delta^m(\alpha_a \nu_b \gamma_c \dots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)} \dots x_m = \frac{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \lambda_l \nu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \lambda_l \mu_m)}.$$

Wenn das Flach $\overset{m}{[abc \dots m]}$, bez. $\overset{m}{[a_1 a_2 \dots a_m]}$ gleich Null ist, so herrscht nach 14 zwischen den Größen $a, b, \dots m$ eine Hörigkeit, dann lässt sich nach 19 aus ihnen eine freie Größenreihe aussondern, zu der die andern Größen hörig sind. Es seien $a_1, \dots a_r$ die gegenfeitig freien, $a_{r+1} \dots a_m$ die zu ihnen hörigen Größen, dann ist nach * auch n zu ihnen hörig. Dann ist also $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_r a_r = c$, wo $c = b - (x_{r+1} a_{r+1} + \dots + x_m a_m)$ und man erhält dann

$$x_1 = \frac{[ca_2a_3 \cdots a_r]}{[a_1a_2a_3 \cdots a_r]}, x_2 = \frac{[a_1ca_3 \cdots a_r]}{[a_1a_2a_3 \cdots a_r]}, \dots, x_r = \frac{[a_1a_2a_3 \cdots a_{r-1}c]}{[a_1a_2a_3 \cdots a_r]}.$$

Es wird zweckmässig sein, die Unbekannte für 2 und 3 Unbekannte zu bestimmen. Es ist für zwei Unbekannte

$$x_1 = \frac{\nu_1\beta_2 - \nu_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, x_2 = \frac{\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\nu_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.$$

Für 3 Unbekannte ist

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\nu_1\beta_2\gamma_3 - \nu_2\beta_1\gamma_3 - \nu_1\beta_3\gamma_2 + \nu_2\beta_3\gamma_1 + \nu_3\beta_1\gamma_2 - \nu_3\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1} \\ x_2 &= \frac{\alpha_1\nu_2\gamma_3 - \alpha_2\nu_1\gamma_3 - \alpha_1\nu_3\gamma_2 + \alpha_2\nu_3\gamma_1 + \alpha_3\nu_1\gamma_2 - \alpha_3\nu_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1} \\ x_3 &= \frac{\alpha_1\beta_2\nu_3 - \alpha_2\beta_1\nu_3 - \alpha_1\beta_3\nu_2 + \alpha_2\beta_3\nu_1 + \alpha_3\beta_1\nu_2 - \alpha_3\beta_2\nu_1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1} \end{aligned}$$

269. **Satz.** Wenn $m + 1$ Gleichungen ersten Grades mit m Unbekannten gegeben sind von der Form

$$\nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_0 x_3 + \cdots + \mu_0 x_m = 0$$

$$\nu_1 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m = 0$$

$$\vdots$$

$$\nu_m + \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m = 0,$$

so ist die Gleichung, aus welcher alle Unbekannte entfernt oder eliminirt sind, $\Delta^{m+1}(\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m \nu_n) = 0$, wo alle Zeiger, a, b, \dots, n einander ungleich sind.

Beweis. Man webe oder multiplizire die Vorzahlen, welche den Zeiger a haben, mit e_a , und setze e_0, e_1, \dots, e_m gegenseitig frei. Dann sei

$$\nu_0 e_0 + \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_m e_m = n$$

$$\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m = a$$

$$* \quad \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m = b$$

$$\vdots$$

$$\mu_0 e_0 + \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_m e_m = m.$$

Nun bilde man die Gleichung

$$+ \quad n + \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + m x_m = 0,$$

so ersetzt diese nach 15, wenn man die Werte aus * einführt, die sämtlichen gegebenen Gleichungen; denn es ist dann

$$\nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \gamma_0 x_3 + \cdots + \mu_0 x_m = 0 \text{ u. f. w.}$$

Flacht man diese Gleichung + mit $[ab \cdots m]$, so erhält man, da alle Fläche, in denen zwei Fache oder Faktoren gleich null sind, (z. B. $[aab \cdots m]$) die Gleichung $[nab \cdots m]$, aus welcher alle Unbekannte ent-

Dann erhält man

$$u_1 + u_2x + u_3x^2 + \cdots + u_{m+n}x^{m+n-1} = 0.$$

Flacht man diese Gleichung mit den Facen $u_2, u_3, \cdots u_{m+n}$, so erhält man $[u_1 u_2 u_3 \cdots u_{m+n}] = 0$, da alle Fläche, welche zwei gleiche Facen oder Faktoren enthalten, Null werden, und hier sind alle Höhen von x entfernt, und hat man demnach die Gleichung, aus welcher x entfernt ist.



Die

Erweiterungslehre

der

höhere Zweig der Synthese.



Vierter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.



Mathematical Analysis

Mathematical Analysis

Mathematical Analysis

Vorwort.

Die Erweiterungslehre oder der höhere Zweig der Synthese ist zur Zeit nur erst in ihren Anfängen zu einer wissenschaftlichen Darstellung gediehen.

Der Verfasser hat nur 57 Sätze derselben abgeleitet und muss es sich in seinem hohen Alter versagen, die Folgelehre oder Funktionenlehre dieses Zweiges zu entwickeln.

Er verweist deshalb auf die Ausdehnungslehre von H. Grassmann, Nummer 410 bis 527 und überlässt die weitere Entwicklung dieses Zweiges jüngeren Kräften.

Der Verfasser.

the same time, the fact that the same person can be both a subject and an object of a relation, and that the same relation can be both a subject and an object of a relation, is a fact which is not captured by the traditional logic. This is because the traditional logic is based on the assumption that the subject and the object of a relation are distinct entities, and that the relation itself is a distinct entity. However, in the modern logic, the subject and the object of a relation are not necessarily distinct entities, and the relation itself is not necessarily a distinct entity. This is why the modern logic is able to capture the fact that the same person can be both a subject and an object of a relation, and that the same relation can be both a subject and an object of a relation.

1. Die Flechtung oder die algebraische Multiplikation.

Erklärung. Das Flecht oder das algebraische Produkt 1. heist ein Zeug oder Produkt von Einheiten erster Klasse, die Webung heist eine Flechtung, eine algebraische Multiplikation, wenn

1. jedes Zeug von gleichen oder ungleichen Einheiten erster Klasse ungleich Null ist,
2. für jedes Zeug von Einheiten erster Klasse die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung der Fache oder Faktoren gelten,
3. alle Zeuge von n Einheiten erster Klasse, welche nicht ganz dieselben Fache enthalten, gegenseitig frei sind.

Die Einheit n ter Klasse ist ein Zeug von n Einheiten erster Klasse.

Das Zeichen des Flechtes ist das Nebeneinanderschreiben der Fache oder Faktoren ohne Flachklammer, z. B. $ab =$ Flecht a mal b .

Satz. $e_a e_a \geq 0$ $e_a e_b e_c \geq 0$. 2.

Jedes Flecht von gleichen oder ungleichen Einheiten ist ungleich Null.

Satz. $e_r(e_s e_t) \neq e_r e_s e_t$ $e_r e_s \neq e_s e_r$ 3.

*) wo e_r, e_s, e_t Einheiten erster Klasse sind oder

Für jedes Flecht von Einheiten erster Klasse gelten die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung.

Satz. Die Einheiten n ter Klasse, welche nicht ganz dieselben 4. Einheiten erster Klasse als Fache oder Faktoren enthalten, sind gegenseitig freie Einheiten.

Satz. Für die Flechtung oder algebraische Multiplikation 5. gelten alle Gesetze der Beziehung, der Einigung und der Vertauschung der Fache oder Faktoren, kurz alle Gesetze der Verwebung.

Beweis. Aus den Grundformeln der Einigung und der Vertauschung der Einheiten folgen nach Zahlenlehre 59 und 62 alle Gefetze der Einigung und der Vertauschung der Fache, wenn diese aus beliebigen Grösen bestehen. Die Gefetze der Beziehung gelten nach Ausdehnungslehre Satz 75.

$$6. \quad \text{Satz. } (S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b b_b) \cdot (S\gamma_c c_c) \cdots (S\mu_m m_m) = \\ S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) (a_a b_b c_c \cdots m_m)$$

wo $a_a, b_b, c_c, \dots, m_m$ beliebige Grösen, $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \dots, \mu_m$ beliebige Zahlen. Das Flecht mehrer Vielfachensummen aus beliebigen Grösen erhält man, indem man jede Gröse der ersten Vielfachensumme mit jeder der zweiten, das Zeug derselben mit jeder der dritten u. s. w. zu einem Teilzeuge flicht (multipliziert), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Grösen gehörigen Vorzahlen vervielfacht und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addirt.

Beweis. Unmittelbar aus Ausdehnungslehre Satz 75.

$$7. \quad \text{Satz. Das Flecht von } n \text{ Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse ist eine Vielfachensumme von Einheiten } n\text{ter Klasse.}$$

Beweis. Unmittelbar aus Ausdehnungslehre Satz 76.

Die Flechte der Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse entwickeln sich nach den Sätzen der Ausdehnungslehre 74 und 75.

$$8. \quad \text{Satz. } (S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b a_b) \cdots (S\mu_m a_m) = \\ S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) (a_a a_b a_c \cdots a_m)$$

wo a_a, a_b, \dots, a_m beliebige Grösen erster Klasse im Gebiete n ter Stufe und $\alpha_a, \beta_b, \dots, \mu_m$ beliebige Zahlen sind.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 6.

Da für die Flechte Vertauschung der Fache oder Faktoren gilt, so kann man bei allen den Zeugen, welche dieselben m Grösen a_a, b_b, \dots, m_m enthalten, die Fache so umordnen, dass die Zeiger der Grösen steigend geordnet sind, und kann dann alle diese Zeuge in ein Glied zusammenfassen, indem man die Summe der Vorzahlen dieser sämtlichen Zeuge in eine Vorzahl vereinigt und diese mit dem Flechte vervielfacht.

Die Vorzahl ist dann die Summe der Tausche oder Permutationen aus den m Fachen $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \dots, \mu_m$, welche man erhält, wenn man jede der m Zahlen α_a , z. B. α_c mit jeder der andern Zahlen $\beta, \gamma, \dots, \mu$ webt, sofern alle diese Zahlen andere Zeiger als α_a , hier also als α_c haben. Es wird also α_c mit den sämtlichen Tauschen aus den $m-1$ Fachen $\beta_b, \gamma_c, \dots, \mu_m$, wo b, c, \dots, m ungleich c ist, gewebt. Die Anzahl der Stücke in dieser Summe ist also gleich der Anzahl der Tausche aus m Grösen d. h. $m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$

Sind unter den m Grösen p gleiche, so ist die Anzahl der Tausche

$$\frac{m!}{p!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$$

Wir nennen die Summe aus diesen Tauschen die **Flechttausche**.

Es ist demnach $S(\alpha_a \beta_b) a_1 a_2 = (\alpha_1 \beta_2 + \beta_2 \alpha_1) a_1 a_2$.

Es ist $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c) a_1 a_2 a_3 =$

$$(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_1) a_1 a_2 a_3.$$

Es ist $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \delta_d) a_1 a_2 a_3 a_4 =$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \delta_4 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_4 \delta_2 + \alpha_1 \beta_4 \gamma_2 \delta_3 + \alpha_1 \beta_4 \gamma_3 \delta_2 \\ &+ \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \delta_4 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_4 \delta_1 + \alpha_2 \beta_4 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_2 \beta_4 \gamma_3 \delta_1 \\ &+ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \delta_4 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_4 \delta_2 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_4 \delta_1 + \alpha_3 \beta_4 \gamma_1 \delta_2 + \alpha_3 \beta_4 \gamma_3 \delta_1 \\ &+ \alpha_4 \beta_1 \gamma_2 \delta_3 + \alpha_4 \beta_1 \gamma_3 \delta_2 + \alpha_4 \beta_2 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_4 \beta_2 \gamma_3 \delta_1 + \alpha_4 \beta_3 \gamma_1 \delta_2 + \alpha_4 \beta_3 \gamma_2 \delta_1) a_1 a_2 a_3 a_4 \end{aligned}$$

Ferner ist, wenn $a_1 = a_2$ ist

$$S(\alpha_a \beta_b \gamma_c) a_1 a_1 a_3 = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_1) a_1 a_1 a_3$$

$$\begin{aligned} S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \delta_d) a_1 a_1 a_3 a_4 &= (\alpha_1 \beta_1 \gamma_3 \delta_4 + \alpha_1 \beta_1 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_4 \delta_1 \\ &+ \alpha_1 \beta_4 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_1 \beta_4 \gamma_3 \delta_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_4 \delta_1 + \alpha_3 \beta_4 \gamma_1 \delta_1 + \\ &+ \alpha_4 \beta_1 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_4 \beta_1 \gamma_3 \delta_1 + \alpha_4 \beta_3 \gamma_1 \delta_1) a_1 a_1 a_3 a_4 \end{aligned}$$

Ebenso ist, wenn $a_1 = a_2 = a_3$ ist

$$S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \delta_d) a_1 a_1 a_1 a_4 = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_1 \beta_1 \gamma_4 \delta_1 + \alpha_1 \beta_4 \gamma_1 \delta_1 + \alpha_4 \beta_1 \gamma_1 \delta_1) a_1 a_1 a_1 a_4.$$

Diese Beispiele werden genügen, um die Aufstellung dieser Flechttausche zu zeigen.

Erklärung. Die **Flechttausche** oder **Demutante** aus 9. m Reihen von je m Zahlen $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \dots, \mu_m$ heist die Summe von Zeugen, welche man aus dem nach steigenden Zeigern geordneten Zeuge $\alpha_a \beta_b \dots \mu_m$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die untern Zeiger auf alle möglichen Weisen versetzt, während man die Reihenfolge der Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ unverändert lässt.

Wenn von den untern Zeigern p gleich sind, so ergibt deren Versetzung kein neues Glied.

Das Zeichen der **Flechttausche** aus m Reihen zu m Zahlen ist kurz $D^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)$.

Als Beispiele gebe ich noch

$$D^3(\gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3) = \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3 + \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3 + \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3 + \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3 + \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3 + \gamma_3 \epsilon_3 \vartheta_3.$$

Die wohlgeordneten Flechte mter Klasse $(a_a a_b a_c \dots a_m)$ aus dem Gebiete nter Stufe $a_1 a_2 \dots a_n$ bilden die Vollgeschiede oder Komplexionen mit Wiederholung aus n Einfachen oder Elementen zur mten Klasse, jedes Vollgeschiede als ein Flecht betrachtet. Ich nenne diese Flechte die **Geschiedsflechte**.

Erklärung. Die **Geschiedsflechte** aus n Größen zur 10. mten Klasse heissen die Flechte mit m Fachen aus diesen Größen, welche man erhält, wenn man diese Größen nach steigendem Zeiger in eine Reihe ordnet und dann jede dieser Größen mit jeder nicht frühern flicht, dann weiter jedes Flecht aus a Größen mit jeder vor der letzten Größe dieses Flechtes in der Reihe der Größen nicht vorhergehenden Größe flicht und so fortfährt, bis in jedem Flechte m der Größen als Fache oder Faktoren enthalten sind.

Das Zeichen der Geschiedsflechte aus n Größen zur m ten Klasse ist $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{\circ \cdot m}$.

Einige Beispiele werden eine Anschauung der Geschiedsflechte geben. Es ist

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2, \dots, a_6)^{\circ \cdot 1} &= a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
 (a_1, a_2, \dots, a_6)^{\circ \cdot 2} &= a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & a_1 a_4 & a_1 a_5 & a_1 a_6 \\
 & & a_2 a_2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 & a_2 a_5 & a_2 a_6 \\
 & & & a_3 a_3 & a_3 a_4 & a_3 a_5 & a_3 a_6 \\
 & & & & a_4 a_4 & a_4 a_5 & a_4 a_6 \\
 & & & & & a_5 a_5 & a_5 a_6 \\
 & & & & & & a_6 a_6 \\
 (a_1, a_2, \dots, a_6)^{\circ \cdot 3} &= a_1 a_1 a_1 & a_1 a_1 a_2 & a_1 a_1 a_3 & a_1 a_1 a_4 & a_1 a_1 a_5 & a_1 a_1 a_6 \\
 & & a_1 a_2 a_2 & a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_2 a_5 & a_1 a_2 a_6 \\
 & & & a_1 a_3 a_3 & a_1 a_3 a_4 & a_1 a_3 a_5 & a_1 a_3 a_6 \\
 & & & & a_1 a_4 a_4 & a_1 a_4 a_5 & a_1 a_4 a_6 \\
 & & & & & a_1 a_5 a_5 & a_1 a_5 a_6 \\
 & & & & & & a_1 a_6 a_6 \\
 & & a_2 a_2 a_2 & a_2 a_2 a_3 & a_2 a_2 a_4 & a_2 a_2 a_5 & a_2 a_2 a_6 \\
 & & & a_2 a_3 a_3 & a_2 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_5 & a_2 a_3 a_6 \\
 & & & & a_2 a_4 a_4 & a_2 a_4 a_5 & a_2 a_4 a_6 \\
 & & & & & a_2 a_5 a_5 & a_2 a_5 a_6 \\
 & & & & & & a_2 a_6 a_6 \\
 & & a_3 a_3 a_3 & a_3 a_3 a_4 & a_3 a_3 a_5 & a_3 a_3 a_6 \\
 & & & a_3 a_4 a_4 & a_3 a_4 a_5 & a_3 a_4 a_6 \\
 & & & & a_3 a_5 a_5 & a_3 a_5 a_6 \\
 & & & & & a_3 a_6 a_6 \\
 & & & & a_4 a_4 a_4 & a_4 a_4 a_5 & a_4 a_4 a_6 \\
 & & & & & a_4 a_5 a_5 & a_4 a_5 a_6 \\
 & & & & & & a_4 a_6 a_6 \\
 & & & & & a_5 a_5 a_5 & a_5 a_5 a_6 \\
 & & & & & & a_5 a_6 a_6 \\
 & & & & & & a_6 a_6 a_6
 \end{aligned}$$

Jeder, der die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass diese Geschiedsflechte nichts anderes sind, als die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung), sofern man jedes Geschiede als ein Flecht auffasst.

Die Anzahl dieser Geschiedsflechte ist demnach

$$n^{\circ \cdot m} = \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} = (n+m-1)^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!},$$

wo $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$.

11. **Satz.** Die Geschiedsflechte aus n Größen zur m ten Klasse sind die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung) aus diesen n Größen zur m ten Klasse, wenn man jedes Geschiede als ein Flecht betrachtet.

Beweis. Unmittelbar aus Satz 10 und den Vorbemerkungen.

12. **Satz.** $(S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b a_b) \cdots (S\mu_m a_m) = S D^m \cdot (a_r a_s a_t \cdots)$

wo $r \leq s \leq t \leq \dots$

Jedes Flecht von m Größen erster Klasse, welche zu n gegenseitig freien Größen $a_1 \dots a_n$ hörig sind, ist die Vielfachensumme der Geschiedsflechte dieser freien Größen zur m ten Klasse, in welcher die Vorzahl jedes Geschiedsflechtes die Flechttausche oder Demutante aus denjenigen m Vorzahlen ist, welche zu den m hörigen Größen des Geschiedsflechtes gehören.

Beweis. Unmittelbar nach 8 in Verbindung mit 9 und 10.

Satz. Wenn ein Flecht null ist, so muss notwendig eins seiner 13. Fache oder Faktoren null sein, oder wenn $AB = 0$ und $A \geq 0$, so ist $B = 0$.

Beweis. Im allgemeinsten Falle sind A und B Vielfachensummen von Flechten, deren Fache oder Faktoren Vielfachensummen der Einheiten erster Klasse a_1, a_2, \dots, a_n sind. Es sei demnach
 $A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots = \sum a_a E_a$ $B = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \dots = \sum \beta_\beta F_\beta$
 so sind nach 12 E_a und F_β sämtlich Geschiedsflechte der Einheiten erster Klasse und jedes derselben nach Satz 1, ungleich Null.

Ebenso ist nach 12

$AB = \sum a_a \beta_\beta E_a F_\beta$ und auch hier $E_a F_\beta \geq 0$ und $E_a F_\beta$ ein Geschiedsflecht der Einheiten erster Klasse. Ordnet man hier in jedem Geschiedsflechte die Einheiten der ersten Klasse steigend, so dass $E_a F_\beta = G_r$ und fasst man alle die Glieder, welche dasselbe Geschiedsflecht G_r enthalten, in eine Summe $\sum a_a \beta_\beta G_r$ zusammen, so muss dies Geschiedsflecht G_r nach 1, ungleich Null, mithin nach Ausdehnungslehre 14 die zu G_r gehörige Summe der Vorzahlen $\sum a_a \beta_\beta = 0$ sein. Da nun nach der Voraussetzung $A \geq 0$ ist, so muss nach 1, und nach Ausdehnungslehre 13 wenigstens eine der Vorzahlen a_a ungleich Null sein, es sei dies a_r und sei $r = 1 + q$, so ist $0 = \sum a_a \beta_\beta = a_r \beta_q + \sum a_a \beta_\beta$, wobei auf der rechten Seite kein Glied der Summe mit $a_r \beta_q$ gleich sein darf, dagegen $a + b = 1 + q$ sein muss. Hier darf a zunächst nicht den Wert 1 haben, denn sonst hätten wir zu a_r auch E_1 und zu β_q auch F_q gehörig, also auch $b = q$, was gegen die Bedingung, mithin muss $a > 1$, mithin $b < q$ sein, mithin ist

$$0 = a_r \beta_q + \sum a_a \beta_\beta, \quad \text{wo } a > 1, b < q \text{ ist.}$$

Sei nun zuerst $r = 2$, d. h. $q = 1$, so fällt die $\sum a_a \beta_\beta$ ganz fort, da $b < q$ nicht erfüllt werden kann, mithin ist dann $0 = a_r \beta_1$ und da nach der Voraussetzung $a_r \geq 0$, so muss $\beta_1 = 0$ sein.

Sei nun $r = 3$, d. h. $q = 2$, so fällt, da $b < 2$ sein muss und $\beta_1 = 0$ ist, die Summe $\sum a_a \beta_\beta$ gleichfalls fort. Mithin ist wieder $0 = a_r \beta_2$ und da $a_r \geq 0$, so ist $\beta_2 = 0$.

Und so fortschreitend ergibt sich $\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ u. f. w., also ist auch $B = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \dots = 0$.

14. **Satz.** Wenn in zwei gleichen Flechten, deren jedes aus 2 Fachen oder Faktoren besteht, das eine Fach in beiden gleich ist und zugleich ungleich null ist, so muss auch das andere Fach in beiden gleich sein oder wenn $AB = AC$ und $A \neq 0$, so ist $B = C$.

Beweis. Da $AB = AC$, so ist $0 = AB - AC = A(B - C)$. Also da $A \neq 0$ ist, nach 13, auch $B - C = 0$, d. h. $B = C$.

Aus diesem Satze folgt, dass wenn das Zeug oder Produkt zweier geflochtenen Größen gleich ist und das eine Fach, der eine Faktor, in beiden gleich ist und zugleich ungleich null ist, auch das andere Fach gleich ist, also nur einen und nicht mehrere Werte hat, dies war aber die Bedingungsungleichung für die Teilung (Zahlenlehre 164), wir können also auch für die Flechtung eine Teilung bestmöglich einen Bruch einführen.

15. **Erklärung.** Der Flechtbruch $A : B$ (gelesen A geteilt durch B, kurz A durch B), heist die GröÙe, welche mit B geflochten A giebt oder $A : B \cdot B = A$.

16. **Satz.** $AB : B = A$.

Ein Flecht von zwei Fachen oder Faktoren giebt durch das eine Fach geteilt das andere Fach.

Beweis. Es ist, wenn man in Satz 15 AB statt A setzt

$$AB : B \cdot B = AB$$

mithin ist nach 14 auch $AB : B = A$.

17. **Satz.** Alle Gesetze der Zahlenlehre fürs Teilen oder Dividiren gelten auch fürs Teilen der Flechte.

Beweis. Die Gesetze der Zahlenlehre fürs Teilen folgen unmittelbar aus den beiden Sätzen

$$A : B \cdot B = A \quad \text{und} \quad AB : B = A.$$

Da diese nach 15 und 16 gelten, da ebenso nach 5 alle Gesetze der Verwebung und der Beziehung gelten, so gelten also auch alle Gesetze, welche in der Zahlenlehre für Zeuge und Brüche abgeleitet sind.

2. Die Hauptformeln und die Hauptgrößen.

Erklärung. Zahlgröße heist eine Größe der Zahlenlehre, 18. d. h. eine Größe, welche ausser der Vornzahl, sei diese ganz oder gebrochen, Endzahl oder Unzahl (irrational), sei sie eine Reinzahl (reell) oder eine Izahl (imaginär), nur eine Einheit e enthält, z. B. ae .

Hauptgröße heist eine Größe, welche sich als eine Vielfachensumme von mehreren gegenfeitig freien Größen oder Einheiten darstellen lässt.

Zahlformel heist eine Formel, welche für beliebige Werte einer veränderlichen Größe in derselben stets einer Zahlgröße gleich ist.

Hauptformel heist eine Formel, welche für beliebige Werte einer veränderlichen Größe in derselben einer Hauptgröße gleich ist.

Satz. Jede Zahlformel beliebig vieler Zahlgrößen lässt sich 19. als Zahlformel einer einzigen Hauptgröße darstellen und zwar, wenn

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ist, so ist $y = f([x e_1], [x e_2], \dots, [x e_n]) = \varphi x$

wo $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ist

und e_1, e_2, \dots, e_n einen einfachen Normverein bilden.

Beweis. Wenn e_1, e_2, \dots, e_n einen einfachen Normverein bilden und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

ist, so ist nach Ausdehnungslehre 186 $e_a \bar{e}_b = 0$, wenn $a \neq b$ ist und ist $e_a \bar{e}_a = 1$, mithin ist

$$[x e_1] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) e_1] = x_1$$

ebenso ist $[x e_2] = x_2, \dots, [x e_n] = x_n$, folglich

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f([x e_1], [x e_2], \dots, [x e_n]) = \varphi x$$

und hier ist y als eine Zahlformel einer einzigen Hauptgröße dargestellt.

20. **Satz.** Jeder Verein von Zahlformeln beliebig vieler Zahlgrößen lässt sich als eine Hauptformel einer einzigen Hauptgröße darstellen, und zwar, wenn

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

ist, so ist dieser Verein von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x),$$

wo

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\varphi_a(x) = f_a([x e_1], [x e_2], \dots, [x e_n])$$

$$F(x) = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \dots + e_m \varphi_m(x)$$

ist und e_1, \dots, e_n und e_1, \dots, e_m einfache Normvereine bilden.

Beweis. Nach 19 ist, wenn $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ gesetzt wird

$$y_a = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_a([x e_1], [x e_2], \dots, [x e_n]) = \varphi_a x$$

da aber e_1, e_2, \dots, e_m gegenseitig freie Größen sind nach Ausdehnungslehre 206, so ist nach 15 die eine Hauptformel

$$y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_m e_m = e_1 \varphi_1 x + e_2 \varphi_2 x + \dots + e_m \varphi_m x.$$

gleichbedeutend mit den m Formeln

$$y_1 = \varphi_1 x, \quad y_2 = \varphi_2 x, \quad \dots, \quad y_m = \varphi_m x.$$

Bezeichnen wir jene Hauptformel mit $y = Fx$, so ist also

$$y = Fx = e_1 \varphi_1 x + e_2 \varphi_2 x + \dots + e_m \varphi_m x$$

gleichbedeutend mit den m gegebenen Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ u. f. w.}$$

21. **Satz.** Jeder Verein von Formeln beliebig vieler veränderlichen Größen lässt sich durch eine Formel einer veränderlichen Größe ersetzen, vorausgesetzt, dass sowohl die unabhängigen als die abhängigen veränderlichen Größen sich als Vielfachensummen eines und desfelben Vereines von Einheiten darstellen lassen.

Beweis. Der Satz ist in 20 für einen beliebigen Verein von Zahlformeln beliebig vieler Zahlgrößen bewiesen.

Alle Vielfachensummen eines Vereines von n Einheiten lassen sich aber nach Ausdehnungslehre 193 als Vielfachensummen eines einfachen Normvereines von n Größen darstellen. Es bestehe der Normverein, dessen Vielfachensummen die unabhängigen veränderlichen Größen x, y, \dots darstellen, aus den Einheiten e_1, e_2, \dots, e_n und der, dessen Vielfachensummen die abhängigen veränderlichen Größen u, v, \dots darstellen, aus den Einheiten ${}^1e, {}^2e, \dots, {}^me$.

Ferner sei

$$\begin{aligned}x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n, \dots \\u &= u_1 {}^1e + u_2 {}^2e + \dots + u_m {}^me \\v &= v_1 {}^1e + v_2 {}^2e + \dots + v_m {}^me \dots\end{aligned}$$

wo alle Vorzahlen $(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots)$ Zahlgrößen sind und seien

$$u = F(x, y, \dots) \quad v = \Phi(x, y, \dots)$$

die gegebenen Formeln für u und v . Setzt man nun die obigen Werte für die Größen u, v, \dots, x, y, \dots ein, so erhält man

$$u_1 {}^1e + u_2 {}^2e + \dots + u_m {}^me = F(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \dots).$$

Hier ist die rechte Seite der Gleichung eine Hauptformel mit den Zahlgrößen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \dots$. Diese Hauptformel soll einer Vielfachensumme der Einheiten ${}^1e, {}^2e, \dots, {}^me$ gleich sein, sie muss also die Form haben ${}^1ef_1 + {}^2ef_2 + \dots + {}^mef_m$, wo f_1, f_2, \dots, f_m Zahlformeln von $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, \dots$ sind. Man hat mithin die Gleichung

$$u = u_1 {}^1e + u_2 {}^2e + \dots + u_m {}^me = {}^1ef_1 + {}^2ef_2 + \dots + {}^mef_m = F(x, y)$$

und diese Gleichung wird nach 15 ersetzt durch den Verein von Zahlgleichungen

$$u_1 = f_1, u_2 = f_2, \dots, u_m = f_m.$$

Auf gleiche Weise wird die Gleichung $v = \Phi(x, y)$ ersetzt durch den Verein von Zahlgleichungen

$$v_1 = \varphi_1, v_2 = \varphi_2, \dots, v_m = \varphi_m$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ wieder Zahlformeln der Zahlgrößen $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, \dots$ sind. Folglich werden die gegebenen Gleichungen

$$u = F(x, y, \dots), v = \Phi(x, y, \dots), \dots$$

ersetzt durch den Verein von Zahlgleichungen

$$u_1 = f_1, u_2 = f_2, \dots, u_m = f_m,$$

$$v_1 = \varphi_1, v_2 = \varphi_2, \dots, v_m = \varphi_m,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

wo $f_1 \dots f_m, \varphi_1 \dots \varphi_m$ Zahlformeln der Zahlgrößen $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n, \dots$ sind. Nach 20 lässt sich nun ein solcher Verein von Zahlformeln durch eine Hauptformel einer einzigen Hauptgröße ersetzen, also lässt sich auch der gegebene Verein von Formeln durch eine Hauptformel einer einzigen Hauptgröße ersetzen.

3. Die Lückenzeuge und die Lückenausdrücke.

22. **Erklärung.** Ein Zeug oder Produkt mit n Lücken oder ein Nlückenzeug heist ein Zeug oder Produkt von beliebig vielen Fachen oder Faktoren, in welchem n Grösen erster Klasse x_1, x_2, \dots, x_n als Lückenbüser vorkommen, welche als Fache in die n Lücken eintreten sollen.

Das Zeichen dieses Lückenzeuges ist $Pl^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Das Nlückenzeug ist gleich der Summe der sämtlichen Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man in dem $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ den Grösen x_1, x_2, \dots, x_n alle möglichen Folgen giebt, und diese Summe durch die Anzahl dieser Tausche teilt.

Es wird nötig sein, den neuen Begriff an einigen Beispielen zu erläutern. Es ist demnach

$$Pl^1x = Px.$$

Sei z. B. $P = a_1 a_2 | a_3 a_4$, so ist $Pl^1x = a_1 a_2 x a_3 a_4$.

Es ist ferner

$$Pl^2(xy) = (Pxy + Pyx) : 2.$$

Sei z. B. $P = a_1 a_2 | a_3 a_4$, so ist

$$Pl^2(xy) = (a_1 a_2 x a_3 y a_4 + a_1 a_2 y a_3 x a_4) : 2.$$

Es ist entsprechend

$$Pl^3(xyz) = (Pxyz + Pxzy + Pyxz + Pyzx + Pzxy + Pzyx) : 6.$$

Sei z. B. $P = a_1 a_2 | a_3 a_4$, so ist

$$Pl^3(xyz) = (a_1 x a_2 y a_3 z a_4 + a_1 x a_2 z a_3 y a_4 + a_1 y a_2 x a_3 z a_4 + a_1 y a_2 z a_3 x a_4 + a_1 z a_2 x a_3 y a_4 + a_1 z a_2 y a_3 x a_4) : 6.$$

Es ist übrigens einleuchtend, dass die Summe der Folgen geteilt durch die Anzahl der Tausche nichts anderes ist als das arithmetische Mittel oder das Summenmittel zwischen den Folgen.

23. **Satz.** Das Nlückenzeug ist gleich der Summe, welche man erhält, wenn man den Grösen erster Klasse x_1, x_2, \dots, x_n alle verschiedenen Folgen giebt und die Summe durch die Anzahl dieser Tausche $n!$ teilt, oder

$$Pl^n(x_1 x_2 \dots x_n) = (SPx_1 x_2 \dots) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n).$$

wo x_2, x_3, \dots dieselben Grösen wie x_1, x_2, \dots, x_n nur in beliebig geänderter Folge ist.

Beweis. Unmittelbar aus 22.

Satz. $Pl^n x^n = Pxx \dots x$.

24.

Beweis. Unmittelbar aus 23, denn setzt man in 23 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \dots = x_n = x$, so werden alle Glieder der Summe gleich $Pxx \dots x$, also die Summe gleich der Anzahl der Glieder mal $Pxx \dots x$, d. h. gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n Pxx \dots x$ und dies durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ geteilt, gleich $Pxx \dots x$.

Sei z. B. $P = a_1 a_2 a_3 a_4$, so ist $Pl^3 x^3 = a_1 x a_2 x a_3 x a_4$,
 sei $P = a_1 a_2 a_3 a_4$, so ist $Pl^2 x^2 = a_1 a_2 x a_3 x a_4$.

Satz. $Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n) x^m = \frac{S}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}$ 25.

wo S die Summe aller der Zeuge oder Produkte ist, welche hervorgehen, wenn man die $m+n$ Größen $x_1 x_2 \dots x_n x x \dots x$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in die $n+m$ Lücken von Pl^{n+m} verteilt.

Beweis. Man setze zunächst alle $n+m$ Größen

$$x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{n+m}$$

verschieden, dann erhält man

$$Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_{n+m}) = (SP x_1 x_2 \dots) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m \cdot (m+1) \dots (m+n)).$$

Setzt man hier die m Größen $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$ einander gleich, so fallen $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ Glieder in ein Glied zusammen, und ist also die Anzahl der Tausche nur $1 : (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m)$ von der zuerst entwickelten. Es darf daher die Summe auch nur durch $(m+1)(m+2) \dots (m+n)$ geteilt werden.

Erklärung. Das Zeug oder Produkt mit $n+m$ Lücken oder das $N+M$ -Lückenzeug von n Lückenbüchern $x_1, x_2, \dots x_n$, heist der Ausdruck, den man erhält, wenn man das $N+M$ -Lückenzeug von $n+m$ Lückenbüchern $x_1, x_2, \dots x_{n+m}$ nach 23 entwickelt und dann statt jeder der Größen $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{n+m}$ eine Lücke setzt, oder es ist

$$Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n) = Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n | 1 \dots 1).$$

Sei z. B. zu entwickeln $Pl^3 x$, so ist dies

$$Pl^3 x = (Pxll + Plxl + Plxx) : 3, \quad \text{z. B.}$$

$$(a_1 x a_2 l a_3 l a_4 + a_1 l a_2 x a_3 l a_4 + a_1 l a_2 l a_3 x a_4) : 3.$$

Sei zu entwickeln $Pl^3(xy)$, so ist dies

$$Pl^3(xy) = (Pxy l + Pxly + Pyxl + Pylx + Plxy + Plyx) : 6.$$

Satz. Es ist $Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{S}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}$ 27.

wo S die Summe aller der Zeuge oder Produkte ist, welche hervorgehen, wenn man die n Größen $x_1 x_2 \dots x_n$ und die m Lücken auf alle möglichen verschiedenen Arten in die $n+m$ Lücken von Pl^{n+m} verteilt.

Beweis. Unmittelbar aus 25, wenn man l statt x setzt.

28. Satz. $Pl^m x = (Plx \dots l + Plx \dots l + Plx \dots l + \dots) : m$.

Beweis. Unmittelbar aus 27.

29. Erklärung. Ein Lückenausdruck mit n Lücken oder ein N -Lückenausdruck heist eine Vielfachenfumme von Lückenzeugen mit je n Lücken oder von N -Lückenzeugen.

Zwei Lückenausdrücke heissen dann und nur dann gleich, wenn sie für jeden Verein von n Grösen erster Klasse x_1, x_2, \dots, x_n , welche in die Lücken eingeschoben werden gleich bleiben oder wenn $A, B, \dots, A^1, B^1, \dots$ N -Lückenzeuge und $\alpha, \beta, \dots, \alpha^1, \beta^1, \dots$ Zahlen, so ist $\alpha A + \beta B + \dots = \alpha^1 A^1 + \beta^1 B^1 + \dots$ dann und nur dann, wenn für jeden Verein von n Grösen erster Klasse $x_1 \dots x_n$

$$\alpha A(x_1 x_2 \dots x_n) + \beta B(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots =$$

$$\alpha^1 A^1(x_1 x_2 \dots x_n) + \beta^1 B^1(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots$$

30. Satz. Jede ganze Zahlformel n -ten Grades von beliebig vielen (veränderlichen) Zahlgrösen lässt sich in der Form

$$Ax^n$$

darstellen, wo A ein N -Lückenausdruck ist, oder

$$Sa_{a,b,\dots} x_1^a x_2^b \dots = Ax^n, \text{ wo } a + b + \dots \leq n$$

wo $x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$

auch $A = Sa_{a,b,\dots} [e_0]^r [e_1]^a [e_2]^b \dots$ auch $r + a + b + \dots = n$ ist, und e_0, e_1, e_2, \dots einen einfachen Normverein bilden, und die Summe sich auf alle möglichen ganzen Werte r, a, b, \dots von 0 bis n bezieht, welche der in Klammern beigefügten Bedingung genügen.

Beweis. Nach der Annahme ist $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$, wo $x_0 = 1$ ist. Ferner da $x_0 = 1$ und $a + b + \dots \leq n$ ist, so ist

$$Sa_{a,b,\dots} x_1^a x_2^b \dots = Sa_{a,b,\dots} x_0^r x_1^a x_2^b \dots$$

mit der Bedingung, dass $r + a + b + \dots = n$ sei. Der gewonnene Ausdruck ist aber nach 19

$$= Sa_{a,b,\dots} [xe_0]^r [xe_1]^a [xe_2]^b \dots$$

$$= Ax^n.$$

31. Satz. Jeder Verein von ganzen Zahlformeln n -ten Grades beliebig vieler veränderlicher Grösen lässt sich in der Form

$$Ax^n$$

darstellen, wo A ein N -Lückenausdruck ist.

Beweis. Unmittelbar aus 30 verbunden mit 21.

32. Satz. Statt einen Lückenausdruck mit einer Fachreihe (Faktorenreihe) (x_1, x_2, \dots, x_n) zu weben oder zu multiplizieren, kann man ihn mit den Fachen fortschreitend weben, oder

$$A(x_1 x_2 \dots x_n) = Ax_1 x_2 \dots x_n.$$

Beweis 1. Es sei zunächst A ein Lückenzeug mit $n + m$ Lücken, so ist nach 27

$$A(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{S}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man auf alle möglichen verschiedenen Arten x_1, x_2, \dots, x_n in die $n + m$ Lücken von A verteilt. Ebenso sei S_1 die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach in jede einzelne Lücke des Produktes A einsetzt; ferner gehe S_2 aus S_1 hervor, indem man in jedem Gliede von S_1 die Größe x_2 nach und nach in jede der $n + m - 1$ Lücken einzeln einsetzt, und die sämtlichen so erhaltenen Glieder zufügt, somit ist S_2 zugleich die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man $x_1 x_2$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in zwei der Lücken von A einfügt. Auf entsprechende Weise möge S_3 aus S_2 abgeleitet sein u. f. w. Dann ist nach 27

$$Ax_1 = \frac{S_1}{n+m}, \quad Ax_1 x_2 = \frac{S_2}{(n+m)(n+m-1)}$$

endlich

$$Ax_1 x_2 \dots x_n = \frac{S}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} = A(x_1 x_2 \dots x_n).$$

2. Es sei A ein beliebiger Lückenausdruck $= SB_a$, wo jedes B_a ein Lückenzeug mit $n + m$ Lücken ist, so ist

$$\begin{aligned} A(x_1 x_2 \dots x_n) &= (SB_a)(x_1 x_2 \dots x_n) \\ &= SB_a(x_1 x_2 \dots x_n) && \text{(nach 29)} \\ &= SB_a x_1 x_2 \dots x_n && \text{(nach 32}_1\text{)} \\ &= (SB_a) x_1 x_2 \dots x_n && \text{(nach 29)} \\ &= Ax_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

Satz. In dem Ausdrucke $Ax_1 x_2 \dots x_n$, wo A ein beliebiger 33. Lückenausdruck mit $n + m$ Lücken, kann man in der Größenreihe $x_1 x_2 \dots x_n$ beliebige Klammern setzen oder weglassen ohne Aenderung des Wertes.

Beweis. Unmittelbar aus 30.

Satz. Die Ordnung der Fache oder Faktoren, welche in einen 34. Lückenausdruck eintreten sollen, ist gleichgültig für das Ergebniss oder

$Ax_1 x_2 \dots = Ax_2 x_1 \dots$, wo A ein Lückenausdruck und $x_1 x_2 \dots$ und $x_2 x_1 \dots$ dieselben Fache nur in verschiedener Ordnung enthalten.

Beweis. Es sei $A = SB_a$, wo jedes B_a ein Lückenzeug ist, so ist

$$Ax_1x_2\dots = A(x_1x_2\dots) \quad (\text{nach 32})$$

$$= (SB_a)(x_1x_2\dots x_n) = SB_a(x_1x_2\dots) \quad (\text{nach 29})$$

Nun ist aber nach 27 $B_a(x_1x_2\dots)$ die Summe sämtlicher Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man x_1, x_2, \dots in allen möglichen Anordnungen in die Lücken von B_a hineinfügt, geteilt durch die Anzahl dieser Tausche, also ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Größen x_1, x_2, \dots in dem Ausdrucke $B_a(x_1x_2\dots)$ vorkommen, d. h. $B_a(x_1x_2\dots) = B_a(x_r x_s \dots)$, wenn $x_1x_2\dots$ und $x_r x_s \dots$ dieselben Fache nur in verschiedener Folge enthalten. Also ist

$$Ax_1x_2\dots = SB_a(x_r x_s \dots) = (SB_a)(x_r x_s \dots) \quad (\text{nach 29})$$

$$= A(x_r x_s \dots) = Ax_r x_s \dots \quad (\text{nach 32})$$

35. **Satz.** Wenn irgend eines der Fache oder Faktoren, welche mit einem Lückenausdrucke gewebt oder multipliziert sind, eine Summe ist, so kann man statt der Summe die einzelnen Stücke setzen, und die so erhaltenen Lückenausdrücke zufügen oder

$$At(x + y + \dots)u = Atxu + Atyu + \dots$$

wo t und u Reihen von Fachen oder Faktoren und A ein Lückenausdruck ist.

Beweis. Nach 34 ist $At(x + y + \dots)u = Atu(x + y + \dots)$. Hier ist Atu wieder ein Lückenausdruck, und daher hat $Atu(x + y + \dots)$ die Form einer Summe von Zeugen, deren jedes $(x + y + \dots)$ als ein Fach enthält, also die Form $P(x + y + \dots) + Q(x + y + \dots) + \dots$. Dies ist aber nach 73 gleich $Px + Py + \dots + Qx + Qy + \dots = Px + Qx + \dots + Py + Qy + \dots = Atux + Atuy + \dots = Atxu + Atyu + \dots$.

36. **Satz.** Für die Lückenausdrücke gelten also alle Gesetze der Verwebung, sowohl das Gesetz der Einigung als auch das der Vertauschung und das der Beziehung der Fache oder Faktoren.

Beweis. Unmittelbar aus 33, 34 und 35.

4. Die Hauptbrüche oder die Hauptquotienten.

In der Zahlenlehre genügt für den Bruch $\frac{b}{a}$ die Erklärung, es solle der Bruch die GröÙe sein, welche mit a verwebt oder multipliziert b giebt. Wollte man diese Erklärung auch für die Flechtbrüche einführen, so würde man hieraus nur die Vielfachensummen der GröÙe a erhalten. In einem Hauptgebiete n ter Stufe hat man aber GröÙen erster Stufe, welche die Vielfachensummen von n gegenseitig freien GröÙen a_1, \dots, a_n sind. Es genügt hierfür die erwähnte Erklärung nicht; hier wird der Bruch nur dann vollständig bestimmt sein, wenn bestimmt ist, was die Flechtung des Bruches mit n gegenseitig freien GröÙen $a_1 \dots a_n$ ergibt, dies wird in der folgenden Erklärung geschehen, und findet diese damit ihre Rechtfertigung.

Die Gebrüder Hermann und Robert Grassmann haben im Jahre 1847 diese Hauptbrüche oder Quotienten in allgemeinster Form behandelt, indem sie im Nenner der Hauptbrüche GröÙen beliebiger aber gleicher Klasse und ebenso im Zähler GröÙen beliebiger aber gleicher Klasse eingeführt und die Gesetze dafür entwickelt haben. Bei einer spätern Bearbeitung ergab sich aber, dass man dieselben Ergebnisse erhält, wenn man im Nenner nur GröÙen erster Klasse bez. im Gebiete n ter Stufe auch $(n-1)$ ter Klasse zulässt, und dass dies doch wesentlich einfacher wird und daher den Vorzug verdient. Der Bruder hat deshalb in seinem Werke von 1862 bereits diese Umgestaltung vorgenommen. Der Name Hauptbruch ist von mir eingeführt worden, um diesen Bruch der Erweiterungslehre von dem Zahlbruche zu unterscheiden. Der Name bezeichnet den Bruch fogleich als auf ein Hauptgebiet bezüglich; er bezeichnet die Beziehung des Bruches zu diesem Hauptgebiete, wodurch auch die Form des Bruches bestimmt ist.

Erklärung. Der Hauptbruch oder der Hauptquotient

37.

$$Q = \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

wo a_1, a_2, \dots, a_n n gegenseitig freie GröÙen erster Klasse bez. $(n-1)$ ter Klasse in einem Hauptgebiete n ter Stufe sind, heist die GröÙe, welche mit a_1, a_2, \dots, a_n webt oder multipliziert, beziehlich die Werte b_1, b_2, \dots, b_n liefert, so dass

$$\frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{a_1, a_2, \dots, a_n} a_a = b_a.$$

Und zwar heißen die Zähler b_1, b_2, \dots die entsprechenden Zähler zu den Nennern a_1, a_2, \dots

Zwei Hauptbrüche bez. deren Vielfachennummen heißen dann und nur dann gleich, wenn sie beide mit jeder GröÙe erster Klasse des Hauptgebietes gewebt oder multipliziert zwei gleiche GröÙen geben.

Umkehrbar heiÙt der Hauptbruch

$$Q = \frac{b_1, b_2, \dots b_n}{a_1, a_2, \dots a_n}$$

wenn auch die GröÙen des Zählers $b_1, b_2, \dots b_n$ n gegenseitig freie GröÙen derselben l ten bez. $(n-1)$ ten Klasse sind, wie die GröÙen des Nenners. Die GröÙe

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \dots a_n}{b_1, b_2, \dots b_n}$$

heiÙt der umgekehrte Hauptbruch.

38. **Satz.** Zwei Hauptbrüche und zwei Vielfachennummen von Hauptbrüchen, welche in einem Hauptgebiete n ter Stufe mit n gegenseitig freien GröÙen erster Klasse gewebt oder multipliziert, Gleiches geben, sind einander gleich.

Beweis. Es seien Q und Q_1 die Hauptbrüche oder die Vielfachennummen derselben und seien $a_1, \dots a_n$ die n gegenseitig freien GröÙen erster Klasse im Hauptgebiete n ter Stufe, welche mit ihnen gewebt oder multipliziert Gleiches liefern; es sei also nach der Voraussetzung

$$Qa_1 = Q_1a_1, Qa_2 = Q_1a_2, \dots Qa_n = Q_1a_n.$$

Es sind nun nach 37 die beiden Ausdrücke Q und Q_1 dann und nur dann gleich, wenn sie mit jeder GröÙe erster Klasse des Hauptgebietes gewebt oder multipliziert Gleiches liefern. Jede GröÙe erster Klasse des Hauptgebietes n ter Stufe lässt sich aber nach 24 als Vielfachensumme von je n gegenseitig freien GröÙen dieses Gebietes $a_1, \dots a_n$ darstellen. Es sei demnach

$$x = a_1a_1 + \dots + a_na_n$$

dann ist

$$\begin{aligned} Qx &= Q(a_1a_1 + \dots + a_na_n) \\ &= a_1Qa_1 + \dots + a_nQa_n && \text{(nach Ausdehnungslehre 73)} \\ &= a_1Q_1a_1 + \dots + a_nQ_1a_n && \text{(nach Annahme)} \\ &= Q_1(a_1a_1 + \dots + a_na_n) && \text{(nach Ausdehnungslehre 73)} \\ &= Q_1x. \end{aligned}$$

39. **Satz.** Einen Hauptbruch vervielfacht man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit dieser Zahl vervielfacht, und Hauptbrüche von gleichen Nennern fügt man zu, indem man die ent-

sprechenden Zähler zuzufügen, wobei in beiden Fällen die Nenner ungeändert bleiben, oder

$$\beta \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} + \dots$$

$$= \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \dots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \dots), \dots}{a_1, a_2, \dots}$$

Beweis. Wenn der Satz gelten soll, so müssen nach 38 beide Seiten der vorstehenden Gleichung mit jeder der Größen a_1, \dots, a_n gewendet oder multipliziert, gleiche Größen geben. Nun ist nach Ausdehnungslehre 70

$$\left(\beta \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} + \dots \right) a_a$$

$$= \beta \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} a_a + \gamma \frac{c_1, c_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} a_a + \dots$$

$$= \beta b_a + \gamma c_a + \dots \quad (37)$$

Ferner ist

$$\frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \dots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \dots), \dots}{a_1, a_2, \dots} a_a$$

$$= \beta b_a + \gamma c_a + \dots \quad (37)$$

Bezeichnen wir also der Kürze wegen die linke Seite der zu erweisenden Gleichung mit L, die rechte mit R, so wird für jeden Zeiger a

$$L a_a = R a_a.$$

Folglich ist nach 38 auch $L = R$.

Satz. Jeden Hauptbruch im Hauptgebiete nter Stufe kann 40. man auf die Form bringen, dass seine Nenner nbeliebige gegenseitig freie Größen erster Klasse dieses Gebietes sind, oder

$$\frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} = \frac{S^1 a_a b_a, S^2 a_a b_a, \dots}{S^1 a_a a_a, S^2 a_a a_a, \dots}, \text{ wo } b_a \text{ Zahlen und } S^1 a_a a_a,$$

$S^2 a_a a_a, \dots$ n gegenseitig freie Größen sind.

Beweis. Nach Ausdehnungslehre 70 ist

$$\frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} S^b a_a a_a = S^b a_a \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} a_a = S^b a_a b_a \quad (\text{nach 37})$$

Ebenso ist

$$\frac{S^1 a_a b_a, S^2 a_a b_a, \dots}{S^1 a_a a_a, S^2 a_a a_a, \dots} (S^b a_a a_a) = S^b a_a b_a \quad (\text{nach 37})$$

mithin liefern beide Hauptbrüche mit $S^b a_a a_a$ gewendet oder multipliziert, für jeden Wert des b von 1 bis n gleiche Größen, folglich sind sie nach 38, da die n Größen $S^1 a_a a_a, S^2 a_a a_a, \dots$ nach der Voraussetzung gegenseitig frei sind, einander gleich.

41. Satz. Wenn e_1, e_2, \dots, e_n die ursprünglichen Einheiten des Hauptgebietes n ter Stufe sind, und bE_a der Kürze wegen den Hauptbruch bezeichnet, dessen Nenner die ursprünglichen Einheiten sind, auch von den Zählern derjenige, welcher dem Nenner e_c entspricht, gleich e_a ist, während alle übrigen Zähler desselben null sind, d. h. wenn

$${}^bE_a e_b = e_a \quad \text{und} \quad {}^bE_a e_c = 0, \quad \text{wenn } c > b$$

ist, so lassen sich die n^2 Ausdrücke, welche aus bE_a hervorgehen, indem man statt b und a nach und nach die Zahlen $1 \dots n$ einsetzt, als Bruchseinheiten setzen, d. h. es lassen sich alle Hauptbrüche desselben Hauptgebietes als Vielfachensummen derselben darstellen, während sie selbst gegenseitig freie Größen sind oder

$$\frac{{}^1S^1a_1e_1, {}^2S^2a_2e_2, \dots}{e_1, e_2, \dots} = S^b a_a {}^bE_a, \quad \text{wo } {}^bE_a = \frac{{}^1e_b, {}^2e_b, \dots}{{}^1e_a, {}^2e_a, \dots}$$

und die Größen bE_a gegenseitig frei sind.

Beweis. Nach 37 ist

$$\frac{{}^1S^1a_1e_1, {}^2S^2a_2e_2, \dots}{e_1, e_2, \dots} e_b = S^b a_a e_a$$

Nach Ausdehnungslehre 70 ist aber auch

$$\begin{aligned} S^c a_a {}^cE_a e_b &= S^c a_a {}^cE_a e_b = S^b a_a {}^bE_a e_b && \text{(nach Annahme)} \\ &= S^b a_a e_a && \text{(nach Annahme)} \end{aligned}$$

da nach der Annahme ${}^cE_a e_b = 0$ für $c > b$ und ${}^bE_a e_b = e_b$ ist. Beide Ausdrücke geben also mit jeder der n gegenseitig freien Größen e_1, \dots, e_n gewebt oder multipliziert gleiche Größen, sie sind also nach 38 einander gleich.

Die Größen bE_a sind aber auch alle gegenseitig frei. Denn angenommen, es wäre eine derselben eine Vielfachensumme der andern, so müsste $S^b a_a {}^bE_a = 0$ also auch sein

$$\begin{aligned} 0 &= (S^b a_a {}^bE_a) e_c = S^b a_a {}^bE_a e_c && \text{(nach Ausdehnungslehre 70)} \\ &= S^c a_a {}^cE_a e_c && \text{(nach Annahme)} \\ &= S^c a_a e_a && \text{(nach Annahme)} \end{aligned}$$

da nach der Annahme ${}^bE_a e_c = 0$ für $c > b$ und ${}^cE_a e_c = e_a$ ist.

Wenn aber $0 = S^c a_a e_a = {}^c a_1 e_1 + {}^c a_2 e_2 + \dots$ ist, so müssen, da die ursprünglichen Einheiten gegenseitig frei sind, die sämtlichen Vorzahlen nach 14 Null sein, mithin

${}^c a_a = 0 = {}^b a_a$ für c von 1 bis n , oder für b von 1 bis n , mithin sind auch in der Gleichung

$$S^b a_a {}^bE_a = 0$$

alle Vorzahlen null, d. h. nach 14 es sind alle n^2 Größen bE_a gegenseitig frei.

Satz. Jeder Bruch lässt sich als Lückenausdruck mit einfacher Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner a_1, \dots, a_n einen einfachen Normverein bilden,

$$\frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} = [\bar{a}_1]b_1 + [\bar{x}a_2]b_2 + \dots$$

Beweis. Die beiden Seiten der Gleichung sind nach 6 und 14 gleich, wenn sie mit jeder GröÙe erster Klasse x gewebt oder multipliziert Gleiches liefern. Sei nun $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots$, so ist nach 35

$$([\bar{a}_1]b_1 + [\bar{a}_2]b_2 + \dots)x = [\bar{x}a_1]b_1 + [\bar{x}a_2]b_2 + \dots$$

also, da nach Ausdehnungslehre 218 $a_i \bar{a}_i = 1$ und $a_i \bar{a}_j = 0$, wenn $i \neq j$, so ist nach 22 der Ausdruck $= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots$.

Aber ebenso ist auch

$$\begin{aligned} \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} x &= \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots) \\ &= x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{nach 37}).$$

Beide Seiten der zu erweisenden Gleichung liefern also mit jeder GröÙe erster Klasse gewebt oder multipliziert Gleiches, sie sind also selbst gleich.

Der Hauptbruch ist also nur eine einfachere Form des Lückenausdruckes mit einer Lücke, und kann also auch jeder Verein beliebig vieler Zahlformeln ersten Grades von beliebig vielen ZahlgröÙen als Zeug oder Produkt eines Hauptbruches in eine HauptgröÙe dargestellt werden.

5. Die Höhenwerte und die Hauptzahlen der Hauptbrüche.

43. **Erklärung.** Der Höhenwert oder Potenzwert eines Hauptbruches heist das bestgliche Flach der Zähler, deren Nenner den Verein der ursprünglichen Einheiten bilden. Das Zeichen des Höhenwertes eines Bruches mit n Nennern ist $[Q^n]$.

Wenn $Q = \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{e_1, e_2, \dots, e_n}$ ist, wo e_1, e_2, \dots, e_n der Verein der ursprünglichen

Einheiten ist, so ist also $[Q^n] = [b_1 b_2 \dots b_n]$.

44. **Satz.** Der Höhenwert oder Potenzwert eines Hauptbruches ist gleich dem bestglichen Fläche der Zähler geteilt durch das bestgliche Flach der Nenner oder

$$\text{wenn } Q = \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} \text{ ist, so ist } [Q^n] = \frac{[b_1 b_2 \dots]}{[a_1 a_2 \dots]}.$$

Beweis. Um den Hauptbruch auf die Nenner e_1, e_2, \dots, e_n zu bringen, setze ich $Qe_c = c_c$ für jeden Zeiger c von 1 bis n ; dann ist nach 40

$$Q = \frac{c_1, c_2, \dots, c_n}{e_1, e_2, \dots, e_n} \quad \text{und} \quad [Q^n] = [c_1 c_2 \dots c_n] \quad \text{nach 43}$$

Seien nun die Größen a_1, a_2, \dots als Vielfachensummen der ursprünglichen Einheiten e_1, e_2, \dots dargestellt und sei für den Zeiger b von 1 bis n

$$a_b = S^b a_a e_a, \text{ so ist } b_b = Q a_b = Q \cdot S^b a_a e_a = S^b a_a Q e_a = S^b a_a c_a$$

$$\text{mithin ist } \frac{[b_1 b_2 \dots]}{[a_1 a_2 \dots]} = \frac{[(S^1 a_a c_a)(S^2 a_a c_a) \dots]}{[(S^1 a_a e_a)(S^2 a_a e_a) \dots]}$$

$$= \frac{S^{(1a^2 a_b \dots)} [c_a, c_b \dots]}{S^{(1a^2 a_b \dots)} [e_a, e_b \dots]} \quad (\text{nach Ausdehnungslehre 72})$$

$$= \frac{S^{(-1)^r (1a^2 a_b \dots)} [c_1 c_2 \dots]}{S^{(-1)^r (1a^2 a_b \dots)} [e_1 e_2 \dots]} \quad (\text{nach Ausdehnungal. 91})$$

wo a, b, \dots alle möglichen verschiedenen Anordnungen der Zeiger 1, 2, ... darstellen, und r die Anzahl der Zeigerpare bezeichnet, die unten in

a, b, \dots entgegengesetzt geordnet sind, als oben in $1, 2, \dots$. Hier heben sich die beiden Summen $S(-1)^r(1a_1^2a_2 \dots)$ und da $[e_1, e_2, \dots] = 1$ ist, so ist

$$\frac{[b_1, b_2, \dots]}{[a_1, a_2, \dots]} = [c_1, c_2, \dots] = [Q^n].$$

Satz. Wenn Q und Q_1 Hauptbrüche mit n Nennern sind, und 45.
zu einander in der Zahlbeziehung

$$Q = \alpha Q_1$$

stehen, so stehen ihre Höhenwerte oder Potenzwerte in der Zahlbeziehung

$$[Q^n] = \alpha^n [Q_1^n].$$

Beweis. Es sei

$$Q_1 = \frac{a_1, \dots, a_n}{e_1, \dots, e_n}, \text{ also } Q = \frac{\alpha a_1, \dots, \alpha a_n}{e_1, \dots, e_n},$$

so ist nach 43

$$[Q^n] = [\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n] = \alpha^n [a_1 a_2 \dots a_n] \quad (n. \text{ Ausdehnungsl. 68}) \\ = \alpha^n [Q_1^n] \quad (\text{nach 43}).$$

Satz. Wenn zwischen den Zählern eines Bruches eine Zahl- 46.
beziehung herrscht, so lässt sich der Bruch stets auf die Form bringen, dass alle hörigen Zähler null werden, und zwischen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung stattfindet, und zwar wenn e_1, \dots, e_n die Nenner, a_1, \dots, a_n die Zähler des Bruches Q sind, und zwischen a_1, \dots, a_m keine Zahlbeziehung stattfindet, aber die übrigen $n - m$ Zähler zu ihnen hörig sind, so dass

$$a_{m+b} = {}^b a_1 a_1 + {}^b a_2 a_2 + \dots + {}^b a_m a_m \quad (a)$$

ist, so ist

$$Q = \frac{a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots, 0}{e_1, e_2, \dots, e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n}, \text{ wo}$$

$$c_{m+b} = {}^b a_1 e_1 + {}^b a_2 e_2 + \dots + {}^b a_m e_m - e_{m+b} \\ = \frac{e_1, e_2, \dots, e_m}{a_1, a_2, \dots, a_m} a_{m+b} - e_{m+b}$$

ist. Und alle zu $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n$ hörigen Größen, aber auch keine andern Größen geben mit Q gewebt oder multipliziert null.

Beweis. Betrachten wir zunächst das Zeug oder Produkt $Q c_{m+b}$; es ist

$$Q c_{m+b} = {}^b a_1 Q e_1 + {}^b a_2 Q e_2 + \dots + {}^b a_m Q e_m - Q e_{m+b} \\ = {}^b a_1 a_1 + {}^b a_2 a_2 + \dots + {}^b a_m a_m - a_{m+b} \quad (\text{nach 37})$$

da nach der Annahme a_1, a_2, \dots, a_n die zu den Nennern e_1, e_2, \dots, e_n

gehörigen Zähler des Bruches Q sind, und dies (nach a) = 0. Also sind die zu den Nennern $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots c_n$ gehörigen Zähler null.

Es sind aber ferner auch alle Nenner, $e_1, e_2, \dots e_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots c_n$ gegenseitig frei. Setzen wir nämlich der Abkürzung wegen

$${}^b a_1 e_1 + {}^b a_2 e_2 + \dots + {}^b a_m e_m = s_b, \text{ so ist}$$

$$c_{m+b} = s_b - e_{m+b}, \text{ mithin ist}$$

$$\begin{aligned} [e_1 e_2 \dots e_m \cdot c_{m+1} \dots c_n] &= [e_1 \cdot e_2 \dots e_m (s_1 - e_{m+1}) \dots (e_{n-m} - e_n)] \\ &= \pm [e_1 e_2 \dots e_n] \end{aligned}$$

denn da s_1, s_2, \dots Vielfachensummen der Größen $e_1, e_2, \dots e_m$ sind, so können sie nach Ausd. 109 weggelassen werden. Das Flach ist also von Null verschieden, d. h. $e_1, e_2, \dots e_m, c_{m+1}, \dots c_n$ sind nach Ausdehnungslehre 93 gegenseitig freie Größen, mithin kann nach 40 Q als Hauptbruch in der im Satze angegebenen Weise dargestellt werden.

Da ferner $Q_{c_{m+b}} = 0$ ist, so gibt Q auch mit jeder Vielfachensumme der Größen $c_{m+1} \dots c_n$ gewebt oder multipliziert null. Umgekehrt muss auch jede Größe d , welche mit Q gewebt oder multipliziert null giebt, d. h. für welche $dQ = 0$ ist, eine Vielfachensumme von $c_{m+1} \dots c_n$ sein. Denn was auch d für eine Größe sein mag, immer muss sie doch dem Hauptgebiete n ter Stufe angehören, d. h. nach Ausdehnungslehre 24 eine Vielfachensumme der Größen $e_1, e_2, \dots e_m, c_{m+1} \dots c_n$ sein, d. h. sich in der Form

$$d = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m + s$$

darstellen lassen, wo s eine Vielfachensumme der Größen $c_{m+1} \dots c_n$ ist. Da nun $Q_{e_n} = a_n$ und $Q_{c_{m+b}} = 0$ ist, so wird

$$0 = dQ = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_m a_m$$

also sind nach Ausd. 106 die Vorzahlen $a_1, a_2, \dots a_m$ sämtlich null und ist mithin $d = s$, d. h. eine Vielfachensumme von $c_{m+1} \dots c_n$.

47. **Erklärung.** Eine Hauptzahl des Hauptbruches Q heist die Zahl q , wenn der Bruch Q mit einer von Null verschiedenen Größe erster Klasse x gewebt oder multipliziert, das q fache dieser Größe giebt, so dass $Qx = qx$ ist. Die Zahl q kann hierbei auch eine Igröße werden. Das zu der Hauptzahl q gehörige Hauptgebiet heist das Gebiet, welchem alle Größen x angehören, welche jener Gleichung genügen.

48. **Satz.** Jeder Hauptbruch Q mit n Nennern hat auch n Hauptzahlen $q_1, q_2, \dots q_n$ und zwar sind die n Hauptzahlen die Wurzeln der Gleichung

$$(a) \quad {}^a_0 q^n - {}^a_1 q^{n-1} + {}^a_2 q^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0$$

wo a_n aus dem Fläche $[e_1 e_2 \dots e_n]$ der n Nenner dadurch hervor-

geht, dass man α der Größen $e_1, e_2, \dots e_n$ in die entsprechenden Größen $Qe_1, Qe_2, \dots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen $n - \alpha$ Größen unverändert lässt.

Das Zeug oder Produkt dieser n Wurzeln ist gleich dem Höhenwerte des Hauptbruches, d. h. $q_1 q_2 \dots q_n = [Q^n]$.

Das zu der Hauptzahl q gehörige Hauptgebiet erhält man, wenn man $q - Q$ als einen Hauptbruch B nach 46 darstellt, von dessen Zählern einer oder mehrere null sind, während die übrigen Zähler gegenseitig frei sind, und zwar ist das Gebiet derjenigen Nenner dieses Bruches B , deren entsprechende Zähler null sind, das verlangte Hauptgebiet.

Beweis. Es sei Q der Hauptbruch mit den n Nennern $e_1, e_2, \dots e_n$, es sei ferner q eine Hauptzahl dieses Bruches und sei $x = Sx_a e_a$ eine von Null verschiedene Größe, für welche $Qx = qx$ sei, so ist $(q - Q)x = 0$, und setzt man für x seinen Wert, so erhält man

$$(b) \quad 0 = Sx_a (q - Q)e_a = Sx_a c_a \quad \text{wo } c_a = (q - Q)e_a \text{ ist.}$$

Da nun x von Null verschieden ist, so muss auch mindestens eine der Zahlen $x_1, \dots x_n$ von Null verschieden sein, mithin nach Ausd. 14 zwischen $c_1, \dots c_n$ eine Hörigkeit stattfinden; es muss also nach Ausd. 93 ihr Flach oder kombinatorisches Produkt null sein, d. h.

$$(c) \quad 0 = [c_1 c_2 \dots c_n].$$

Nach 44 muss dann aber auch der Höhenwert des Bruches $q - Q$ null sein. Umgekehrt, wenn die Gleichung (c) erfüllt wird, so gilt nach 102 auch die Gleichung (b), d. h. giebt es dann eine Größe $x \geq 0$, welche der Gleichung $Qx = qx$ genügt, d. h. q ist dann eine Hauptzahl.

Setzt man nun in der Gleichung (b) statt c_a seinen Wert $c_a = (q - Q)e_a$, so erhält man

$$0 = [(qe_1 - Qe_1)(qe_2 - Qe_2) \dots (qe_n - Qe_n)],$$

oder indem man die Klammern löst

$$(a) \quad \alpha_0 q^n - \alpha_1 q^{n-1} + \alpha_2 q^{n-2} - \dots + (-1)^n \alpha_n = 0,$$

wo α_a aus dem Produkte $[e_1 e_2 \dots e_n]$ dadurch hervorgeht, dass man α der Größen $e_1, e_2, \dots e_n$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in die entsprechenden Größen $Qe_1, Qe_2, \dots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen unverändert lässt. Die n Wurzeln $q_1, \dots q_n$ dieser Gleichung (a) sind also die gesuchten Hauptzahlen; das Zeug oder Produkt derselben ist nach dem Newtonschen Satze gleich $\alpha_n : \alpha_0$, d. h. nach 44 gleich dem Höhenwerte von Q .

Die Größen x sind ferner durch die Gleichung (b) bestimmt. Nach dieser Gleichung herrscht zwischen den Größen $c_1, c_2, \dots c_n$ eine

Hörigkeit. Folglich lässt sich nach Ausdehnungslehre 19 aus den Größen c_1, \dots, c_n ein Verein von weniger als n Größen, etwa c_1, c_2, \dots, c_m , aussondern, welche gegenseitig frei sind, die übrigen Größen (c_{m+1}, \dots, c_n) sind Vielfachensummen derselben; dann aber lässt sich der Bruch $q = Q$, dessen zu den Nennern e_1, \dots, e_n gehörige Zähler c_1, \dots, c_n sind, da $e_a = (q - Q)e_a$ ist, nach 46 auf die Form bringen, dass unter den Zählern $n - m$ derselben null werden; die zugehörigen Nenner seien a_{m+1}, \dots, a_n ; so haben nach 46 alle Vielfachensummen x von a_{m+1}, \dots, a_n , aber auch keine andern Größen die Eigenschaft, dass $(q - Q)x = 0$ sei, d. h. dass $Qx = qx$ wird, d. h. also, das Gebiet a_{m+1}, \dots, a_n ist das zu der Hauptzahl q gehörige Hauptgebiet.

49. **Satz.** Wenn die n Hauptzahlen q_1, \dots, q_n eines Hauptbruches Q alle von einander verschieden sind, so sind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Beweis. Es lässt sich nach 48 zu jeder der Größen q_1, \dots, q_n , d. h. zu q_a , eine von Null verschiedene GröÙe erster Klasse finden, welche mit Q gewebt oder multipliziert ihr q_a -faches liefert. Es seien a_1, \dots, a_n diese Größen, so dass $Qa_a = q_a a_a$ ist. Angenommen nun, es herrsche zwischen a_1, \dots, a_n eine Hörigkeit, so müssten sich nach Ausdehnungslehre 19 aus ihnen m Größen, etwa a_1, \dots, a_m , aussondern lassen, welche gegenseitig frei sind, so dass jede der übrigen, a_{m+1} eine Vielfachensumme derselben wäre. Es sei $a_{m+1} = a_1 a_1 + \dots + a_m a_m$, so muss, da a_{m+1} von Null verschieden ist, auch mindestens eine der Vorzahlen a_1, \dots, a_m von Null verschieden sein. Es sei dies z. B. a_1 . Nun hat man

$$Qa_{m+1} = QSa_a a_a = Sa_a Qa_a = Sa_a q_a a_a$$

da nach der Voraussetzung $Qa_a = q_a a_a$ ist, mithin wird

$$\begin{aligned} a_1 q_1 a_1 + \dots + a_m q_m a_m &= Qa_{m+1} = q_{m+1} a_{m+1} \\ &= q_{m+1} a_1 a_1 + \dots + q_{m+1} a_m a_m, \end{aligned}$$

folglich sind nach Ausdehnungslehre 16 die entsprechenden Vorzahlen gleich, also ist $a_1 q_1 = a_1 q_{m+1}$, d. h. da $a_1 \geq 0$, ist $q_{m+1} = q_1$, was gegen die Voraussetzung ist. Mithin kann zwischen a_1, \dots, a_n keine Hörigkeit herrschen. Es kann also auch keins der Hauptgebiete von höherer als erster Stufe sein. Denn wäre z. B. das zu q_1 gehörige Hauptgebiet von höherer Stufe, so müsste dies Gebiet nach Ausdehnungslehre 31 mit dem Gebiete $(n-1)$ -ter Stufe der Größen a_2, \dots, a_n mindestens ein Gebiet erster Stufe gemein haben. Sei nun c eine (von Null verschiedene) GröÙe dieses gemeinschaftlichen Gebietes, so wäre

c zu a_2, \dots, a_n hörig, und würde sich doch, da es in dem zu q_1 gehörigen Hauptgebiete liegt, in sein q -faches verwandeln, was wie bewiesen unmöglich ist.

Satz. Wenn unter den Hauptzahlen des Hauptbruches Q , 50. $r = \alpha$ sind, wo $r > 1$ ist, so lassen sich r Größen erster Klasse a_1, \dots, a_r von der Art finden, dass diese sowie $n - r$ der Größen e_1, \dots, e_n , etwa mit $e_{\alpha+1}, \dots, e_n$, gegenseitig frei sind und

$$(a) \quad Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2] \text{ u. f. w., endlich}$$

$$[a_1 a_2 \dots a_{r-1} \cdot Qa_r] = \alpha[a_1 a_2 \dots a_r]$$

ist. Die Gleichung für die Hauptzahlen q wird dann

$$(b) \quad (q - \alpha)[a_1 a_2 \dots a_r e_{r+1} \dots e_n], \text{ wo } e_{r+\alpha} = (q - Q)e_{r+\alpha}$$

für jeden Zeiger α von 1 bis $n - r$ ist.

Beweis. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in Satz 48, dann ist nach diesem Satze

$$(c) \quad 0 = [c_1 c_2 \dots c_n], \text{ wo } c_\alpha = (q - Q)e_\alpha$$

d. h. es sind nach 37 die Größen c_1, c_2, \dots, c_n die zu den Nennern e_1, e_2, \dots, e_n gehörigen Zähler des Bruches $q - Q$ und ist das Flach der n Zähler null, d. h. nach 43 auch der Höhenwert $[(q - Q)^n]$ gleich null. Die Gleichung (c) bleibt aber auch bestehen, wenn man statt der Nenner e_1, e_2, \dots, e_n beliebige n gegenseitig freie Größen erster Klasse setzt.

Die n Werte von q , welche der Gleichung (c) genügen, sind nach 49 die n Hauptzahlen von Q . Wenn nun r derselben $= \alpha$ sind, wo $r > 1$ ist, so muss also die Gleichung (c) im Ganzen für q auch r Werte ergeben, welche $= \alpha$ sind. Nach 48 lässt sich dann aber, da zunächst ein Wert von q gleich α ist, eine von Null verschiedene GröÙe erster Klasse a_1 finden, für welche

$$(*) \quad Qa_1 = \alpha a_1 \text{ ist. Es sei diese GröÙe}$$

$a_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, so muss, da $a_1 \geq 0$ ist, nach Ausdehnungslehre 14 mindestens eine der Vorzahlen $x_1 \dots x_n$ ungleich Null sein, es sei dies x , dann sind nach Ausdehnungslehre 21 die n Größen a_1, e_2, \dots, e_n gegenseitig frei und können mithin nach 25 statt e_1, e_2, \dots, e_n in die Gleichung (c) eingesetzt werden. Dann wird

$$c_1 = (q - Q)a_1 = qa_1 - Qa_1 = qa_1 - \alpha a_1 = (q - \alpha)a_1 \text{ (nach *)}$$

Die Gleichung (c) wird dann

$$0 = (q - \alpha)[a_1 c_2 \dots c_n] \quad \text{und} \quad Qa_1 = \alpha a_1.$$

Ganz auf gleiche Weise ergibt sich, da $r > 1$ ist,

$$0 = (q - \alpha)^2[a_1 a_2 c_3 \dots c_n] \quad \text{und} \quad [a_1 Qa_2] = \alpha[a_1 a_2]$$

u. f. w. Und wenn $b < r$ ist, so ist auch

$$(d) \quad 0 = (q - \alpha)^p [a_1 a_2 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n] \text{ und } [a_1 a_2 \cdots a_{r-1} Q a_r] \\ = \alpha^p [a_1 a_2 \cdots a_r]$$

und sind nach Ausdehnungslehre 21 die n Größen $a_1, a_2, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_n$ gegenseitig frei, und diese Formeln bleiben bestehen bis $b = r - 1$ ist. Wenn es nun $r - 1$ Wurzeln $q = \alpha$ giebt, welche also der Gleichung (d) genügen, so kann man jene Gleichung nach der Lehre der Gleichungen (Zahlenlehre 401) durch $(q - \alpha)^{r-1}$ teilen und muss, da es r Wurzeln $q = \alpha$ geben soll, der Bruch oder Quotient noch mindestens eine Wurzel $q = \alpha$ darbieten, d. h. es muss für $q = \alpha$ auch noch

$$(e) \quad 0 = [a_1 a_2 \cdots a_{r-1} c_r \cdots c_n]$$

sein. Setzt man hier in den Größen $c_r \cdots c_n$ statt q den Wert α , so mögen diese Größen in $d_r \cdots d_n$ übergehen, dann ist

$$(f) \quad 0 = [a_1 a_2 \cdots a_{r-1} d_r \cdots d_n] \quad \text{wo } d_{r+c} = (\alpha - Q) e_{r+c} \text{ ist.}$$

Nach 102 ist dann aber eine der Größen $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, d_r, \dots, d_n$ zu den andern hörig, d. h. es wird

$$(g) \quad 0 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha_r d_r + \cdots + \alpha_n d_n$$

wo mindestens eine der Vorzahlen ≥ 0 ist. Hier muss eine der Vorzahlen $\alpha_r, \dots, \alpha_n$ ungleich Null sein; denn wären sie alle null, so müsste eine Hörigkeit zwischen a_1, \dots, a_{r-1} herrschen, was unmöglich ist, da diese, wie bewiesen, gegenseitig frei sind. Sei also $\alpha_r \geq 0$ und sei $\alpha_r e_r + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha_r$ gesetzt, so sind nach Ausdehnungslehre 21 die n Größen $a_1, a_2, \dots, a_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ gegenseitig frei und können mithin statt e_1, e_2, \dots, e_n in die Gleichung (e) oder statt $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, e_r \cdots e_n$ in die Gleichung (d) eingesetzt werden, dann wird nach (c) auch $c_r = (q - Q) a_r$ und da $a_r = \alpha_r e_r + \cdots + \alpha_n e_n$ ist so wird

$$\begin{aligned} (\alpha - Q) a_r &= \alpha_r (\alpha - Q) e_r + \cdots + \alpha_n (\alpha - Q) e_n \\ &= \alpha_r d_r + \cdots + \alpha_n d_n && \text{(nach f)} \\ &= -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_{r-1} a_{r-1} && \text{(nach g)} \end{aligned}$$

mithin ist

$$Q a_r = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha a_r$$

$$\text{und } [a_1 \cdots a_{r-1} Q a_r] = [a_1 \cdots a_{r-1} (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha a_r)]$$

$$(h) \quad = \alpha^p [a_1 \cdots a_{r-1} a_r] \quad \text{(nach Ausdehnungslehre 109)}$$

Nun ist aber auch, wie bewiesen $c_r = (q - Q) a_r = q a_r - Q a_r$ mithin ist

$$\begin{aligned} [a_1 \cdots a_{r-1} c_r] &= q [a_1 \cdots a_{r-1} a_r] - [a_1 \cdots a_{r-1} Q a_r] \\ &= q [a_1 \cdots a_{r-1} a_r] - \alpha^p [a_1 \cdots a_{r-1} a_r] \quad \text{(nach h)} \\ &= (q - \alpha)^p [a_1 \cdots a_r] \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung (d) ein, so erhält man

$$(i) \quad (q - \alpha)^{b+1} [a_1 a_2 \dots a_r c_{r+1} \dots c_n] = 0$$

Die Gleichung bleibt also auch bestehen, wenn man r statt $r-1$ setzt, es gilt also die Gleichung (b) und ebenso die Gleichung (a).

Satz. Die Größen a_1, a_2, \dots, a_r , welche durch die Gleichungen 51.

$$(a) \quad Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 a_2 \dots a_{r-1} Qa_r] = \alpha [a_1 a_2 \dots a_r] \\ [a_1 a_2 \dots a_{r-1} Qa_r] = \alpha [a_1 a_2 \dots a_r]$$

bestimmt sind, wo unter den Hauptzahlen des Bruches Q r gleich α sind, haben die Eigenschaft, dass jede Vielfachenfumme derselben der Gleichung

$$(b) \quad Qp = \alpha p + q$$

genügt, wo, wenn p eine Vielfachenfumme der Größen a_1, \dots, a_r ist, q eine Vielfachenfumme der Größen a_1, \dots, a_{r-1} ist.

Beweis. Aus der Formel (a) folgt unmittelbar

$$[a_1 a_2 \dots a_{r-1} Qa_r] = \alpha [a_1 a_2 \dots a_r]$$

$$d. h. [a_1 a_2 \dots a_{r-1} (Qa_r - \alpha a_r)] = 0$$

mithin herrscht nach Ausdehnungslehre 14 zwischen den Größen a_1, a_2, \dots, a_{r-1} , $Qa_r - \alpha a_r$ eine Hörigkeit, d. h. es ist, da a_1, \dots, a_{r-1} gegenseitig frei sind,

$Qa_r - \alpha a_r = a_s$, wo a_s eine Vielfachenfumme von a_1, \dots, a_{r-1} ist, oder es ist

(c) $Qa_r = \alpha a_r + a_s$ wo a_s eine Vielfachenfumme von a_1, \dots, a_{r-1} Sei nun $p = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_s a_s$ wo $a_s \geq 0$ und $b \leq r$ ist, so hat man

$$Qp = Q(a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_s a_s) \\ = a_1 Qa_1 + a_2 Qa_2 + \dots + a_s Qa_s \quad \text{mithin nach (c)} \\ = a_1 \alpha a_1 + a_2 \alpha a_2 + \dots + a_s \alpha a_s + a_1 a^1_1 + a_2 a^1_2 + \dots + a_s a^1_s \\ = \alpha(a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_s a_s) + q \\ = \alpha p + q$$

wo q eine Vielfachenfumme von a_1, \dots, a_{r-1} ist.

Satz. Wenn unter den n Hauptzahlen des Bruches Q mit den 52. n Nennern $e_1 \dots e_n$, d. h. unter den n Wurzeln der Gleichung

$$(a) \quad 0 = [(qe_1 - Qe_1)(qe_2 - Qe_2) \dots (qe_n - Qe_n)] \\ = \alpha_0 q^n - \alpha_1 q^{n-1} + \alpha_2 q^{n-2} - \dots + (-1)^n \alpha_n.$$

α Wurzeln $= \alpha$, β Wurzeln $= \beta$ u. f. w. find, wo $\alpha > \beta > \dots$, so kann man n gegenseitig freie Größen $a_1, a_2, \dots, a_\alpha, b_1, \dots, b_\beta, \dots$ von der Art angeben, dass wenn p eine Vielfachenfumme der m ersten Größen einer dieser Gruppen von Größen, z. B. der Größen $b_1 \dots b_m$ bildet,

dann $Qp = \beta p + q$ ist, wo q eine Vielfachensumme der $m-1$ ersten Größen derselben Gruppe ist.

Beweis. Wenn unter den Hauptzahlen von Q nicht nur a derselben vorkommen, welche gleich α , sondern auch b , welche gleich β , c , welche gleich γ sind u. s. w., wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ alle von einander verschieden sind, so lassen sich nach 51 b gegenseitig freie Größen b_1, \dots, b_s von der Art angeben, dass jede Vielfachensumme p_1 von b_1, \dots, b_s der Gleichung $Qp_1 = \beta p_1 + q_1$ genügt, wo, wenn p_1 eine Vielfachensumme der m ersten jener Größen ist, q_1 eine Vielfachensumme der $(m-1)$ ersten derselben Größen ist, und ebenso lassen sich c gegenseitig freie Größen c_1, \dots, c_c von der Art angeben, dass jede Vielfachensumme p_2 von c_1, \dots, c_c der Gleichung $Qp_2 = \gamma p_2 + q_2$ genüge, wo, wenn p_2 eine Vielfachensumme der m ersten der Größen c_1, \dots, c_c ist, q_2 eine Vielfachensumme der $m-1$ ersten derselben Größen ist u. s. w. Dann sind ferner, wie noch bewiesen werden muss, die Größen $a_1, \dots, a_a, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_c$ gegenseitig frei und können also als Nenner des Bruches Q gesetzt werden. In der Tat nehmen wir einmal an, dass zwar die Größen $a_1, \dots, a_a, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_{m-1}$ noch gegenseitig frei seien, dass aber die Größe c_m eine Vielfachensumme der genannten Größen sei, so wird, wenn p eine Vielfachensumme von a_1, \dots, a_a, p_1 eine Vielfachensumme von b_1, \dots, b_s, p_2 eine Vielfachensumme von c_1, \dots, c_m ist, jene Vielfachensumme die Form haben

$$(b) \quad 0 = p + p_1 + p_2, \text{ also wird auch}$$

$$0 = Q(p + p_1 + p_2)$$

sein. Dies aber ist nach 51

$$= \alpha p + q + \beta p_1 + q_1 + \gamma p_2 + q_2,$$

oder, indem wir statt p_2 seinen Wert $= -p - p_1$ aus der Gleichung (b) setzen,

$$0 = (\alpha - \gamma)p + (\beta - \gamma)p_1 + q + q_1 + q_2.$$

Da nach 51 q_2 eine Vielfachensumme von c_1, \dots, c_{m-1} ist, so sind alle in dieser letztern Gleichung vorkommenden Größen Vielfachensummen der nach der Annahme gegenseitig freien Größen $a_1, \dots, a_a, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_{m-1}$. In der letzten Gleichung wird sich also die rechte Seite als Vielfachensumme der letztgenannten Größen darstellen lassen, und da die linke Seite null ist, so werden nach Ausd. 15 alle einzelnen Vorzahlen dieser Vielfachensumme null sein. Wenn nun p von Null verschieden, etwa $= x_1 a_1 + \dots + x_a a_a$ wäre, wo $x_s \geq 0$ ist, so würde q nach 51 eine Vielfachensumme von a_1, \dots, a_{s-1} sein, mithin würde a_s , da es auch in p_1, q_1, q_2 , nicht enthalten ist, in jener gleich Null

gesetzten Vielfachenfumme nur einmal vorkommen, nämlich mit der Vorzahl $(\alpha - \gamma)x_2$ verbunden; diese Vorzahl müsste also null sein, was unmöglich ist, da x_2 nach der Annahme ungleich null, und α ungleich γ ist. Mithin ist die Annahme, dass p von Null verschieden sei, unmöglich, d. h. p ist gleich null, aus gleichem Grunde ist $p_1 = 0$. Dann aber folgt aus der Gleichung (b), dass $p_2 = 0$ ist. Da nun aber die Größen a_1, \dots, a_n gegenseitig frei sind, so folgt aus $p = 0$, dass alle Vorzahlen des Ausdruckes, durch welchen p aus a_1, \dots, a_n abgeleitet ist, null sind, und daselbe folgt für p_1 und p_2 . Also sind in der Gleichung (b) alle Vorzahlen gleich Null, also giebt es zwischen den Größen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ gar keine Zahlbeziehung oder Hörigkeit, dieselben sind also alle gegenseitig frei.

Satz. Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für be- 53.
liebige von Null verschiedene Größen erster Klasse a und b

$$(*) \quad [Qab] = [Qba] \text{ und } [Qaa] \geq 0$$

ist, so lassen sich stets n gegenseitig freie Größen erster Klasse c_1, \dots, c_n von der Art finden, dass

$$(a) \quad [Qc_a \bar{c}_b] = 0, \quad \text{wo } a \geq b.$$

Ferner sind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle Zahlen d. h. reell, und unter ihnen so viel Pluszahlen, als es unter den Zeugen oder Produkten

$$(b) \quad [Qc_1 \bar{c}_1], \dots, [Qc_n \bar{c}_n]$$

Plusgrößen giebt.

Endlich lassen sich dann stets n zu einander normige Größen e_1, \dots, e_n von der Art finden, dass jede derselben mit Q gewebt oder multipliziert ein Vielfaches derselben liefert, also

$$(c) \quad Qe_a = q_a e_a, \quad \text{wo } [e_a \bar{e}_b] = 0, \text{ wenn } a \geq b \text{ ist.}$$

Beweis. a) Da $a \geq b$ sein soll und nach der Annahme $[Qc_a \bar{c}_b] = [Qc_b \bar{c}_a]$, so genügt es, wenn wir beweisen, dass sich n Größen c_1, \dots, c_n der Art finden lassen, dass sie der Gleichung (a) genügen für den Fall, dass $a < b$ ist. Es sei $Qc_a = q_a$, dann ist die Gleichung $[Qc_a \bar{c}_b] = [q_a \bar{c}_b] = [c_b \bar{q}_a]$ nach Ausdehnungslehre 219. Für c_1 können wir eine beliebige GröÙe erster Klasse ungleich Null wählen; dann muss c_2 der Gleichung $[c_2 \bar{q}_1] = 0$, d. h. es muss nach Ausdehnungslehre 201 c_2 zu q_1 normig sein, oder es muss dem Gebiete \bar{q}_1 , welches von $n-1$ ter Stufe ist angehören, im Uebrigen kann c_2 eine beliebige

GröÙe erster Klasse ≥ 0 sein. Die GröÙe c_3 muss dann den Gleichungen $0 = [c_3 \bar{q}_1] = [c_3 \bar{q}_2]$ genügen, d. h. es muss c_3 den Gebieten \bar{q}_1 und \bar{q}_2 von $(n-1)$ ter Stufe angehören, also dem beiden gemeinschaftlichen Gebiete, welches nach Ausdehnungslehre 30 mindestens von $(n-2)$ ter Stufe ist, in ihm kann c_3 eine beliebige GröÙe erster Klasse ≥ 0 sein.

Auf gleiche Weise muss c_4 den Gleichungen $0 = [c_4 \bar{q}_1] = [c_4 \bar{q}_2] = [c_4 \bar{q}_3]$ genügen, also dem den drei Gebieten $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ von $(n-1)$ ter Stufe gemeinschaftlichen Gebiete angehören, welches nach Ausdehnungslehre 30 mindestens von $(n-3)$ ter Stufe ist, in ihm kann c_4 wieder eine beliebige GröÙe erster Klasse ≥ 0 sein. So kann man fortfahren und muss endlich c_n den Gleichungen $0 = [c_n \bar{q}_1] = [c_n \bar{q}_2] = \dots = [c_n \bar{q}_{n-1}]$ genügen, d. h. c_n muss den $(n-1)$ Gebieten $(n-1)$ ter Stufe $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_{n-1}$, angehören, diese haben mindestens ein Gebiet erster Stufe gemeinsam, in ihm kann c_n eine beliebige GröÙe ≥ 0 sein. Wir haben also n GröÙen erster Klasse c_1, \dots, c_n ungleich Null gefunden, welche der Gleichung $0 = [c_b \bar{q}_a] = [q_a \bar{c}_b] = [Q_{ca} \bar{c}_b]$ genügen, wo $a < b$ und da $[Q_{ca} \bar{c}_b] = [Q_{cb} \bar{c}_a]$ ist, auch wenn $a > b$, kurz $a \geq b$ ist. Diese n GröÙen c_1, \dots, c_n sind aber auch gegenseitig frei. Denn wäre eine derselben zu den andern hörig, so lässt sich nach Ausdehnungslehre 14 eine Gleichung $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = 0$ aufstellen, wo wenigstens eine der Vorzahlen z. B. $x_a \geq 0$ ist. Dann hätte man

$$0 = [Q_{ca} (\bar{x}_1 c_1 + \bar{x}_2 c_2 + \dots + \bar{x}_n c_n)] = x_a [Q_{ca} \bar{c}_a]$$

weil alle andern Zeuge oder Produkte null sind, also wäre dann da $x_a \geq 0$ ist, $[Q_{ca} \bar{c}_a] = 0$, dies aber ist gegen die Voraussetzung in der Gleichung (*). Es ist also unmöglich, dass eine der GröÙen c_1, \dots, c_n zu den andern hörig sei, sie sind also gegenseitig frei.

b) Es sei nun $[Q_{ca} \bar{c}_a] = \alpha_a$ und $a_a = c_a : (\alpha_a)^{1/2}$, wo $\alpha \geq 0$ nach (*), dann bilden die GröÙen a_1, a_2, \dots, a_n einen Verein, welcher den Bedingungen entspricht, d. h. es ist

$$(d) \quad [Q_{a_a} \bar{a}_b] = 0, \text{ wenn } a \geq b \text{ und } [Q_{a_a} \bar{a}_a] = 1.$$

Hier ist a_a eine Zahl oder reell, wenn $[Q_{ca} \bar{c}_a]$ eine PlusgröÙe, dagegen ist a_a eine reine IgröÙe $i b_a$ (wo b_a eine Zahl oder reell, und $i = (-1)^{1/2}$) wenn $[Q_{ca} \bar{c}_a]$ eine StrichgröÙe. Es sind also unter den GröÙen a_1, \dots, a_n so viele Zahlen oder reell, als unter den Zeugen $[Q_{c_1} \bar{c}_1], \dots, [Q_{c_n} \bar{c}_n]$ PlusgröÙen sind. Unter Beweis d wird sich dann noch ergeben, dass

die Zahlen oder reellen unter den Größen a_1, \dots, a_n sämtlich Pluszahlen oder positiv sind.

c) Die Größen b_1, \dots, b_n wollen wir, wenn sie wie die Größen a_1, \dots, a_n der Gleichung (d) genügen und jede entweder eine Zahl (reell) oder eine reine Igröse id ist (wo d reell), einen trauten Verein nennen. Jeder traute Verein a_1, \dots, a_n bleibt auch bei der Kreiseländerung nach Ausdehnungslehre 211 ein trauter Verein, in welchem die Anzahl der Zahlgrößen, der reellen Größen, unverändert bleibt, sofern bei der Kreiseländerung a_a und a_b in $b_a = x a_a + y a_b$ und in $b_b = x a_b - y a_a$ übergehen, wo x stets eine Zahl oder reell, y aber nur dann eine Zahl ist, wenn a_a und a_b beide Zahlgrößen oder reell, dagegen y eine reine Igröse wird, wenn eine oder beide der Größen a_a und a_b reine Igrößen sind, auch $x^2 + y^2 = 1$ ist, also

$$(e) \quad b_a = x a_a + y a_b \quad b_b = x a_b - y a_a \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Es leuchtet sofort ein, dass auch b_a und b_b beide Zahlen oder reell, oder beide reine Igrößen sind, oder eine derselben eine Zahl, die andere eine einfache Igröse ist, je nachdem dies für a_1 und a_2 der Fall war, und dass also die Anzahl der Zahlgrößen oder reellen Größen des Vereins bei der Kreiseländerung dieselbe bleibt. Setzen wir nun $b > 2$, so wird nach (e)

$$[Q b_1 \bar{a}_b] = x [Q a_1 \bar{a}_b] + y [Q a_2 \bar{a}_b] = 0$$

$$\text{da nach (d)} \quad [Q a_1 \bar{a}_b] = 0 \quad \text{und} \quad [Q a_2 \bar{a}_b] = 0 \text{ ist.}$$

$$\text{Ebenso wird} \quad [Q b_2 \bar{a}_b] = 0, \text{ mithin ist}$$

$$[Q b_1 \bar{b}_2] = x^2 [Q a_1 \bar{a}_2] - y^2 [Q a_2 \bar{a}_1] + xy ([Q a_2 \bar{a}_2] - [Q a_1 \bar{a}_1])$$

$$\text{nun aber ist } 0 = [Q a_1 \bar{a}_2] = [Q a_2 \bar{a}_1] \text{ und } 1 = [Q a_1 \bar{a}_1] = [Q a_2 \bar{a}_2]$$

$$\text{also ist } [Q b_1 \bar{b}_2] = 0.$$

$$\text{Ferner ist } [Q b_1 \bar{b}_1] = x^2 [Q a_1 \bar{a}_1] + y^2 [Q a_2 \bar{a}_2] + 2xy [Q a_1 \bar{a}_2] = 1$$

$$\text{da } 1 = [Q a_1 \bar{a}_1] = [Q a_2 \bar{a}_2], \text{ auch } x^2 + y^2 = 1, \text{ und } [Q a_1 \bar{a}_2] = 0 \text{ ist.}$$

Ebenso folgt $[Q b_2 \bar{b}_2] = 1$. Also genügt der Verein, welcher aus a_1, \dots, a_n durch Kreiseländerung hervorgeht, der Gleichung (d), ebenso genügt also auch jeder Verein, der aus a_1, \dots, a_n durch wiederholte Kreiseländerung hervorgeht.

Sollen hier b_1 und b_2 zu einander normig sein, so muss nach Ausdehnungslehre 201 auch $[b_1 \bar{b}_2] = 0$ sein, man hat dann also nach (e)

$$\begin{aligned} 0 &= [(x a_1 + y a_2)(\bar{x} a_2 - \bar{y} a_1)] \\ &= x^2 [a_1 \bar{a}_2] - y^2 [a_2 \bar{a}_1] + xy (a_2^2 - a_1^2). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\gamma = (a_1^{\frac{2}{2}} - a_2^{\frac{2}{2}}) : 2[a_1 a_2]$, so wird

$0 = x^2 - y^2 - 2\gamma xy$ und teilen wir diese durch y^2 , so erhalten

wir $\frac{x^2}{y^2} - 2\gamma \frac{x}{y} = 1$, d. h. $\frac{x}{y} = \gamma \pm (1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$

Sind nun a_1 und a_2 beide Zahlgrößen d. h. reell, oder sind beide reine Igrößen, so ist γ eine Zahlgröße d. h. reell, also auch $\frac{x}{y}$ eine Zahlgröße (reell) d. h. wenn x stets eine Zahlgröße, auch y eine Zahlgröße oder reell, also sind dann die Größen a_1 und a_2 durch Kreifeländerung normig gemacht.

Ist dagegen von den Größen a_1 und a_2 die eine eine Zahlgröße oder reell $= d$, die andere eine reine Igröße $= id'$, so wird

$\gamma = \pm (d^{\frac{2}{2}} + d'^{\frac{2}{2}}) : 2i[dd']$, also ist

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 &= 1 - \left(\frac{d^{\frac{2}{2}} + d'^{\frac{2}{2}}}{2[dd']} \right)^2 = \left(1 + \frac{d^{\frac{2}{2}} + d'^{\frac{2}{2}}}{2[dd']} \right) \left(1 - \frac{d^{\frac{2}{2}} + d'^{\frac{2}{2}}}{2[dd']} \right) \\ &= \frac{d^{\frac{2}{2}} + 2[dd'] + d'^{\frac{2}{2}}}{2[dd']} \cdot \frac{2[dd'] - d^{\frac{2}{2}} - d'^{\frac{2}{2}}}{2[dd']} \\ &= \frac{-(d + d')^2 (d - d')^2}{4[dd']^2} \end{aligned}$$

Mithin ist $(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$ eine reine Igröße, ebenso auch γ , also ist auch $\frac{x}{y} = \gamma \pm (1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$ eine reine Igröße. Setzen wir also x als Zahl (reell), so ist y eine reine Igröße, und wird dann die eine der Größen b_1 und b_2 eine Zahlgröße, die andere eine reine Igröße. Dies aber war die Bedingung der Kreifeländerung in diesem Falle. Mithin lassen sich in allen Fällen je zwei Größen des Vereins, welche noch nicht normig zu einander sind, durch Kreifeländerung normig zu einander machen.

Bei dieser Kreifeländerung wird das Zeug oder Produkt der Zahlwerte der Größen jedesmal kleiner, wobei unter dem Zahlwerte von id , wo d eine Zahl, der Zahlwert von d verstanden wird. Seien nämlich α_1 und α_2 die Zahlwerte von a_1 und a_2 , und β_1 und β_2 die von b_1 und b_2 , so ist nach Ausd. 192 $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$, aber nach Ausd. 249 ist $[a_1 a_2]^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \sin \angle a_1 a_2)^2$, wenn α_1 und α_2 Zahlen oder reell sind; dasselbe wird nun auch der Fall sein, wenn a_1 und a_2 reine Igrößen sind, und unter $\angle a_1 a_2$ stets der Winkel zwischen den

entsprechenden Zahlgrößen (den reellen Größen) verstanden ist; dagegen, wenn eine der Größen a_1 und a_2 eine Zahlgröße (reell), die andere eine reine Igröße ist, so wird $[a_1 a_2]^2 = -(a_1 a_2 \text{ fln. } \angle a_1 a_2)^2$, aber dann auch $[b_1 b_2]^2 = -(\beta_1 \beta_2 \text{ fln. } \angle b_1 b_2)^2$ also da $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$ ist, so ist in allen Fällen

$$(a_1 a_2 \text{ fln. } \angle a_1 a_2)^2 = (\beta_1 \beta_2 \text{ fln. } \angle b_1 b_2)^2.$$

Wenn nun a_1 und a_2 nicht zu einander normig, hingegen b_1 und b_2 zu einander normig sind, so ist $(\text{fln. } \angle a_1 a_2)^2 < 1$, $(\text{fln. } \angle b_1 b_2)^2 = 1$, also $(a_1 a_2)^2 > (\beta_1 \beta_2)^2$, d. h. da $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ Plusgrößen (positiv) sind, $a_1 a_2 > \beta_1 \beta_2$. Also wenn von den Größen eines trauten Vereins irgend zwei noch nicht zu einander normig sind, so lässt sich der Verein durch Kreiseländerung so umwandeln, dass das Zeug oder Produkt der Höhenwerte aller Größen des Vereins kleiner wird. Den geringsten Zahlenwert wird dies Zeug oder Produkt erhalten, wenn alle Größen des Vereins zu einander normig sind. Es sei r_1, r_2, \dots, r_n dieser Verein, so genügt derselbe, da er aus dem Vereine a_1, a_2, \dots, a_n abgeleitet ist, wie oben bewiesen nach der Gleichung (d), und enthält eben so viele Zahlgrößen (reelle Größen), wie der letztere Verein, also eben so viele Zahlgrößen, als unter den Zeugen oder Produkten $[Qc_1 \bar{c}_1], \dots, [Qc_n \bar{c}_n]$ Plusgrößen (positive) vorkommen.

d) Es bleibt nun noch zu beweisen, dass unter den n Hauptzahlen des Bruches Q so viele Pluszahlen (positive) vorkommen, als es unter den Zeugen $[Qc_1 \bar{c}_1], \dots, [Qc_n \bar{c}_n]$ Plusgrößen giebt. Es sei nun $Qr_1 = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$, dann verwandelt sich in (d) die Gleichung $0 = [Qr_1 \bar{r}_1]$ in $0 = ([x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n] \bar{r}_1) = x_1 [r_1 \bar{r}_1]$, da alle übrigen Zeuge oder Produkte $[r_1 \bar{r}_1], [r_2 \bar{r}_2]$ u. s. w. wegen der normigen Beziehung nach Ausdehnungslehre 201 null sind. Da nun ferner r_1 , also auch $[r_1 \bar{r}_1]$ von Null verschieden ist, so folgt aus der Gleichung $0 = x_1 [r_1 \bar{r}_1]$, dass $x_1 = 0$ sei; auf gleiche Weise folgt $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, also ist $Qr_1 = x_1 r_1$. Dann verwandelt sich in (d) die $1 = [Qr_1 \bar{r}_1]$ in $1 = x_1 [r_1 \bar{r}_1] = x_1 r_1 \frac{1}{r_1^2}$, also ist $x_1 = \frac{1}{r_1^2}$ und $Qr_1 = \frac{1}{r_1^2} r_1$, und aus gleichem Grunde ist

$$Qr_2 = \frac{1}{r_2^2} r_2, \dots, Qr_n = \frac{1}{r_n^2} r_n.$$

Setzt man demnach

$$(f) \quad \frac{1}{r_1} = q_1, \quad \frac{1}{r_2} = q_2, \dots, \frac{1}{r_n} = q_n,$$

und setzt r_1, r_2, \dots, r_n als die Nenner des Bruches Q , so werden die zugehörigen Zähler $q_1 r_1, q_2 r_2, \dots, q_n r_n$, und die Zähler des Bruches $q - Q$ werden also $(q - q_1)r_1, (q - q_2)r_2, \dots, (q - q_n)r_n$, der Höhenwert des Bruches $q - Q$ ist aber nach 43 gleich dem Fläche seiner Zähler geteilt durch das Flach seiner Nenner, also gleich $(q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_n)$. Die Gleichung aber, durch welche die Hauptzahlen q eines Bruches bedingt sind, drückt aus, dass der Potenzwerth von $q - Q$ null sei, also hat man

$$(q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_n) = 0,$$

d. h. q_1, \dots, q_n sind die Hauptzahlen von Q , es waren dieselben (nach

$$(f)) \text{ gleich } \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n}. \text{ Je nachdem nun } r \text{ eine ZahlgröÙe (reell)}$$

oder eine reine IgröÙe ist, ist $\frac{1}{r}$ eine Plus- oder eine StrichgröÙe

(positiv oder negativ), also kommen unter den Hauptzahlen von Q so viel Pluszahlen vor, als unter den GröÙen r_1, r_2, \dots, r_n ZahlgröÙen (reelle)

vorkommen, d. h. wie oben gezeigt, als unter den Zeugen $[Qc_1 \bar{c}_1]$,

$\dots [Qc_n \bar{c}_n]$ PlusgröÙen vorkommen. Also ist auch dieser Teil des Satzes bewiesen.

6. Die verwandten Vereine.

Erklärung. Verwandt heißen zwei Vereine von Größen, wenn 54. jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Größen des einen Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden des andern stattfindet, d. h. wenn der Größe

$$p = \alpha a + \beta b + \dots$$

die Größe

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \dots$$

entspricht und umgekehrt, wo nämlich α, β, \dots beliebige Zahlen und a, b, \dots beliebige Größen des ersten Vereins und a_1, b_1, \dots die entsprechenden des andern sind.

Satz. Wenn zwei Vereine von Größen, in denen die Größen 55. eines jeden Vereins zu n gegenseitig freien Größen deselben hörig sind, einander verwandt sein sollen, so kann man beliebigen n gegenseitig freien Größen des einen Vereins beliebige n gegenseitig freie Größen des andern entsprechend setzen; dann ist zu jeder Größe eines jeden der beiden Vereine die entsprechende des andern genau bestimmt.

Beweis. Es seien a, b, \dots beliebige n gegenseitig freie Größen des einen, und a_1, b_1, \dots beliebige n gegenseitig freie Größen des andern Vereins, so lässt sich nach der Voraussetzung jede Größe p des ersten Vereins als Vielfachensumme aus a, b, \dots darstellen und sei

$$p = \alpha a + \beta b + \dots$$

so sind nach Ausdehnungslehre 16 die Zahlen α, β, \dots genau bestimmt, sobald p eine bestimmte Größe ist. Sollen nun beide Vereine verwandt sein, so muss nach 54 der Größe p eine Größe

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \dots$$

entsprechen. Es ist also zu jeder Größe des einen Vereins die entsprechende des andern genau bestimmt.

Sollen die so gebildeten Vereine einander verwandt sein, so muss ferner jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Größen des ersten

Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Größen des zweiten herrschen und umgekehrt. Sei also

$$(a) \quad qr + \sigma s + \dots = 0$$

eine zwischen den Größen r, s, \dots des ersten Vereins herrschende Zahlbeziehung, und seien r_1, s_1, \dots die den Größen r, s, \dots entsprechenden Größen des zweiten Vereins, so ist zu beweisen, dass auch

$$qr_1 + \sigma s_1 + \dots = 0$$

sei. Setzt man in (a) r, s, \dots als Vielfachen summen von a, b, \dots , löst die Klammern auf, und fasst die Glieder, welche a enthalten, in ein Glied zusammen u. s. w., so erhält man einen Ausdruck der Form

$$\alpha a + \beta b + \dots = 0,$$

wo α, β, \dots Formeln der Vorzahlen q, σ, \dots und der Ableitungszahlen von r, s, \dots sind. Hieraus folgt, da a, b, \dots gegenseitig frei sind, nach Ausdehnungslehre 15

$$\alpha = 0, \beta = 0, \dots$$

Wendet man nun dasselbe Verfahren auf den Ausdruck $qr_1 + \sigma s_1 + \dots$ an, so erhält man, da die Ableitzahlen von r_1, s_1, \dots dieselben sind, wie die von r, s, \dots ,

$$qr_1 + \sigma s_1 + \dots = \alpha a_1 + \beta b_1 + \dots,$$

wo α, β, \dots dieselbe Bedeutung haben, wie oben. Da aber α, β, \dots null sind, so erhält man auch

$$qr_1 + \sigma s_1 + \dots = 0,$$

d. h. jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Größen des ersten Vereins herrscht, herrscht auch zwischen den entsprechenden des zweiten, und ebenso umgekehrt, d. h. die beiden Vereine sind verwandt.

56. **Satz.** Man kann in zwei Vereinen, deren jeder zu n Größen desselben hörig ist, und welche einander verwandt sein sollen, in jedem beliebige $n + 1$ Größen annehmen, von denen je n gegenseitig frei sind und festsetzen, dass den $n + 1$ Größen des ersten Vereins $n + 1$ Größen entsprechen sollen, welche den $n + 1$ im zweiten Verein angenommenen Größen deckend oder kongruent sind; dann ist zu jeder Größe eines Vereines die entsprechende des andern, mit Ausnahme einer für alle gleichen Vorzahl, genau bestimmt. (Deckend heissen zwei Größen, wenn die eine sich als ein Vielfaches der andern darstellen lässt).

Beweis. Es seien a_1, \dots, a_{n+1} die Größen des ersten und b_1, \dots, b_{n+1} die des zweiten Vereins, welche der im Satze ausgesprochenen Bedingung genügen, so wird sich, gemäß dieser Bedingung, jede der

Größen a_1, \dots, a_{n+1} als Vielfachensumme der übrigen darstellen lassen, deren Vorzahlen alle ungleich Null sind. Denn da der Verein zu n gegenseitig freien Größen hörig sein soll, so muss er auch nach Ausdehnungslehre 26 aus je n dieser Bedingung unterworfenen Größen ableitbar sein, also auch jede der Größen a_1, \dots, a_{n+1} als Vielfachensumme der übrigen darstellbar sein, und sollte von den Vorzahlen irgend eine Null sein, so würde zwischen den n übrigen, gegen die Voraussetzung eine Zahlbeziehung herrschen. Daselbe gilt für die Größen b_1, \dots, b_{n+1} . Nun sei

$$(a) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \\ b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n, \end{cases}$$

also $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ alle ungleich Null.

Ferner seien c_1, \dots, c_{n+1} die Größen, welche beziehlich den Größen a_1, \dots, a_{n+1} entsprechen und den Größen b_1, \dots, b_{n+1} deckend oder kongruent sein sollen. Dann muss für jeden Zeiger a von 1 bis $n+1$ sich c_a als Vielfaches von b_a darstellen lassen, also

$$(b) \quad c_a = x_a b_a \quad \text{wo } x_a \geq 0.$$

Da ferner c_1, \dots, c_{n+1} den Größen a_1, \dots, a_{n+1} so entsprechen sollen, dass die Vereine verwandt sind, so muss nach 54

(c) $c_{n+1} = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n$ sein. Setzt man in (c) die Werte aus (b) ein und teilt durch x_{n+1} , so erhält man

$$b_{n+1} = \frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} b_1 + \dots + \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} b_n.$$

Aber aus (a) hat man zugleich

$$b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n,$$

also muss nach Ausdehnungslehre 15

$$\frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} = \beta_1, \dots, \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} = \beta_n \quad \text{sein.}$$

Hierdurch bestimmen sich alle Unbekannte bis auf eine. Setzen wir $x_{n+1} = \lambda$, so wird

$$(d) \quad x_1 = \frac{\lambda \beta_1}{\alpha_1}, \dots, x_n = \frac{\lambda \beta_n}{\alpha_n}, x_{n+1} = \lambda.$$

Wenn diese Bedingungen (d) erfüllt sind, so wird auch umgekehrt die Gleichung (c) erfüllt. Dann sind also die Vereine verwandt in Bezug auf die $n+1$ Größen a_1, \dots, a_{n+1} und die ihnen entsprechenden c_1, \dots, c_{n+1} und jeder GröÙe

$$p = d_1 a_1 + \dots + d_n a_n$$

entspricht die GröÙe

$$q = d_1 c_1 + \dots + d_n c_n.$$

Setzt man hier statt c_1, \dots, c_n ihre Werte aus (b) und dann statt x_1, \dots, x_n ihre Werte aus (d), so hat man

$$q = \lambda \left(\frac{d_1 \beta_1}{a_1} b_1 + \dots + \frac{d_n \beta_n}{a_n} b_n \right),$$

d. h. q ist mit Ausnahme der für alle gleichen Vorzahl λ genau bestimmt.

57. **Satz.** Wenn man aus zwei verwandten Vereinen zwei neue Vereine dadurch ableitet, dass man jedem linigen Zeuge oder Produkte P , welches aus Größen des ersten Vereines gebildet ist, dasjenige Zeug oder Produkt als entsprechend setzt, welches auf gleiche Weise aus den entsprechenden Größen des zweiten Vereins gebildet ist, so sind diese beiden neuen Vereine einander gleichfalls verwandt; d. h. wenn r, s, \dots beliebige Größen des einen und r_1, s_1, \dots die entsprechenden des verwandten Vereines sind, und die linigen Zeuge oder Produkte $P(r, s, \dots)$ und $P(r_1, s_1, \dots)$ einander entsprechend gesetzt werden, wie auch r, s, \dots gewählt sein mögen, so sind auch die so erhaltenen Vereine einander verwandt.

Beweis. Es seien a_1, a_2, \dots, a_n Größen des ersten Vereins, welche gegenseitig frei sind, und lassen sich alle Größen des ersten Vereins als Vielfachensummen derselben darstellen, und seien b_1, b_2, \dots, b_n die entsprechenden Größen des andern Vereines, welche also denselben Bedingungen unterworfen sind, und sei

$$r = S q_a a_n = q_1 a_1 + \dots + q_n a_n, \quad s = S \sigma_a a_n, \text{ u. f. w.},$$

also (nach 54)

$$r_1 = S q_a b_n, \quad s_1 = S \sigma_a b_n, \dots,$$

so wird

$$\begin{aligned} P(r, s, \dots) &= S q_a \sigma_b \dots P(a_n, a_n, \dots) \\ P(r_1, s_1, \dots) &= S q_a \sigma_b \dots P(b_n, b_n, \dots) \end{aligned} \quad (\text{nach Ausd. 71}).$$

Da nun die Zeuge linige sind, so muss nach Ausdehnungslehre 111 jede Bedingungsungleichung, welche zwischen den Zeugen $P(a_n, a_n, \dots)$ herrscht, auch bestehen bleiben, wenn man statt a_1, a_2, \dots, a_n die Größen b_1, b_2, \dots, b_n setzt. Nun lassen sich nach Ausdehnungslehre 111, wenn p die Anzahl der verschiedenen Zeuge von der Form $P(a_n, a_n, \dots)$ und q die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsungleichungen ist, die sämtlichen Zeuge $P(a_n, a_n, \dots)$ als Vielfachensummen der $p - q$ derselben, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, darstellen und zwar so, dass, wenn diese $p - q$ Zeuge bestimmt sind, auch für jedes, der übrigen Zeuge die Ableitzahlen bestimmt sind. Die Ausdrücke dieser Ableitung sind nur von den Bedingungsungleichungen abhängig. Setzt

man daher statt a_1, a_2, \dots überall b_1, b_2, \dots , so müssen, da die Bedingungengleichungen bei dieser Setzung noch geltend bleiben, auch die Ausdrücke jener Ableitung bestehen bleiben, d. h. wenn A_1, A_2, \dots die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Zeuge sind, aus welchen sich alle übrigen Zeuge der Form $P(a_a, a_b, \dots)$ ableiten lassen, und

$$P(a_a, a_b, \dots) = \alpha_{1, a, b, \dots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} A_2 + \dots$$

ist, wenn ferner B_1, B_2, \dots diejenigen Zeuge sind, welche aus den Zeugen A_1, A_2, \dots dadurch hervorgehen, dass man in diesen b_1, b_2, \dots statt a_1, a_2, \dots setzt, so ist

$$P(b_a, b_b, \dots) = \alpha_{1, a, b, \dots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} B_2 + \dots$$

Also

$$P(r, s, \dots) = \sum \frac{\sigma_a \sigma_b \dots (\alpha_{1, a, b, \dots} A_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} A_2 + \dots)}{\sigma_a \sigma_b \dots (\alpha_{1, a, b, \dots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} B_2 + \dots)},$$

$$P(r_1, s_1, \dots) = \sum \frac{\sigma_a \sigma_b \dots (\alpha_{1, a, b, \dots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} B_2 + \dots)}{\sigma_a \sigma_b \dots (\alpha_{1, a, b, \dots} B_1 + \alpha_{2, a, b, \dots} B_2 + \dots)},$$

d. h. es ist $P(r, s, \dots)$ durch dieselben Zahlen aus A_1, A_2, \dots abgeleitet, wie das entsprechende Zeug $P(r_1, s_1, \dots)$ aus den entsprechenden Zeugen B_1, B_2, \dots , d. h. nach 54 es ist der Verein der Zeuge $P(r, s, \dots)$ verwandt dem Vereine der entsprechenden Zeuge $P(r_1, s_1, \dots)$.



Formelbuch

der

Formenlehre oder Mathematik.

Von

Robert Grassmann.



Stettin 1905.

Druck und Verlag von R. Grassmann.

Formelbuch

der

Zahlenlehre oder Arithmetik.

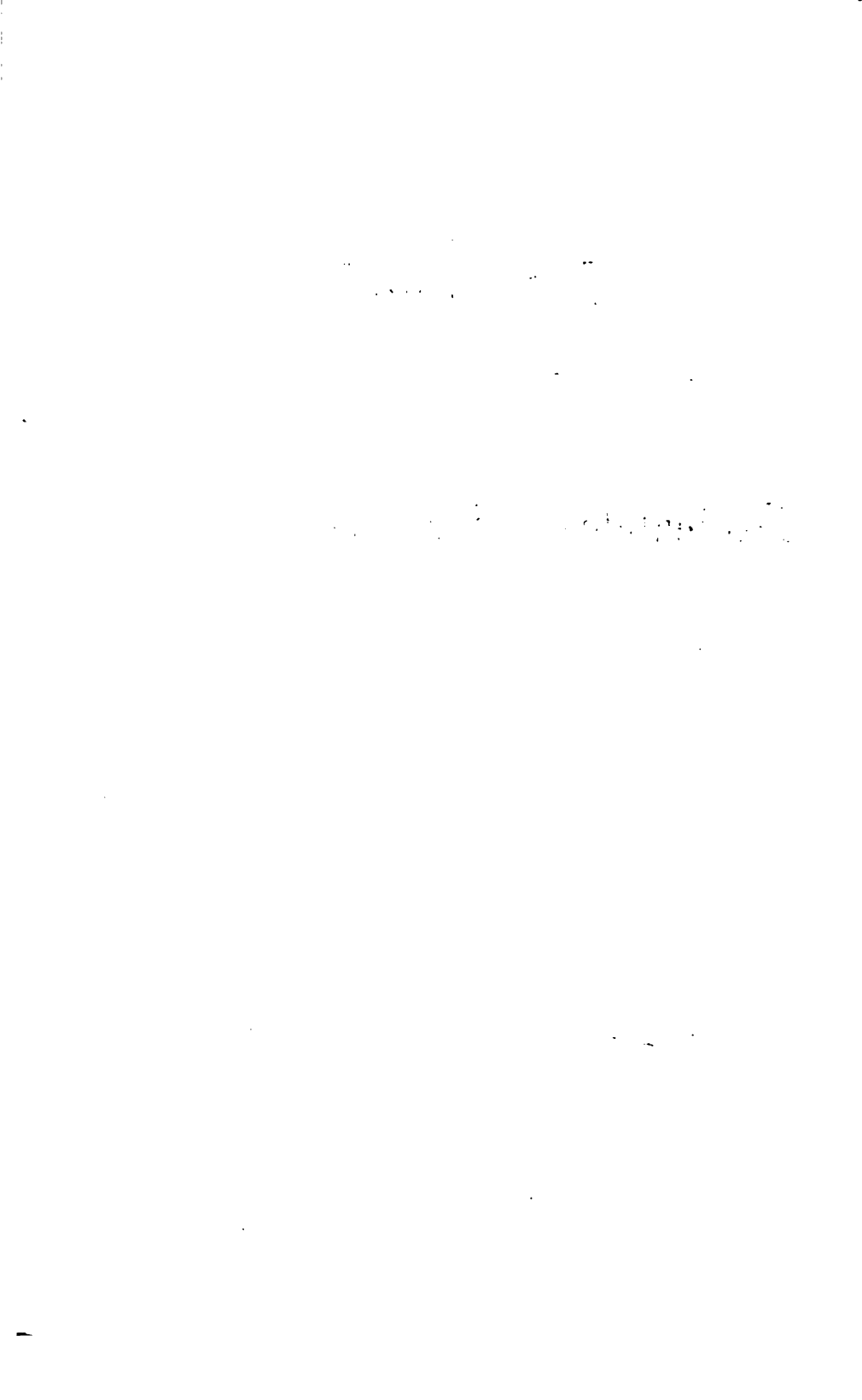


Erster Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.





Einleitung in die Zahlenlehre oder Arithmetik.

Die Erklärungen und die Beweisform der Größenlehre.

1. Denklehre, Größenlehre.
2. GröÙe.
3. Zeichen der GröÙe: a, b, c .
4. Einfaches (Element): e_1, e_2, e_3, \dots .
5. Knüpfung, Ergebniss oder Gesamt.
6. Zeichen der Knüpfung: aob , gelesen „ a mit b .“
7. Klammer: $ao(boc)$, gelesen „ a mit Klammer b mit c geschlossen.“
8. Fortschreitend knüpfen. Einfache GröÙe.

$$G_{e,a_n} = a_1 o a_2 o a_3 o \dots o a_n.$$
9. Formel. $foa, Foa, \varphi oa, \Phi oa$; gleichlautend, verschieden, entsprechend.
10. Gleich, ungleich.
11. Zeichen $a=b$, gelesen „ a gleich b “, $a \neq b$, gelesen „ a ungleich b .“
Gleichung, linke, rechte Seite.
12. $a = a$.
13. $aobocod = [(aob)oc]od$.
14. $G_{e,a_n} = G_{e,a_n} o a.$

$$1, n+1 \quad 1, n \quad n+1$$
15. Bedingt gleich * * Bedingung.
16. $Foa \stackrel{*}{=} Fob$ * wenn $a = b$.
17. $aob \stackrel{*}{=} aoc$ * wenn $b = c$.
18. Wenn $a = c$ und $b = c$; $fo a = b$.
19. $(a = b) = (b = a)$.
20. Wenn $a = b$ und $b = c$; $fo a = c$.
21. Wenn $a = (bocodo\dots)$; fo ist $a = bocodo\dots$.
22. Gerader Beweis: Wenn $a_1 = a_2, a_2 = a_3 \dots a_n - 1 = a_n$; $fo a_1 = a_n$.
23. Fortleitender Beweis: Wenn $Foa_1 = \Phi oa_1$ und sofern $Foa_n = \Phi oa_n$, fo auch $Foa_{n+1} = \Phi oa_{n+1}$; $fo Foa_n = \Phi oa_n$.
24. Einfacher (elementarer) Beweis.

Die Arten der Größenknüpfung.

25. Knüpfungsgröße (ob).
26. $ac(ob) = aob$.
27. Drei Arten der Knüpfung.
28. Anreihung: $aoboc \supset ac(boc)$.
29. Einigung.
30. $ac(boc) = aoboc$.
31. aob eine einfache Größe.
32. $ac(boc) = aoboc$.
33. $ac(b_1ob_2o \dots ob_n) = aob_1ob_2o \dots ob_n$.
34. Jede Größe als Einfaches (Element) zu setzen.
35. Vertauschung.
36. $e_1oe_2 = e_2oe_1$.
37. $aobocod = doaoboc$.
38. Jede Größe als Einfaches zu setzen.

Die Gattungen der Knüpfung und der Zerlegung.

39. Nicht ändernde Größe. Zeichen μ .
40. $a\mu = a$, $\mu a = a$.
41. Unveränderliche Größe. Zeichen v .
42. $av = v$, $va = v$.
43. Zwei Gattungen der Knüpfung.
44. Zwei Gattungen der Zerlegung.
45. Trennbare Knüpfung.
46. Wenn $aob = aoc$ oder $boa = coa$; so $b = c$, wo $a \supset r$.
47. Trennung. Gefammt. Trenner $\supset r$.
48. Zeichen $a \vee b = c$, gelesen „a trenn b gleich c.“ Gefammt a. Trenner b. Bleibfel c.
49. $a = aob \vee b$; $a = a \vee bob$.
50. Trenngröße ($\vee b$), gelesen „Trenn b.“ Mitgröße (ob), gelesen „Mit b.“
51. $ac(\vee b) = a \vee (ob) = a \vee b$; $a \vee (\vee b) = ac(ob) = aob$.
52. Drei Arten des Trennens.
53. Antrennen.
54. $ac(b \vee c) \supset aob \vee c$.
55. Eintrennen.
56. $ac(b \vee c) = aob \vee c$; $ac(\vee boc) = a \vee boc$.
57. $b \vee b = \mu$; $\vee bob = \mu$.
58. $a \vee (boc) = a \vee b \vee c$; $a \vee (b \vee c) = a \vee boc$.
59. Gesetz der Einigung und Eintrennung.
60. Jede Größe als Einfaches zu setzen.
61. Abtrennen.
62. Gesetz der Vertauschung und Abtrennung.
63. Jede Größe als Einfaches zu setzen.
64. Untrennbare Knüpfung.
65. Lösung.

106. Gesetz des Einwebens.
 107. Verweben.
 108. $e_1 e_2 = e_2 e_1$.
 109. Gesetz des Verwebens.
 110. Formenlehre oder **Mathematik**: Aeusere Fügung.
 111. Die Einheit das Einfache der Formenlehre oder **Mathematik**.
 112. Zweige: Rechenlehre oder **Analysis**.
 Niedere: Zahlenlehre oder **Arithmetik**.
 Höhere: Folgelehre oder **Funktionenlehre**.
 Auslenlehre oder **Synthesis**.
 Niedere: **Ausdehnungslehre**.
 Höhere: **Erweiterungslehre**.

Erster Abschnitt der Zahlenlehre: Die niedere Zahlenlehre oder ganze Zahlen und Brüche.

113. Zahlenlehre oder **Arithmetik**: Nur eine Einheit die Eins.
 114. Zahlen: Jede Zahl allen andern ungleich.
 115. $S \quad 1 \geq S1$.
 $1, m + n \quad 1, m$
 116. Null. Eins. Zwei. Drei. Vier. Fünf. Sechs. Sieben. Acht. Neun.
 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 117. Stelle. Nulte Stelle. ate Stelle.
 Eins. Zehn. Hundert. Tausend. Zehntausend. Hunderttausend. Million.
 1 10 100 1000 10000 100000 1000000
 118. $a + (b + 1) = a + b + 1$.
 119. Auf einer Stelle $9 + 1$ giebt 1 auf der nächst höhern Stelle.
 120. $a + (b + 1) = a + b + 1$, $1 + 1' = 1' + 1$.
 121. Das Eins und Eins.
 122. Zufügen der Zahlen: Gesetz dafür.
 123. Zufügen mehrziffriger Zahlen.
 124. Rechenregel fürs Zufügen.
 125. Zahlenzufügen ist trennbar. Wenn $a + b = a + c$, so $b = c$.
 126. Abziehen (Subtrahiren), Vorrat (minuendus), Abzug (subtractor).
 Rest oder Unterschied.
 127. Zeichen des Abziehens —, gelesen „strich“ oder „minus“;
 Strichgröße (negative Größe) (— b), Strichklammer — ().
 „Plus“ und „Strich“ entgegengesetzte Zeichen.
 128. Gliederausdruck (Polynom); Glied, durch Plus oder Strich geknüpft.
 129. $a = a + b - b$; $a = a - b + b$;
 130. Das Eins von Eins.
 131. Gesetz der ersten Ordnung der Zahlenlehre.
 132. Jede Zahlgröße ist als Einheit zu setzen.
 133. $+ (-a) = - (+a) = -a$; $+ (+a) = - (-a) = +a$.
 134. $a + 0 = a - 0 = a$.
 135. $0 = a - a = -a + a$. Wenn $a = b$, so ist $a - b = 0$.
 136. Das Abziehen mehrziffriger Zahlen.

137. Rechenregel fürs Abziehen. Borgeregeln.
 138. Gleichartig, gleichwertig, entgegengesetzt.
 139. $+a$ und $-a$ sind entgegengesetzte Zahlen.
 140. Jede Zahl ist entweder Pluszahl oder Strichzahl oder Null.
 141. Die Summe von Pluszahlen, die von Strichzahlen.
 142. Größere Zahl, kleinere Zahl, $a > b$, $b < a$.
 Ausschließendes Mittel $c = \text{Mitt}(b[,]a)$. Einschließendes Mittel $c = \text{Mitt}[b, a]$.
 143. Jede Zahl entweder größer, gleich oder kleiner als a .
 144. Wenn $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3$, \dots , $a_{n-1} > a_n$, so $a_1 > a_n$.
 145. $+a > 0$, $-a < 0$.
 146. Wenn $a > b$, so ist $a - b$ gleichartig mit a .
 147. Wenn $a > b$, so ist $a \pm c > b \pm c$.
 148. Wenn $a + c > a$, so ist $(a + c) + b > a + b$.
 149. Wenn $a_1 + c_1 > a_1$, $a_2 + c_2 > a_2$, \dots , so ist
 $(a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + b > a_1 + a_2 + b$.
 150. Wenn $a + c > a$, so ist $b - (a + c) < b - a$.
 151. Benannte Zahl ae , Anzahl a , Name e , gleichbenannte.
 152. In der Zahlenlehre nur gleichbenannte.
 153. $ae + be + \dots = (a + b + \dots)e$; $ae - be = (a - b)e$.
 154. Alle Sätze erster Ordnung gelten für benannte Zahlen.
 155. Vervielfachen, Multiplizieren. Vielfaches, Produkt.
 156. $(a + 1)b = ab + 1 \cdot b$; $a(b + 1) = ab + a \cdot 1$; $1 \cdot 1' = 1' \cdot 1$
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
 157. $(+a)(+b) = ab = (-a)(-b)$; $(+a)(-b) = -ab = (-a)(+b)$.
 $-(a+b)c = -(ac + bc) = -ac - bc$; $-(a-b)c = -(ac - bc)$
 $= -ac + bc$.
 158. $(-1)a = -a$.
 159. $2a$ Strichfache geben $+$; $2a + 1$ Strichfache geben Strich.
 160. Gesetz der Vervielfachung.
 161. $(a \cdot 10^n)(b \cdot 10^m) = ab \cdot 10^{n+m}$.
 162. Vervielfachung einer einziffrigen mit einer mehrziffrigen Zahl.
 163. Vervielfachung mehrziffriger Zahlen.
 164. Trennbares Vervielfachen.
 Wenn $ac = bc$, so $a = b$ wenn $c \neq 0$.
 165. Teilen, Dividieren; Zuteilende GröÙe (dividendus); Teiler (divisor);
 Quote (quotiens); Bruch, Zähler, Nenner; Vorzahl (Koeffizient). Nenner $\neq 0$.
 166. Zeichen des Teilens : oder / gelesen „durch“,
 TeilgröÙe ($:b$), gelesen „durch b “, Teilklammer $:()$, Teilstrich $\frac{a+b}{c}$.
 „Mal“ und „durch“ umgekehrte Zeichen.
 167. $a = \frac{ab}{b} = \frac{a}{b} \cdot b = a \cdot b : b = a : b \cdot b$.
 168. $a \cdot (:b) = a : (\cdot b) = a : b$; $a : (:b) = a \cdot (\cdot b) = ab$.
 169. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + \dots + a_n : b$.
 170. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.
 171. $:(a) = (:a) = :a$; $:(a) = a$ wo $a \neq 0$.

$$172. a = a \cdot 1 = \frac{a}{1}.$$

$$173. 1 = a : a = : a \cdot a, \quad \text{wo } a \geq 0.$$

$$174. \frac{0}{a} = 0 \cdot a = 0, \quad \text{wo } a \geq 0.$$

$$175. \text{Wenn } \frac{a}{b} = 0 \text{ oder } ab = 0 \text{ und } b \geq 0; \quad \text{so } a = 0.$$

$$176. \text{Bruchseinheit.} \quad \frac{1}{a} \quad 1 : a.$$

$$177. \frac{1}{a} = 1 : a = : a; \quad \frac{m}{a} = m \cdot \frac{1}{a}.$$

$$178. 1 : (-a) = -(1 : a); \quad \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}.$$

$$179. \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

180. Gesetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre.

$$181. a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

$$182. \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

183. Beziehungs-gesetz der zweiten Ordnung der Zahlenlehre.

184. Rechenregel fürs Teilen.

$$185. \text{Gemeinnenner } \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \text{ Gemeinnenner } b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

$$186. \frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \dots \pm \frac{a_n}{b_n} = \frac{P_1 \pm P_2 \pm \dots \pm P_n}{P}$$

wo $P = b_1 b_2 \dots b_n$ und $P_a = b_1 b_2 \dots b_n - 1 \cdot a_1 \cdot b_a + 1 \dots b_n$

187. Jede ZahlgröÙe ist als Einheit zu setzen.

188. Zehntbruch (Dezimalbruch).

$a + 1$ Bruchstelle = $\frac{1}{10}$ mal $a + 1$ te Bruchstelle; gleichnamige Zehntel. Hundertel. Tausendtel. Zehntausendtel. Milliontel.

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001 \quad 0,000001$$

$$189. 0,0a = 0000,0a0000.$$

190. Gleichnamig machen der Zehntbrüche.

191. Zufügen der Zehntbrüche.

192. Abziehen der Zehntbrüche.

193. Vervielfachen mit zehu, hundert, tausend, million.

194. Teilen durch zehu, hundert, tausend, million.

195. Vervielfachen mit $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ u. f. w.

196. Teilen durch $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ u. f. w.

197. Vervielfachen eines Zehntbruches.

198. Vervielfachen zweier Zehntbrüche.

199. Teilen durch Zehntbrüche.

200. Teilen eines Zehntbruches durch einen Zehntbruch.

201. Vergleichung: Wenn $a > b$ und c Pluszahl, so ist $ca > cb$ und $-ca < -cb$.

202. Wenn $a + c > a$ und b eine Pluszahl, so $(a + c)b > ab$.

203. Wenn $a_1 + c_1 > a_1, a_2 + c_2 > a_2, \dots$, so $(a_1 + c_1)(a_2 + c_2) > a_1 a_2$.
204. Wenn $a_1 < 1, a_2 < 1, \dots$, so $a_1 a_2 \dots < 1$.
Wenn $a_1 > 1, a_2 > 1, \dots$, so $a_1 a_2 \dots > 1$.
205. Echte Bruchzahl, Zähler kleiner als Nenner.
206. Wenn $\frac{a}{b}$ echte Bruchzahl, so $\frac{a}{b} < 1$.
207. $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \dots < 1$, wenn $\frac{a_a}{b_a}$ echte Bruchzahlen.
208. $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{b}$ wenn $b+c > b$.
209. Aufgehen von a in ac , wenn c ganze Zahl.
210. a und 1 gehen in a auf.
211. Wenn a in b aufgeht, so $b \leq a$.
212. Wenn a in b und b in a aufgeht, so $a = b$.
213. Wenn $b = ga$ und $c = hb$, so $c = aba$.
214. Gemeinmas (gemeinschaftliches Mas). Fremd (primär).
215. Wenn a Gemeinmas von b und c , so auch von $bb \pm cc$, wo b und c ganze Zahlen.
216. Auffinden des größten Gemeinmases von 2 Zahlen.
217. Wenn m größtes Gemeinmas von a und b , so mc das von ac und bc .
218. Wenn c in ab aufgeht und dem a fremd, so geht c in b auf.
219. Primzahl, zusammengesetzte Zahl, Primfache.
220. Wenn Primzahl a nicht in b aufgeht, so ist sie dem b fremd.
221. Wenn Primzahl a nicht in b und c aufgeht, so auch nicht in bc .
222. Wenn sie nicht in a_1, a_2, \dots, a_n aufgeht, so auch nicht in $a_1 a_2 \dots a_n$.
223. Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich in Primfache zerlegen.
224. Wenn a_1, a_2, \dots, a_n Primfache und $a_1 a_2 \dots a_n = B$, so nur Ordnung verschieden.
225. In jede Zahl gehen nur ihre Primfache und die Zeuge derselben auf.
226. Größtes Gemeinmas von n Zahlen finden.
227. Kurzer oder reduzierter Bruch.
228. Wenn $a < bb$ und die Primzahlen $< b$ gehen nicht auf, so a eine Primzahl.
229. Zwei, vier, acht gehen auf, wenn sie in die letzte, in die beiden, in die 3 letzten Ziffern aufgehen.
230. Gerade Zahlen, ungerade Zahlen.
231. Fünf geht auf, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist.
232. Quersumme einer Zahl.
233. Drei und neun gehen auf, wenn sie in die Quersumme aufgehen.
234. Neunerrest, gleiche Neunerreste.
235. Neunerprobe beim Zutügen.
236. dgl. beim Abziehen.
237. dgl. beim Vervielfachen.
238. dgl. beim Teilen ohne Rest.
239. dgl. beim Teilen mit Rest.
240. Aufgehen von 11.
241. Aufgehen von 7, 13.
242. Kleinster Gemeinnenner oder Dividuus.
243. Kleinsten Gemeinnenner zweier Zahlen finden.

244. Kleinsten Gemeinnenner mehrer Zahlen finden.
245. Zahlenreihe (arithmetische Reihe) ersten Ranges.
 a erstes, t ntes Glied, b Unterschied 2er Glieder, \mathcal{S} Summe der n ersten Glieder.
246. $t = a + (n - 1)b$; $\mathcal{S} = \frac{n(a + t)}{2} = na + \frac{n(n - 1)}{2}b$.
247. Summe der ganzen Zahlen von 1 bis $n = \frac{n(n + 1)}{2}$.
248. Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n - 1) = n^2$.
249. Zahlenmittel (arithmetisches Mittel) von $a_1, a_2, \dots, a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \frac{1}{n}$.
250. Verwandlung eines Bruches in einen Zehntbruch.
251. Endlicher, unendlicher, gekürzter Zehntbruch. Kürzungsstelle.
252. Wiederkehr (Periode). Rein wiederkehrender (periodischer), gemischter Bruch.
253. Brüche, die nur 2 und 5 als Fache im Nenner, geben endlichen Zehntbruch.
254. Brüche, die nicht 2 und 5 als Fache im Nenner, geben rein wiederkehrenden Zehntbruch.
255. Brüche, die 2, 5 und andere als Fache im Nenner, geben gemischten Zehntbruch.
256. Verwandlung des endlichen Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
257. Verwandlung des rein wiederkehrenden Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
258. Verwandlung des gemischten Zehntbruches in gewöhnlichen Bruch.
259. Praktisches Rechnen. Abgekürztes Rechnen.
260. Abgekürztes Zufügen und Abziehen.
261. Abgekürztes Vervielfachen.
262. Abgekürztes Teilen.
263. Wertzahl eines Mases.
264. Auflösen (refolviren) des höhern Mases ins niedere.
265. Zurückführen (reduziren) des niedern Mases ins höhere.
266. Die mehrfach benannte Zahl einnamig machen.
267. Die einnamige Zahl mehrfach benannt machen.
268. Mehrfach benannte Zahlen zufügen.
269. Desgleichen bei zehnteiligen Mases.
270. Mehrfach benannte Zahlen abziehen.
271. Desgleichen bei zehnteiligen Mases.
272. Vervielfachen benannter Zahlen.
273. Alle Gesetze der Vervielfachung gelten.
274. Vervielfachen einer einfach benannten Zahl.
275. Vervielfachen einer mehrfach benannten Zahl.
276. Zweite Art.
277. Teilen benannter Zahlen: Messen und Schneiden.
278. Alle Gesetze der Teilung gelten fürs Schneiden.
279. Teilen einer einfach benannten Zahl.
280. Teilen einer mehrfach benannten Zahl.
281. Zweite Art.
282. Alle Gesetze der Teilung gelten fürs Messen.

283. Einfach benannte Zahl teilen durch gleichnamige.
284. Mehrfach benannte Zahl teilen durch mehrfach benannte.
285. Bruchgleichung (Proportion) Verhältniss. Aeusere, innere Grösen,
 $a:b=c:d$.
286. Wenn $a:b=c:d$, und $b \geq 0, d \geq 0$, fo $ad=bc$.
287. Wenn $ad=bc$, fo $a:b=c:d$.
288. Wenn $a:b=c:d$, fo $d:b=c:a$ und $a:c=b:d$.
289. Wenn $a:b=c:d$ und $a=c \geq 0$, fo $b=d$.
290. Wenn $a:b=c:d$, fo ist $a=\frac{bc}{d}$ und $b=\frac{ad}{c}$.
291. Wenn $a:b=c:d$, fo ist $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{c}{d}$.
292. Wenn $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\dots$, fo $\frac{ma+nb+pc+\dots}{ma_1+nb_1+pc_1+\dots}=\frac{a}{a_1}$.
293. Wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, fo $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{a}{c}$.
294. Wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{b}=\frac{c}{d}$, fo $a=e$.
295. Wenn $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1}, \frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}=\frac{c_n}{d_n}$, fo $\frac{a_1a_2\dots a_n}{b_1b_2\dots b_n}=\frac{c_1c_2\dots c_n}{d_1d_2\dots d_n}$.
296. Bruchkreuz $\frac{a|c}{b|d}$, Scheitelzeuge ad und bc .
297. Im Bruchkreuz $\frac{a|c}{b|d}$ ist $ad=bc$.
298. Dreifatz oder Regeldetri.
299. Wenn $\frac{x|d}{a|c}$ oder $\frac{a|c}{x|d}$, fo $x=\frac{ad}{c}$.
300. Die gleichbenannten einnamigen Zahlen unter einander.
301. Erweiterter Dreifatz.
302. Gleichung ersten Grades. Unbekannte, Wurzel, Auflösung.
303. Wenn $a=b$, fo $a \pm c = b \pm c$, ferner $ac=bc$, und $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, wo $c \geq 0$.
304. Wenn $a+c=b$, fo $a=b-c$; Wenn $a-c=b$, fo $a=b+c$.
 Wenn $ac=b$, fo $a=\frac{b}{c}$; Wenn $\frac{a}{c}=b$, fo $a=bc$.
305. Wegschaffen eines Gliedes, eines Factors oder eines Nenners.
306. Alle Vorzeichen der Glieder kann man entgegengesetzt nehmen.
307. Wenn beide Seiten Brüche, so kann man sie umkehren.
308. Eingerichtete Gleichung. Gleichung n ten Grades.
309. Die Gleichung ersten Grades ist aufgelöst, wenn eingerichtet.
310. Lösung der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.
311. Anwendung dieser Gleichungen.
312. Lösung der Gleichung ersten Grades mit 2 Unbekannten.
313. Lösung der Gleichung ersten Grades mit 3 Unbekannten.
314. Lösung der Gleichung ersten Grades mit n Unbekannten.

Zweiter Abschnitt der Zahlenlehre: Höhere Zahlenlehre oder Höhen, Tiefen und Logen.

315. Höhen, Potenziren.

316. Zeichen des Höehens: a^m , gelesen „a hoch m.“

Basis a, Stufe (Exponent) m, Höhe (Potenz).

317. Basenklammer $(ab)^c$ und $(a+b)^c$, Stufenklammer a^{bc} und $a^b + a^c$.

318. $a^b + 1 = a^b \cdot a$; $a^1 = a$; $1^1 = 1$.

319. $a^0 = 1$, wo $a \geq 0$.

320. $a^b + c = a^b \cdot a^c$, wo c eine ganze Zahl.

321. $a_{1,n}^{b_1, b_2, \dots, b_n} = P a_{1,n}^{b_1, b_2, \dots, b_n}$ oder $a^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = a^{b_1} \cdot a^{b_2} \cdot \dots \cdot a^{b_n}$.

322. $a^1 = a$ $1^1 = 1$.

323. $a^c \cdot b^c = (ab)^c$, wo c eine ganze Zahl.

324. $a^{bc} = (a^b)^c$.

325. $(ab)^c = (a^c)^b$.

326. Gesetz der Zahlenhöhung.

327. $a^n \cdot a = P_n a = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, * wo n ganze Pluszahl.

Vorläufig soll die Stufe stets ganze Pluszahl sein.

328. $0^n = 0$.

329. $1^n = 1$; $(-1)^{2n} = 1$; $(-1)^{2n+1} = -1$.

330. $(+a)^n = +(a^n)$; $(-a)^{2n} = +(a^{2n})$; $(-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1})$.

331. Desgleichen.

332. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ * wo $a \geq 0$.

333. Zahl vervielfachen bez. teilen durch 10^n .

334. $a^b - c = \frac{a^b}{a^c}$ wo $a \geq 0$.

335. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$ wo $b \geq 0$.

336. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\frac{b}{a}\right)^c$ wo a und b ≥ 0 .

337. Echter Plusbruch erhöht.

338. Wenn $a^n = 1$, und $n \geq 0$, so $a = 1$.

339. Wenn $a^b = 1$ und $a \geq 1$, so $b = 0$.

340. Wenn $a^c = b^c$, wo $c \geq 0$, so $a = b$.

Wenn $a^c = a^d$, wo $a \geq 1$, so $c = d$.

341. Tiefen, Radiziren. Stufe ≥ 0 .

342. Zeichen des Tiefens $a^{\frac{1}{n}}$, gelesen „a hoch $\frac{1}{n}$ “ oder „a tief n.“
Zutiefende GröÙe (radicandus), Senke (radicator), Tiefe (radix).

343. $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

344. $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

$$345. 1^{\frac{1}{a}} = 1.$$

346. Für das Tiefen gelten alle Gesetze des Höhens.

$$347. (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}.$$

$$348. a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n.$$

$$349. a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad a^{\frac{1}{m} : n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

350. Logen, Logarithmiren. Loghöhe (potentia log.) Logbafte (bafis log.)
Log (Logarithmus).

351. Zeichen des Logens $\frac{b}{a}$, gelesen „b gelogt nach a;“ $l_a b$, gelesen „log b nach a.“

$$352. c = \frac{a^c}{a}.$$

$$353. \frac{1}{b} = 0.$$

$$354. \frac{b}{b} = 1.$$

$$355. \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

$$356. \frac{a:b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

$$357. \frac{a^b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}. \quad l_c a^b = b \cdot l_c a.$$

$$358. \frac{a^{\frac{1}{b}}}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}. \quad l_c a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} l_c a.$$

359. Gesetz des Logens.

$$360. \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}. \quad l_c a = l_c a \cdot l_c b.$$

$$361. \frac{a}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{b}. \quad l_c a = \frac{1}{b} a : l_b c.$$

362. Zehnlog (gemeiner, briggscher Logarithmus), $\log a = l_{10} a$.

$$363. \log a = \log_{10} a = \frac{a}{10}, \quad \log abc^n = \log (abc^n).$$

$$364. \log a \cdot 10^n = \log a + n; \quad \log a : 10^n = \log a - n.$$

365. Desgleichen.

366. Stellenlog (characteristica), Ziffernlog (mantissa).

367. Dieselben Ziffern haben denselben Ziffernlog.

368. Logtafel (Logarithmentafel): Tafel der Ziffernloge.

369. Stellenlog gleich der Stelle der höchsten Ziffer.

370. Auffinden des Logs zur Zahl.

371. Auffinden der Zahl zum Loge.

$$372. \log ab = \log a + \log b; \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$373. \log a^n = n \cdot \log a; \quad \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$$

374. Elog (natürlicher, neperscher Log). $e = 2,718281828459$. $\log e = 0,4342944819$.

$$375. \frac{a}{e} = \frac{a}{10} \cdot \frac{e}{10}; \quad l_e a = 2,3025851 \cdot \log a.$$

$$376. \frac{a}{10} = \frac{a}{e} \cdot \frac{e}{10}; \quad \log a = 0,4342945 l_e a.$$

$$377. \text{Wenn } a > b \text{ und } a, b, c \text{ Pluszahlen,} \quad \text{so } a^a > b^a \text{ und } a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{a}}.$$

$$378. \text{Wenn } a > b \text{ und } c > 1 \text{ und } a, b \text{ Pluszahlen,} \quad \text{so } c^a > c^b \text{ und } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

379. Wenn $a > 1$, so ist $\log a$ Pluszahl, wenn $a < 1$, so Strichzahl.

380. Wenn p in a^b aufgeht, so auch in a ; wo p, a, b ganze Pluszahlen.

381. Wenn a und b fremde und n ganze Zahl, so a^n und b^n fremde.

382. Endzahl (Rationalzahl), Unzahl (Irrationalzahl).

383. Alle Sätze der Zahlenlehre gelten für Unzahlen.

384. $a^{\frac{1}{n}}$ ganze Zahl oder Unzahl, wenn a ganze Pluszahl.

385. $\log a$ Unzahl, wenn a weder Höhe, noch Tiefe von 10.

386. Wenn a eine Primzahl ausser 2 und 5, so ist $a^{4a+2} = b \cdot 10 + 1$ oder $= b \cdot 10 + 9$, und ist $a^{4a} = b \cdot 10 + 1$, wo b eine ganze Pluszahl.

387. Geschiedszahl und Geänderzahl von n zur m ten Stufe, wo n ganze Zahl.

$$n^{\circ m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}; \quad n'^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1).$$

Tauschzahl von $m = m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$.

388. Zeichen der Geschiedszahl $n^{\circ m}$, gelesen „ n Punkt m “, Geänderzahl n'^m gelesen „ n Schlag m “, Tauschzahl $m!$, gelesen „ m Tausche.“

$$389. n^{\circ m} = \frac{n'^m}{m!} \quad n'^m = m! \cdot n^{\circ m}.$$

$$390. n^{\circ m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$391. (n+1)^{\circ m} = n^{\circ m} + n^{\circ m-1}.$$

$$392. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

393. Binomischer Lehratz:

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n,$$

$$= S n^{\circ a} a^n - a b^a \quad \text{wo } n \text{ ganze Pluszahl.}$$

394. Rechenregel für zweite Tiefe.

395. Abgekürztes Berechnen der zweiten Tiefe.

396. Log der Summe.

397. Log des Unterschiedes.

398. Zahlenreihe (arithmetische Reihe) p ten Ranges.

399. Die p ten Unterschiede sind gleich.

Das q te Glied der c ten Unterschiede c_{a_q} .

$$400. c_{a_n+1} = c_{a_n} + c + 1_{a_n}.$$

$$401. p + a_{a_6+1} - p + a_{a_6} = 0.$$

$$402. c_{a_n+1} = S n^a (c + a_{a_1}).$$

$$403. c - 1_{a_n+1} (-c - 1_{a_1}) = S c_{a_n}.$$

$$404. S c_{a_n} = S n^a (c + a - 1_{a_1}).$$

405. Stufenreihe (geometrische Reihe) ersten Ranges. $a_{a+1} : a_a = b$.
 a erstes, t ntes Glied, b Folgebruch, S Summe der n ersten Glieder.

$$406. t = ab^n - 1, \quad S = \frac{tb - a}{b - 1} = a \frac{b^n - 1}{b - 1} = a \frac{1 - b^n}{1 - b}.$$

407. Zinsen und Renten: Vermögen k , Zinsfuß p , Zinsfach $z = 1 + \frac{p}{100}$.

Jährlicher Beitrag b , Jahresrente r .

408. Vermögen k hat nach n Jahren Wert $x = kz^n$.

409. Vermögen k hatte vor n Jahren Wert $x = kz^{-n}$.

410. Jährlicher Beitrag b giebt nach n Jahren Vermögen $x = bz \frac{z^n - 1}{z - 1}$.

411. Anfangsvermögen x giebt für n Jahre die Rente r ; $x = r \frac{z^n - 1}{(z - 1) z^n - 1}$.

412. Jährlicher Beitrag x für n Jahre giebt nach $n + 1$ Jahren die Rente r auf
 q Jahre $x = \frac{r}{z^q} \cdot \frac{z^q - 1}{z^n - 1}$.

413. Höhenreihe (Potenzreihe) von x . $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$
 Entsprechende Vorzahlen; Vorzahl Null.

$$414. (ax^n + bx^{n-1} + \dots) + (ax^n + bx^{n-1} + \dots) = (a+a)x^n + (b+b)x^{n-1} + \dots$$

$$415. (ax^n + bx^{n-1} + \dots) - (ax^n + bx^{n-1} + \dots) = (a-a)x^n + (b-b)x^{n-1} + \dots$$

$$416. (ax^n + bx^{n-1} + \dots) ax^m = aax^{n+m} + bax^{n+m-1} + \dots$$

$$417. (ax^n + bx^{n-1} + \dots) : ax^m = \frac{a}{a} x^{n-m} + \frac{b}{a} x^{n-m-1} + \dots$$

$$418. (ax^n + bx^{n-1} + \dots)(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots) \\ = aax^{n+m} + (ba + ab)x^{n+m-1} + (ca + bb + ac)x^{n+m-2} + \dots$$

419. Vorzahlen für jede Stufe.

$$420. \frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B}.$$

421. Reihenzahl, Systemzahl. Grundzahl, Reihenbruch.

Zehntzahl (dekadische Systemzahl), Zehntbruch (Dezimalbruch).

422. a auf n ter Stelle $= a \cdot 10^n$; 0 te Stelle links neben Komma.

Dritter Abschnitt der Zahlenlehre: Die dehnende Zahlenlehre.

423. Das J (die imaginäre Eins) $= i$. die J gröse (imaginäre Gröse) $= ia$.

$$424. i = (-1)^{1/2}; \quad i^2 = -1.$$

425. $(-a)^{1/2} = i \cdot a^{1/2}$.

426. Richtgröße (komplexe Größe) $= a + ib$. Erste, zweite Zahl.

Richtwert $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$; Richteinheit $(a^2 + b^2)^{1/2} = 1$.

$a + ib = \alpha + i\beta$, dann und nur dann, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$.

Die Zahlgrößen umfassen die Zahlen und die Richtgrößen.

427. $r^2 = a^2 + b^2$ * wenn $a + ib$ gegeben.

428. Lotseiten (Katheten) a und b , Spannseite (Hypotenuse) r .

429. Alle Gesetze der niedern Zahlenlehre gelten für Richtgrößen.

430. $(a + ib) \pm (\alpha + i\beta) = (a \pm \alpha) + i(b \pm \beta)$.

431. $(a + ib)(\alpha + i\beta) = (a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha)$.

432. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2$.

433. $\frac{a + ib}{\alpha + i\beta} = \frac{(a + ib)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$.

434. $\frac{a + ib}{r} = \frac{a}{r} + i\frac{b}{r}$ ist eine Richteinheit.

435. Winkel der Richteinheit β .

Kreisumfang: $2\pi = 2 \cdot 3,14159235359 = 360^\circ \approx 60' \approx 60''$.

Echter Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$. Rechter Winkel $\frac{1}{2}\pi = 90^\circ$.

Erster Plusrechter 0 bis $\frac{\pi}{2}$, zweiter $\frac{\pi}{2}$ bis π .

Erster Strichrechter 0 bis $-\frac{\pi}{2}$, zweiter $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$.

436. Ergänzungswinkel $= 90^\circ - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Nebenwinkel $= 180^\circ - \beta = \pi - \beta$.

437. In Richteinheit 1te Zahl Cosinus $\beta = \cos \beta$, 2te Zahl Sinus $\beta = \sin \beta$.

438. $\cos \beta = \frac{a}{r}$; $\sin \beta = \frac{b}{r}$; $\cos \beta + i \sin \beta = \text{Richteinheit}$.

439. $(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta) = 1$.

$\cos \beta - i \sin \beta = \frac{1}{\cos \beta + i \sin \beta}$.

440. $a + ib = r(\cos \beta + i \sin \beta)$ wo $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

441. $(\cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$; $\cos \beta = (1 - (\sin \beta)^2)^{1/2}$; $\sin \beta = (1 - (\cos \beta)^2)^{1/2}$.

442. $\cos \beta = \text{Mitt. } [-1, +1]$; $\sin \beta = \text{Mitt. } [-1, +1]$.

443. Im ersten Plusrechten \sin und \cos Pluszahl.

444. $\sin(-\beta) = -\sin \beta$; $\cos(-\beta) = \cos \beta$.

445. $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$; $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$.

446. Sin Pluszahl von $2a\pi$ bis $(2a + 1)\pi$,

Strichzahl von $(2a + 1)\pi$ bis $(2a + 2)\pi$.

Cos Pluszahl von $(2a - \frac{1}{2})\pi$ bis $(2a + \frac{1}{2})\pi$,

Strichzahl von $(2a + \frac{1}{2})\pi$ bis $(2(a + 1) - \frac{1}{2})\pi$.

447. $\cos(-\beta) + i\sin(-\beta) = \cos\beta - i\sin\beta = \frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$.
448. $\cos(180^\circ - \beta) + i\sin(180^\circ - \beta) = -\cos\beta + i\sin\beta = -\frac{1}{\cos\beta + i\sin\beta}$.
 $\cos(180^\circ + \beta) + i\sin(180^\circ + \beta) = -\cos\beta - i\sin\beta = -(\cos\beta + i\sin\beta)$.
449. $\sin n\pi = 0$; $\cos 2n\pi = 1$; $\cos(2n+1)\pi = -1$; wo n ganze Zahl.
450. Wenn $a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = b(\cos\beta + i\sin\beta)$ und $a \neq 0$, $b \neq 0$,
 und α und $\beta = \text{Mitt}[\pm\pi, -\pi]$, so ist $a = b$ und $\alpha = \beta$.
451. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$.
452. $\cos(\alpha + \beta) = (\cos\alpha)\cos\beta - (\sin\alpha)\sin\beta$.
 $\sin(\alpha + \beta) = (\sin\alpha)\cos\beta + (\cos\alpha)\sin\beta$.
453. $\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha)\cos\beta + (\sin\alpha)\sin\beta$.
 $\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha)\cos\beta - (\cos\alpha)\sin\beta$.
454. $\sin 2\alpha = 2(\sin\alpha)\cos\alpha$.
 $\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = 1 - 2(\sin\alpha)^2 = 2(\cos\alpha)^2 - 1$.
455. $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 - \cos\alpha}{2} \right)^{1/2}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \left(\frac{1 + \cos\alpha}{2} \right)^{1/2}$.
456. $\cos(n + 1/2)\pi = 0$; $\sin(2n + 1/2)\pi = 1$; $\sin(2n - 1/2)\pi = -1$; n ganze Zahl.
457. $\cos 90^\circ = 0$; $\sin 90^\circ = 1$.
458. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2^{1/2}} = 1/2 \cdot 2^{1/2}$.
459. $\sin x$ wächst von -1 bis $+1$ für x von $(2n - 1/2)\pi$ bis $(2n + 1/2)\pi$
 nimmt ab von $+1$ bis -1 für x von $(2n + 1/2)\pi$ bis $(2n + 3/2)\pi$.
 $\cos x$ wächst von -1 bis $+1$ für x von $(2n - 1)\pi$ bis $2n\pi$
 nimmt ab von $+1$ bis -1 für x von $2n\pi$ bis $(2n + 1)\pi$.
460. $\cos(90^\circ - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.
461. $\cos\alpha + i\sin\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) + i\cos(90^\circ - \alpha)$.
462. $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$
 $= (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \dots (\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$.
463. $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ * n ganze Zahl.
464. $\cos n\alpha = S(-1)^n e^{i2\alpha} (\cos\alpha)^n - 2\alpha \cdot (\sin\alpha)^{2\alpha}$ * n ganze Zahl.
 $\sin n\alpha = S(-1)^n e^{i2\alpha + 1} (\cos\alpha)^n - (2\alpha + 1) \cdot (\sin\alpha)^{2\alpha + 1}$ * n ganze Zahl.
465. $[\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = \alpha^n (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ * n ganze Zahl.
466. $\tan = \text{Tangente}$; $\cot = \text{Cotangente}$.
467. $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$; $\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$; $\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta}$;
 $1 + (\tan\beta)^2 = \frac{1}{(\cos\beta)^2}$; $1 + (\cot\beta)^2 = \frac{1}{(\sin\beta)^2}$.
468. $\tan(-\beta) = \tan(180^\circ - \beta) = -\tan\beta$.
 $\cot(-\beta) = \cot(180^\circ - \beta) = -\cot\beta$.
469. \tan und \cot Pluswert im 1. Plus-, 2. Strichrechten.
 Strichwert im 2. Plus-, 1. Strichrechten.
470. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - (\tan\alpha)\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + (\tan\alpha)\tan\beta}$.

471. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$
472. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$; $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.
473. $\tan n\pi = 0 = \cot(n + \frac{1}{2})\pi$; $\tan(n + \frac{1}{2})\pi = \infty = \cot n\pi$; n ganze Zahl.
474. $\tan x$ wächst von $-\infty$ bis $+\infty$ für x von $(n - \frac{1}{2})\pi$ bis $(n + \frac{1}{2})\pi$.
 $\cot x$ nimmt ab von $+\infty$ bis $-\infty$ für x von $n\pi$ bis $(n + 1)\pi$.
475. $\cot(90^\circ - \alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$; $\tan(90^\circ - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$.
476. $\sin(n\pi + (-1)^n x) = \sin x$; $\sin(n\pi - (-1)^n x) = -\sin x$.
 $\cos(2n\pi \pm x) = \cos x$; $\cos((2n + 1)\pi \pm x) = -\cos x$.
 $\tan(n\pi \pm x) = \tan x$; $\tan(n\pi - x) = -\tan x$.
 $\cot(n\pi \pm x) = \cot x$; $\cot(n\pi - x) = -\cot x$.
477. Winkeltafel, trigonometrische Logarithmentafel.
478. Praktischste Einrichtung der Winkeltafel.
479. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2(\sin \alpha)\cos \beta$.
 $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2(\cos \alpha)\sin \beta$.
 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2(\cos \alpha)\cos \beta$.
 $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2(\sin \alpha)\sin \beta$.
480. $\sin \alpha + \sin \beta = 2(\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
 $\sin \alpha - \sin \beta = 2(\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2(\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
 $\cos \beta - \cos \alpha = 2(\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
481. $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
 $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.
482. $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = (\cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;
 $\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta} = (\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta))\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.
483. $(\sin \alpha)^2 - (\sin \beta)^2 = (\sin(\alpha + \beta))\sin(\alpha - \beta)$;
 $(\cos \beta)^2 - (\cos \alpha)^2 = (\sin(\alpha + \beta))\sin(\alpha - \beta)$.
484. $\sin \alpha \pm \cos \alpha = 2^{\frac{1}{2}}\sin(\alpha \pm 45^\circ) = 2^{\frac{1}{2}}\cos(\alpha \mp 45^\circ)$.
 $\cos \alpha \pm \sin \alpha = 2^{\frac{1}{2}}\sin(45^\circ \pm \alpha) = 2^{\frac{1}{2}}\cos(45^\circ \mp \alpha)$.
485. $\left(\frac{1 \pm \sin 2\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin(45^\circ \pm \alpha) = \cos(45^\circ \mp \alpha)$;
 $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$.
486. $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\cos \alpha)\cos \beta}$; $\cot \beta \pm \cot \alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{(\sin \alpha)\sin \beta}$.
487. $1 \pm \tan \alpha = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha} = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(45^\circ \mp \alpha)}{\cos \alpha}$;
 $\cot \alpha \pm 1 = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\sin \alpha} = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(45^\circ \mp \alpha)}{\sin \alpha}$.

$$488. \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ \pm \alpha) = \cot(45^\circ \mp \alpha).$$

$$489. \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{\cot \alpha - 1} = \tan \alpha.$$

$$490. \text{Bogen, arcus } \beta, \text{ wo der Winkel zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2}.$$

$$491. \text{Zeichen: arc}(\sin = x), \quad \text{arc}(\cos = x), \quad \text{arc}(\tan = x), \quad \text{arc}(\cot = x).$$

$$492. \text{arc}(\sin = x) = \text{arc}(\cos = (1 - x^2)^{1/2}) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \text{arc}\left(\cot = \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{x}\right).$$

$$\text{arc}(\tan = z) = \text{arc}\left(\cot = \frac{1}{z}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{(1 + z^2)^{1/2}}\right).$$

$$493. \text{arc}(\sin = x) + \text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

$$\text{arc}(\tan = z) + \text{arc}(\cot = z) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

$$494. \text{arc}(\sin = x) + \text{arc}(\sin = y) \stackrel{*}{=} \text{arc}(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} + y(1 - x^2)^{1/2}),$$

$$* x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$\text{arc}(\sin = x) + \text{arc}(\sin = y) \stackrel{*}{=} \pi - \text{arc}(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} + y(1 - x^2)^{1/2}),$$

$$* x^2 + y^2 > 1.$$

$$\text{arc}(\sin = x) - \text{arc}(\sin = y) = \text{arc}(\sin = x(1 - y^2)^{1/2} - y(1 - x^2)^{1/2}).$$

$$495. \text{arc}(\tan = x) + \text{arc}(\tan = y) \stackrel{*}{=} \text{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \quad * xy \leq 1.$$

$$\text{arc}(\tan = x) + \text{arc}(\tan = y) \stackrel{*}{=} \pi - \text{arc}\left(\tan = \frac{x + y}{1 - xy}\right), \quad * xy > 1.$$

$$\text{arc}(\tan = x) - \text{arc}(\tan = y) = \text{arc}\left(\tan = \frac{x - y}{1 - xy}\right).$$

$$496. \text{Allgemeiner Bogen Aarc.}$$

$$497. \text{Aarc}(\sin = x) \cong a\pi + (-1)^a \text{arc}(\sin = x).$$

$$\text{Aarc}(\cos = x) \cong 2a\pi \pm \text{arc}(\cos = x).$$

$$\text{Aarc}(\tan = x) \cong a\pi + \text{arc}(\tan = x).$$

$$\text{Aarc}(\cot = x) \cong a\pi + \text{arc}(\cot = x).$$

$$498. \text{Wenn } x^n = 1, \text{ wo } n \text{ eine ganze Zahl, so } x = \cos \frac{2a\pi}{n} + i \sin \frac{2a\pi}{n}, \text{ wo } a \text{ alle}$$

$$\text{ganzen Werte von } 0 \text{ bis } n - 1.$$

$$499. \text{RichtgröÙe in der Base.}$$

$$[a(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^c = a^c(\cos c\alpha + i \sin c\alpha), \quad \text{wo } c \text{ reine Zahl.}$$

$$e = \cos 1 + i \sin 1.$$

$$500. a(\cos c + i \sin c) = ae^c.$$

$$501. (ae^c)^n \stackrel{*}{=} a^n \cdot e^{cn} \quad * \text{ wo entweder } n \text{ ganze Zahl, oder } c \text{ echter Winkel.}$$

$$502. a^b + c \stackrel{*}{=} a^b \cdot a^c \quad * \text{ wo } b \text{ und } c \text{ Zahlen, } a \text{ eine ZahlgröÙe.}$$

$$503. a^b - c \stackrel{*}{=} a^b : a^c \quad * \text{ wo } b \text{ und } c \text{ Zahlen, } a > 0.$$

$$504. \varepsilon^\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \varepsilon^{-\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

$$505. \cos \alpha = \frac{\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{-\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-\alpha}}{2i}.$$

$$506. \varepsilon^\alpha = \varepsilon^{2\pi + \alpha}.$$

$$507. a^q \cdot b^q \cdot c^q \dots \varepsilon^{2\pi q} (abc \dots)^q \cdot \varepsilon^{2\pi q} \quad * \text{ wo } q \text{ Zahl und } \alpha + \beta + \gamma + \dots = 2n\pi + p, \text{ wo } \alpha, \beta, \gamma \dots \text{ wie } p \text{ echte Winkel.}$$

$$508. a^{bc} \varepsilon^{2\pi c} (a^b)^c \varepsilon^{2\pi c} \quad * \text{ wo } b \text{ und } c \text{ Zahlen und } ab = 2n\pi + p, \text{ wo } a \text{ und } p \text{ echte Winkel.}$$

$$509. a^\beta \gamma^\delta \varepsilon^{2\pi} ((a^\beta)^\gamma)^\delta \cdot \varepsilon^{2\pi (m\gamma^\delta + n^\delta + o)} \zeta$$

* wo $a = a_1 \varepsilon^\alpha$ und α echt, $\beta, \gamma, \delta, \zeta$ Zahlen und $\alpha\beta = 2m\pi + r_1$,
 $r_1\gamma = 2n\pi + r_2$, $r_2\delta = 2o\pi + r_3$ und r_1, r_2, r_3 echte Winkel.

$$510. \text{Richtgröße in der Stufe.}$$

$$a) e^i = \varepsilon \quad (\varepsilon^\alpha)^i = \varepsilon^\alpha.$$

$$b) (a^\alpha)^{i\beta} = a^{i\beta} (\varepsilon^\alpha)^{i\beta} \quad a^{i\beta} = (a^\beta)^i \quad (\varepsilon^\alpha)^{i\beta} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha\beta}$$

* wo a eine Pluszahl, β eine reine Zahl und α eine echte Zahl.

$$c) a^\alpha + i^\beta = a^\alpha \cdot a^{i\beta} \quad * \text{ wo } \alpha \text{ und } \beta \text{ Zahlen, } a \text{ eine beliebige Zahlgröße.}$$

$$511. (\varepsilon^\alpha)^i = (\varepsilon^i)^\alpha = e^{i\alpha} = \varepsilon^\alpha.$$

$$512. \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

$$513. 2^n \cdot (\cos \alpha)^n = S_n^{\alpha} \cos(n-2)\alpha \quad * n \text{ ganze Pluszahl,}$$

oder für gerades n :

$$2^n - 1 (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha + \dots$$

$$+ n^{(1/2n-1)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \cdot n^{(1/2n)},$$

für ungerades n :

$$2^n - 1 (\cos \alpha)^n = \cos n\alpha + n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha + \dots$$

$$+ n^{(1/2n-3)} \cos 3\alpha + n^{1/2(n-1)} \cos \alpha.$$

$$514. \text{Für gerades } n, \text{ wo } n \text{ eine ganze Pluszahl:}$$

$$2^n - 1 (-1)^{1/2n} (\sin \alpha)^n = \sin n\alpha - n \cdot \cos(n-2)\alpha + n^2 \cdot \cos(n-4)\alpha - \dots$$

$$+ (-1)^{(1/2n-1)} n^{(1/2n-1)} \cos 2\alpha + (-1)^{1/2n} n^{1/2n} \cdot \frac{1}{2n},$$

für ungerades n :

$$2^n - 1 (-1)^{1/2(n-1)} (\sin \alpha)^n = \sin n\alpha - n \sin(n-2)\alpha + n^2 \cdot \sin(n-4)\alpha - \dots$$

$$+ (-1)^{1/2(n-3)} n^{1/2(n-3)} \sin 3\alpha + (-1)^{1/2(n-1)} n^{1/2(n-1)} \cdot \sin \alpha.$$

$$515. e^i = \frac{1}{e}.$$

$$516. e = \cos i - i \sin i.$$

$$517. a^{ib} = \cos b \cdot l_a + i \sin b \cdot l_a \quad * \text{ wo } a \text{ eine reine Pluszahl.}$$

$$518. (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{ib} = (\varepsilon^\alpha)^{ib} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha b}.$$

$$519. e^{2\pi i} = 1.$$

$$520. (a + ib)^c + id = (e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta))^c + id = (e^{\alpha} e^{\beta i})^c + id = e^{\alpha c - \beta d} \cdot e^{\beta c + \alpha d}$$

wo β echter Winkel.

$$521. a + ib = e^{\beta + i\alpha} \text{ und zwar } \alpha \text{ echter Winkel. } e^{\beta + i\alpha} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta).$$

$$522. (e^a + ib)^c + id \stackrel{*}{=} e^{(a+ib)(c+id)} \quad * \text{ wenn } b \text{ echter Winkel.}$$

$$523. (e^a e^{\beta i})^c + id \stackrel{*}{=} e^{ac - bd} e^{\beta c + \alpha d} e^{-2n\pi i(c+id)} \quad * \text{ wenn } b = 2n\pi + p, \text{ wo } p \text{ echter Winkel.}$$

$$524. e^{(a+ib)(c+id)} \stackrel{*}{=} (e^a + ib)^c + id e^{-2n\pi i(c+id)} \quad * \text{ wenn } b = 2n\pi + p, \text{ wo } p \text{ echter Winkel.}$$

$$525. e^a + ib, e^c + id = e^{a+c+i(b+d)}.$$

$$526. (a + ib)^c + id \cdot (a + ib)^f + ig = (a + ib)^{c+f+i(d+g)}.$$

$$527. (a + ib)^{-(c+id)} = \left(\frac{1}{a + ib} \right)^{c+id}.$$

$$528. (a + ia_1)^{n+im} \cdot (b + ib_1)^{n+im} \dots \stackrel{*}{=} ((a + ia_1)(b + ib_1) \dots)^{n+im} \cdot e^{2p\pi i(n+im)},$$

wo $\alpha_1 + \beta_1 + \dots = 2p\pi + r$, und r echter Winkel, auch $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1} \dots$

$$529. (a + ia_1)^{(m+im_1)(n+in_1)} \stackrel{*}{=} ((a + ia_1)^{m+im_1})^{n+in_1} \cdot e^{2p\pi i(n+in_1)},$$

wo $a + ia_1 = e^{\alpha + i\alpha_1}$, $\alpha(m+im_1) = 2p\pi + r$, und α_1 und r echte Winkel.

$$530. \text{ Wenn } e^a + ia_1 = e^b + ib_1, \text{ so ist } a_1 = b_1 + 2a\pi, a + ia_1 = b + ib_1 + i2a\pi.$$

$$531. \text{ Wenn } (a + ia_1)^x = b + ib_1, \text{ so ist } x = \frac{\beta + i\beta_1 + i2a\pi}{\alpha + ia_1}.$$

$$532. \text{ RichtgröÙe im Loge. Mehrwertiger Log } \frac{b + ib_1}{a + ia_1}.$$

$$\text{Einwertiger } \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} = \frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + ia_1}, \text{ wo } \alpha_1 \text{ und } \beta_1 \text{ echte Winkel.}$$

$$533. \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \cong \frac{\beta + i\beta_1 + i2a\pi}{\alpha + ia_1}; \quad \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\alpha + i\alpha_1}} \stackrel{*}{=} \frac{\beta + i\beta_1}{\alpha + ia_1} \quad * \alpha_1, \beta_1 \text{ echt.}$$

$$534. \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \cong \beta + i\beta_1 + i2a\pi; \quad \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e} \stackrel{*}{=} \beta + i\beta_1 \quad * \beta_1 \text{ echt.}$$

$$535. \Im(a + ib) \cong \frac{1}{2} \Im(a^2 + b^2) + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm a\pi \right], \text{ wo } \frac{b}{a} \text{ echter Winkel;}$$

$$\Im(a + ib) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \Im(a^2 + b^2) + i \arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \quad * \text{ wo } \frac{b}{a} \text{ echt.}$$

$$\text{Für } a \text{ PlusgröÙe } \Im(a + ib) \cong \frac{1}{2} \Im(a^2 + b^2) + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm 2a\pi \right].$$

$$\text{Für } a \text{ StrichgröÙe } \Im(a + ib) \cong \frac{1}{2} \Im(a^2 + b^2) + i \left[\arctan \left(\tan = \frac{b}{a} \right) \pm (2a - 1)\pi \right].$$

$$536. \Im \frac{a + ia_1}{a - ia_1} \cong 2i \left[\arctan \left(\tan = \frac{a_1}{a} \right) \pm a\pi \right];$$

$$\Im \frac{a + ia_1}{a - ia_1} \stackrel{*}{=} 2i \left[\arctan \left(\tan = \frac{a_1}{a} \right) \right] \quad * \text{ wo } \frac{a_1}{a} \text{ echt.}$$

$$537. \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} \cong \frac{\beta + 2a\pi}{\alpha}; \quad \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{\alpha} \quad * \text{ wo } \beta \text{ und } \alpha \text{ echte Winkel.}$$

$$538. \frac{b + ib_1}{a + ia_1} \cong \frac{b + ib_1}{a + ia_1} + i2a\pi \frac{e}{a + ia_1}.$$

$$539. \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha} \quad * \beta \text{ und } \alpha \text{ echte Winkel.}$$

$$540. (a + ia_1) \frac{e^{\alpha + ia_1}}{e^{\beta + i\beta_1}} + (b + ib_1) \frac{e^{\beta + i\beta_1}}{e^{\beta + i\beta_1}} + \dots$$

$$= \frac{(e^{\alpha + ia_1})^{\alpha + ia_1} \cdot (e^{\beta + i\beta_1})^{\beta + i\beta_1}}{e^{\beta + i\beta_1}} + i2n\pi \frac{e}{e^{\beta + i\beta_1}}$$

* wo $\alpha a_1 + \alpha a_1 + b\beta_1 + \beta b_1 + \dots = 2n\pi + p$, und α_1, β_1, \dots und p echte Winkel.

$$541. \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots = \frac{(a + ia_1)(b + ib_1) \dots}{r + ir_1} + i2n\pi \frac{e}{r + ir_1}$$

* wo $\alpha_1 + \beta_1 + \dots = 2n\pi + p$, wo $\alpha_1, \beta_1, \dots, p$ echte Winkel und $a + ia_1 = e \dots$.

$$542. (a + ia_1) \frac{e^{\alpha + ia_1}}{e^{\beta + i\beta_1}} = \frac{(e^{\alpha + ia_1})^{\alpha + ia_1}}{e^{\beta + i\beta_1}} + i2n\pi \frac{e}{e^{\beta + i\beta_1}}$$

* wo $\alpha a_1 + \alpha a_1 = 2n\pi + p$ und wo α_1, p echte Winkel.

$$543. \frac{a + ia_1}{(e^{\beta + i\beta_1})^{\beta + i\beta_1}} = \frac{a + ia_1}{e^{\beta + i\beta_1}} : (b + ib_1) \quad * \text{wenn } \beta b_1 + b\beta_1 = c \text{ und } c \text{ echter Winkel.}$$

$$544. \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \beta \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \cong \frac{(a + ia_1)^{\alpha} (b + ib_1)^{\beta} \dots}{r + ir_1}$$

dann und nur dann, wenn α, β, \dots ganze Zahlen und zwei von ihnen Eins zum größten gemeinschaftlichen Mase haben.

$$545. \frac{a + ia_1}{r + ir_1} + \frac{b + ib_1}{r + ir_1} + \dots \cong \frac{(a + ia_1)(b + ib_1) \dots}{r + ir_1}$$

546. Richtgröse im Winkel.

$$547. \sin y = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}; \quad \cos y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

$$548. \sin(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$$

$$= (\sin x) \cos y + (\cos x) \sin y.$$

$$\cos(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x$$

$$= (\cos x) \cos y - (\sin x) \sin y.$$

$$549. \tan(x + iy) = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} = \frac{\sin 2x + \sin 2iy}{\cos 2x + \cos 2iy}$$

$$\cot(x + iy) = \frac{\sin 2x - \sin 2iy}{\cos 2x - \cos 2iy}$$

$$550. \arctan(x) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

$$551. \arcsin(x) = \frac{1}{2i} \log \frac{(1-x^2)^{1/2} + ix}{(1-x^2)^{1/2} - ix}.$$

$$552. \arcsin(a + ib) = x + iy; \quad \arccos(a + ib) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

$$553. \arcsin(a + ib) + \arccos(a + ib) = \frac{\pi}{2}.$$

$$554. \arctan(c + id) = x + iy; \quad \operatorname{arccot}(c + id) = \frac{\pi}{2} - (x + iy).$$

$$555. \arctan(c + id) + \operatorname{arccot}(c + id) = \frac{\pi}{2}.$$

Vierter Abschnitt der Zahlenlehre: Die Gleichungslehre.

556. Gleichung. Unbekannte x , Wurzeln. Entfernen (eliminieren).

557. Gleiches zufügen, abziehen, mit Gleichem vervielfachen, teilen.

558. Wenn $a + c = b$, so $a = b - c$, wenn $a - c = b$, so $a = b + c$.

Wenn $ac = b$, so $a = \frac{b}{c}$, wenn $\frac{a}{c} = b$, so $a = bc$.

559. Wegschaffen eines Gliedes, Faches oder Nenners.

560. Wenn $a^n = b$, so $a = b^{\frac{1}{n}}$, wenn $a^{\frac{1}{n}} = b$, so $a = b^n$.

Wenn $n^a = b$, so $a = \frac{b}{n}$, wenn $\frac{a}{n} = b$, so $a = nb$.

561. Alle Vorzeichen entgegengesetzt nehmen.

562. Die Brüche umkehren, wenn Zähler ungleich Null.

563. Gleichung n ten Grades, eingerichtet.

564. Gleichung mit einer Unbekannten einzurichten.

565. Gleichung ersten Grades auflösen.

566. Wenn $x^n = a$, so $x_a = a^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{2a\pi}{n}}$, wo a ganze Zahl von 1 bis $n-1$.

567. Jede Gleichung n ten Grades eine Wurzel.

568. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = a_0 + (a_1 + a_2x + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1})(x - \alpha)$,

569. wo $a_0 = a_0 + \alpha a_1$; $a_2 = a_2 + \alpha a_1 + 1$; $a_{n-1} = a_{n-1} + \alpha$.

570. $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$.

572. In $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ist $a_{n-r} = S a_n \alpha_1^r \alpha_2^r \dots (-1)^r$,
wo $a_n \alpha_1^r \alpha_2^r \dots r$ Fache enthält und a, b, c jede GröÙe.

573. Wenn $a + ib$ eine Wurzel, so auch $a - ib$.

574. Jede Gleichung n ten Grades lässt sich so einrichten, dass die Vorzahl von $x^n - 1$ Null wird.

575. Gleichung und Wurzel zweiten Grades.

576. Reine, gemischte, reine JgröÙe $i = (-1)^{1/2}$.

577. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

578. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

579. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

580. Wenn $x^2 = a^2$, so $x \approx \pm a$.

Wenn $x^2 = -b^2$, so $x \approx \pm ia$.

581. Wenn $x^2 + ax = b$, so ist $x = -\frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$.

582. Wenn $x^2 - ax = b$, so ist $x = \frac{a}{2} \mp \left(b + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{1/2}$.

583. Wenn $x^2 + ax = b$, so ist $x_1 = b^{1/2} \tan^{1/2} \varphi$, $x_2 = -b^{1/2} \cot^{1/2} \varphi$,
wo $\tan \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$.

584. Wenn $x^2 + ax = -b$, so ist $x_1 = -a(\sin^{1/2} \varphi)^2$, $x_2 = -a(\cos^{1/2} \varphi)^2$,
wo $\sin \varphi = \frac{2b^{1/2}}{a}$.

585. Wenn $x^3 + 3px = 2q$, so ergibt sich

Für $+p$ ist $(\tan \varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}$; $\tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^{1/2}$;

$x_1 = 2p^{1/2} \cdot \tan 2\psi$; $\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = -\frac{x_1}{2} \pm i(3(p + \frac{1}{4}x_1^2)^{1/2})$.

Für $-p$ und $p^3 < q^2$ ist $(\sin \varphi)^2 = \frac{p^3}{q^2}$; $\tan \psi = \left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)^{1/2}$;

$x_1 = 2p^{1/2} \cdot \sin 2\psi$; $\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = -\frac{x_1}{2} \pm (3(p - \frac{1}{4}x_1^2)^{1/2})$.

Für $-p$ und $p^3 > q^2$ ist $\sin 3\varphi = \left(\frac{q^2}{p^3}\right)^{1/2}$.

$-x_1 = 2p^{1/2} \cdot \sin \varphi$; $\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = 2p^{1/2} \sin(60^\circ \mp \varphi)$.

586. Wenn $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ und $e^3 + 2ae^2 + (a^2 - 4c)e = b^2$,

auch $d = \frac{1}{2}(a + e)$, $f = -\frac{b}{2e}$ ist, so ist

$x = \pm \frac{1}{2}e^{1/2} \pm \left(\frac{1}{4}e \pm f \cdot e^{1/2} - d\right)^{1/2}$.

587. Wenn $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$, so lässt sich eine andere Gleichung finden, deren Wurzeln die Quader der Wurzeln dieser Gleichung.

588. Näherung nach Newton: $x = c + z$, $f_0x = f_0c + zf_0'c$.

589. $\frac{f_0x - f_0c}{x - c} = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$.

590. Hier ist $b_{n-1} = a_{n-1}$, $b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1}c$, $f_0c = a_0 + b_0c$.

591. Gleichung, wo die Wurzeln um c kleiner.

592. Näherung nach Horner.

593. Näherung nach Graeffe (Pluswerte der Wurzeln).

594. „ Zahlwurzeln (reelle Wurzeln).

595. „ eine Unbekannte entfernen.

596. „ nach Encke (Richtwurzeln).



Formelbuch

der

Folgelehre oder Funktionenlehre.



Zweiter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.



Zweiter Zweig der Formenlehre:

Die Folgelehre oder Funktionenlehre.

Einleitung.

1. Folgelehre oder Funktionenlehre, höhere Analysis.
2. Folge (Funktion) von x , Veränderliche (Variable), Beständige (Konstante).
3. Zeichen der Folge $f_0, F_0, \varphi_0, \Phi_0$ der Veränderlichen x, y , der Beständigen a, b .
4. Folge einer Veränderlichen.
5. Reinforme (reelle Funktion), Richtfolge (komplexe Funktion) $f_0(x, i)$.
Die Zahlfolgen umfassen die Reinformen und die Richtfolgen.
6. Richtfolge $f_0(x, i) = \varphi_0 x + i \psi_0 x$.
7. Gefolge (Funktional) von x ist die mehrwertige Formel $G_0 x$.
8. $G_0 x \cong G'_0 x$, die Gefolge können nur entsprechend gleich gesetzt werden.
9. Unendlicher Zehntbruch, abgebrochener Zehntbruch, Rest.
10. $\left(\frac{1}{10}\right)^n > \left(\frac{1}{10}\right)^n \left[a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots \right]$, wo $a_1, a_2, \dots < 10$.
11. Stetig wachsende Reihe von Zahlen.
12. Satz der Zahlenreihe.
13. Satz der Richtreihe.
14. Die Zahl x wächst stetig von a bis b . $x = \text{Mitt. } [a, b]$.
Die Zahl x wächst stetig zwischen a und b . $x = \text{Mitt. } (a[,]b)$.
15. Reinforme, die stetig wächst, bez. abnimmt, von a bis b .
16. Richtfolge, die stetig wächst, bez. abnimmt, von a bis b .

Erster Abschnitt: Niedere Folgelehre oder echte Reihen.

17. Unendliche Reihe $= u_0 + u_1 + u_2 + \dots = S_n$.
Fortschreitungsstuf $u_{n+1} : u_n$; der n te Rest $r_n = S_{n+1} u_n$.
1*

18. Echte (konvergente) Reihe, wo der Pluswert von $r_n < c$, und c eine beliebige gegebene Pluszahl.
- Unechte (divergente) Reihe entweder Uebergangs- oder fehlerhafte Reihe.
19. Jede echte Reihe ist einwertig, man kann sich dem Werte beliebig nähern.
20. $Su_n < \frac{u_0}{1-p}$, wo $pu_n > u_{n+1}$ und $+p < 1$ ist.
21. Wenn $a > 1$, so $a^n > k$ } was auch k fein mag, wenn n hinlänglich grose
Wenn $a < 1$, so $a^n < k$ } ganze Pluszahl.
22. Su_n ist echt, wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq p$, wo p echter Bruch.
23. Wenn $r_n < c$, so ist $u_{n+a} < 2c$.
24. $Sa_n x^a$ echt, wenn $x^2 < 1$ und a_n endliche Zahl.
25. $Sa_n x^{-a}$ echt, wenn $x^2 > 1$ und a_n endliche Zahl.
26. Jede echte fallende Reihe und jede echte Reihe mit gebrochener Stufe lässt sich in eine echte steigende Höhenreihe verwandeln.
27. Wenn $Sa_n x^a = 0$ für jeden Wert des x von 0 bis c , so ist $a_n = 0$.
28. Wenn $Sa_n x^a = Sb_n x^a$ für jeden Wert des x von 0 bis c , so $a_n = b_n$.
29. $f_n x = Sa_n x^a$, wenn $x^2 < 1$ und $f_n x$ stets zunimmt, bez. stets abnimmt, wenn x wächst, auch a_n stets endlich ist.
30. $Sa_n x^a + iSb_n x^b$ echt, wenn $x^2 < 1$ und a_n, b_n endliche Zahlen.
31. Geschiedszahl a^n (gelesen a Punkt n), wo n stets ganze Pluszahl.

$$a^n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$
32. Tauschzahl von $n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$.
33. $a^0 = 1$; $a^{-n} = 0$; $0! = 1$.
34. $a^* = a$; $a^n \cdot \frac{a!}{n!(a-n)!}$ * wo $a \geq n$.
35. $a^n = 0$ nur, entweder wenn n Strichzahl, oder wenn n ganze Pluszahl und zugleich $n > a$.
36. $(-a)^n = (-1)^n (a+n-1)^n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$.
37. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{(a-1)(2a-1)\dots((n-1)a-1)}{2 \cdot 3 \dots n}$.
38. $\left(-\frac{1}{a}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{1}{a}\right)^n \frac{(a+1)(2a+1)\dots((n-1)a+1)}{2 \cdot 3 \dots n}$.
39. $(a+1)^n = a^n + a^{n-1}$.
40. $(a+b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots = Sa^{n-a}b^a$.
41. Zweigliederreihe (Binomialreihe) $Sa^a x^a$.
 x die Bafe, a der Zeiger (Index).
42. $Sn^a x^a$ hat $n+1$ Glieder, wenn $x \geq 0$ und n ganze Pluszahl.
43. $Sa^a x^a$ echt, wenn $x^2 < 1$ ist.
44. $(Sa^a x^a)(Sb^a x^a) = S(a+b)^a x^a$ * wo $x^2 < 1$ oder $a = 0$ oder a ganze Pluszahl.
45. $(Sa^a x^a)^n = S(na)^a x^a$ * wo $x^2 < 1$ oder a ganze Pluszahl oder 0.
46. $(1+x)^n = S n^a x^a$ * wo $x^2 < 1$ oder n ganze Pluszahl oder 0.
47. $(1-x)^n = S(-1)^a n^a x^a$ * wo $x^2 < 1$ oder n ganze Pluszahl.

$$48. \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots = S(\mp 1)^a x^a \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

49. Binomischer Lehratz:

$$(a + b)^n \approx S n^a a^{n-a} b^a \quad * \text{ wo } b^2 < a^2 \text{ oder } n \text{ ganze Pluszahl.}$$

50. Polynomischer Lehratz.

$$(a + b + c + \dots)^n \approx S \frac{n(n-1) \dots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80 \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} a^{n-a} b^a c^a \dots$$

* wo $a = b + c + \dots$ und entweder n ganze Pluszahl oder $a^2 > b^2 > c^2 > \dots$

$$51. (1 + a)^n \approx 1 + nc + n^2 c^2 + \dots = S \frac{n(n+1) \dots (n+a-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80 \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} a^a c^a.$$

* wo $c = \frac{a}{1+a}$ und $c^2 < 1$ oder $a > -1/2$.

$$52. (1 + a)^{\frac{1}{n}} = S \frac{(n+1)(2n+1) \dots ((a-1)n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80 \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \left(\frac{1}{n(a+1)} \right)^a.$$

$$53. (1 - a)^{\frac{1}{n}} = 1 - S \frac{(n-1)(2n-1) \dots ((a-1)n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80 \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \left(\frac{1}{na} \right)^a.$$

$$54. (1 + a)^x \approx 1 + x \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right) + x^2 P \quad * \text{ wo } c = \frac{a}{1+a}, c^2 < 1, \text{ oder } a > -1/2.$$

$$55. \log(1 + a) \approx \log \frac{1}{1-c} = M \left(c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \dots \right) \quad * \text{ wo } c^2 < 1.$$

$$56. \log(1 - x) = -MS \frac{x^a}{a}; \quad \log(1 + x) = MS(-1)^{a-1} \frac{x^a}{a}.$$

$$57. \log(1 + x) = \log \frac{1+z}{1-z} \approx 2M \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad * \text{ wo } z^2 < 1.$$

$$58. \log(1 - x) = \log \frac{1-z}{1+z} \approx -2M \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad * \text{ wo } z^2 < 1.$$

$$59. \text{ Für Zehnloge ist } M = 0,4342944819; \quad \frac{1}{M} = 2,30258509.$$

60. Berechnung der Zehnloge für Primzahlen von 1 bis 100.

$$61. \text{ Wenn } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \quad \text{so } \log(a - b) = \log(c - d) = \log(e - f).$$

62. Berechnung der Zehnloge für Primzahlen von 100 bis 1000.

63. Berechnung der Tafel der Zehnloge.

64. Die Eloge (Neperschen oder natürlichen). Zeichen l_e ; $M_e = 1$.

$$65. l_e(1 \pm x) \approx \pm 2 \left(\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) \quad * \text{ wo } z^2 < 1.$$

$$66. l_{10} x = M \cdot l_e x; \quad l_e x = \frac{1}{M} l_{10} x$$

$$67. e = S \frac{1}{a!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,718281828459.$$

$$68. \sin x \approx x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

$$\tan x \approx x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

$$69. \cos x \approx 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

$$70. \arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = S(-1)^a \frac{x^{2a+1}}{2a+1} \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

$$71. \pi = 3,141592653589793; \quad 1^0 = 0,01745 \, 32925. \\ 1' = 0,0002908882; \quad 1'' = 0,0000048481 \, 36811.$$

$$72. \arcsin(x) = \int_0^x \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2a-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2a} \cdot \frac{x^{2a+1}}{2a+1} \quad * \text{ wo } x^2 < 1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

$$73. \sin x = S(-1)^a \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}; \quad \cos x = S(-1)^a \frac{x^{2a}}{(2a)!} \quad * \text{ wo } x^2 < 1.$$

$$74. \tan x = x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{2x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3} + \frac{62x^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3} + \dots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{2x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5} - \frac{2x^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 9} \\ * \text{ wo } x^2 < 1 \text{ und } x \geq 0.$$

75. Berechnung der Loge für cos, tan und cot aus log sin.

76. Berechnung der Loge von sin für Sekunden von 0 bis 0° 30'.

77. dgl. für 45°, 30°, 15°, 18°, 3°, 1½°, 2°, 1°.

78. Berechnung der Winkeltafel von 0° bis 15°.

79. dgl. von 15° bis 90°.

Zweiter Abschnitt der Folgelehre: Höhere Folgelehre oder Diffe und Integern.

Die Diffe oder Differentialquotienten.

$$80. f_0(x+y) = S_{a!}^{y^a} f_0^a x \quad * \text{ wo } f_0(x+y) \text{ stets wächst oder stets abnimmt,} \\ \text{wenn } y \text{ wächst und } y^2 < 1.$$

$$81. \text{ Abgeleitete Folgen } f_0'x, f_0''x, \quad \text{wo } f_0(x+y) \text{ echt und}$$

$$f_0(x+y) = f_0x + yf_0'x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f_0''x + \dots = S_{a!}^{y^a} f_0^a x.$$

$$82. \text{ Diff } x \text{ (Differentialquotient von } x). \text{ Zeichen: } \frac{d}{dx} f_0x; \quad \frac{d^a}{dx^a} f_0x.$$

$$83. \frac{d}{dx} f_0x = f_0'x.$$

$$84. \frac{d^{a+1}}{dx^{a+1}} f_0x = \frac{d^a}{dx^a} f_0'x.$$

$$85. \frac{d}{dx} a = 0; \quad \frac{d}{dx} bx = b; \quad \frac{d}{dx} (a + bx) = b.$$

$$86. \frac{d}{dx} x = 1.$$

$$87. \left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (u \pm v \pm z \pm \dots) &= \frac{d}{dx} u \pm \frac{d}{dx} v \pm \frac{d}{dx} z \pm \dots \\ \frac{d^a}{dx^a} (u \pm v \pm z \pm \dots) &= \frac{d^a}{dx^a} u \pm \frac{d^a}{dx^a} v \pm \frac{d^a}{dx^a} z \pm \dots \end{aligned} \right\} \quad * \text{ wo } u, v, z, \dots \\ \text{Folgen von } x.$$

$$89. \frac{d}{dx} uv = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u \quad * \text{ wo } u, v \text{ Folgen von } x.$$

$$\frac{d}{dx} (f_0x) q_0x = (f_0x) \frac{d}{dx} q_0x + (q_0x) \frac{d}{dx} f_0x.$$

$$90. \frac{d}{dx} a u = a \frac{d}{dx} u; \quad \frac{d}{dx} \frac{u}{a} = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} u \quad * \text{ wo } u \text{ Folge von } x.$$

91. $\frac{d_{uvz}\dots}{uvz\dots} = \frac{d_u}{u} + \frac{d_v}{v} + \frac{d_z}{z} + \dots$.
92. $\frac{d^n}{x} uv \dots = S_{n-a} \left(\frac{d^a}{x} u \right) \frac{d^{n-a}}{x} v$ * wo u, v Folgen von x .
93. $\frac{d^n}{x} uvz\dots = \frac{S_{n(n-1)\dots(n-a+1)} \left(\frac{d^{n-a}}{x} u \right) \left(\frac{d^b}{x} v \right) \left(\frac{d^c}{x} z \right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots b \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots c \cdot \dots}$
* wo n, v, z, \dots Folgen von x und $a = b + c + \dots$.
94. $\frac{d}{x} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{d}{x} u - u \frac{d}{x} v}{v^2}$.
95. $\frac{d}{x} f_y = \left(\frac{d}{y} f_y \right) \frac{d}{x} y$ oder $\frac{d}{x} f_y = y' f'_y$ * wo y Folge von x .
96. $\frac{d}{y} x = \frac{1}{\frac{d}{x} y}$ oder $\frac{d}{f_y x} x = \frac{1}{\frac{d}{x} f_y x}$.
97. $\frac{d}{x} f_y(y, v) = \left(\frac{d}{x} y \right) \frac{d}{y} f_y(y, v) + \frac{d}{x} v \frac{d}{v} f_y(y, v)$ oder
 $\frac{d}{x} f_y(y, v) = y' f'_y + v' f'_v$ * wo y, v Folgen von x .
98. $\frac{d}{x} f_y(x, y) = f'_x + y' f'_y$ * wo y Folge von x .
99. $\frac{d}{x} f_y(y, u, v, \dots) = \left(\frac{d}{x} y \right) \frac{d}{y} f_y(y, u, v, \dots) + \left(\frac{d}{x} u \right) \frac{d}{u} f_y(y, u, v, \dots) + \dots$
 $= y' f'_y + u' f'_u + v' f'_v + \dots$ * wo y, u, v, \dots Folgen von x .
100. Taylorscher Lehratz:
 $f_y(x+y) = f_y x + y \frac{d}{x} f_y x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{x^2} f_y x + \dots = \sum_{a!} \frac{y^a}{a!} \frac{d^a}{x^a} f_y x$
* wo $y^2 < 1$, $f_y(x+y)$ stets wächst, oder stets abnimmt, wenn y wächst und $\frac{d^a}{x^a} f_y x$ endlich.
101. Mac Laurinscher Lehratz:
 $f_y = f_y x + y \frac{d}{x} f_y x + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{x^2} f_y x + \dots = \sum_{a!} \frac{y^a}{a!} \frac{d^a}{x^a} f_y x$
* wo für $\frac{d^a}{x^a} f_y x$ $x=0$ gesetzt $y^2 < 1$ und $\frac{d^a}{x^a} f_y x$ endlich.
102. Wenn $F_y(x, f_y x) = 0$, so ist $\frac{d}{x} F_y(x, f_y x) = 0$.
103. Wenn $F_y(x, y) \neq 0$, so ist $\frac{d}{x} y = - \frac{\frac{d}{x} F_y(x, y)}{\frac{d}{y} F_y(x, y)}$ oder $y' = - \frac{F'_x}{F'_y}$.
* wo y Folge von x .
104. $\frac{d}{x} x^m = m x^{m-1}$; $\frac{d^a}{x^a} x^m = m(m-1) \dots (m-a+1) x^{m-a} = \frac{m!}{(m-a)!} x^{m-a}$.
105. $\frac{d}{x} \left(\sum a_a x^a \right) = \sum a_a x^{a-1}$; $\frac{d^m}{x^m} \left(\sum a_a x^a \right) = \sum \frac{a!}{(a-m)!} a_a x^{a-m}$.
106. $\frac{d^m}{x^m} x^m = m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$; $\frac{d^{m+1}}{x^{m+1}} x^m = 0$.
107. $\frac{d^a}{x^a} x^{-m} = (-1)^a \frac{(m+a-1)!}{(m-1)!} x^{-(m+a)}$.

$$108. \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n \cdot x^{1 - \frac{1}{n}}}; \quad \frac{d^a}{dx^a} x^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1} \frac{n!}{(n-a)!} \frac{1}{n^a x^{a - \frac{1}{n}}}.$$

$$109. \frac{d^a}{dx^a} x^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a (n+1)(2n+1) \cdots ((2a-1)n-1)}{n^a x^{a + \frac{1}{n}}}.$$

$$110. \frac{d}{dx} y^m = m y^{m-1} \frac{dy}{dx}.$$

$$111. \frac{d}{dx} (S_{a,y^a}) = \left(\frac{d}{dx} y \right) (S_{a,y^{a-1}}).$$

$$112. \frac{d}{dx} l_e x = \frac{1}{x}; \quad \frac{d}{dx} l_e y = \frac{\frac{d}{dy} y}{y} \quad * \text{ wo } x = M(0|,]2).$$

$$113. \frac{d}{dx} l_a x = \frac{1}{x l_e a} = \frac{l_a e}{x}; \quad \frac{d}{dx} l_a y = \frac{l_a e}{y} \cdot \frac{d}{dx} y = \frac{1}{y \cdot l_e a} \cdot \frac{d}{dx} y.$$

$$114. \frac{d^n}{dx^n} l_a x = l_a e (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{x^n}.$$

$$115. \frac{d^n}{dx^n} l_e (a + bx) = l_e e (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot \frac{l_e^n}{(a + bx)^n}.$$

$$116. \frac{d}{dx} l_a l_a x = (l_a e)^2 \frac{1}{x \cdot l_a x}; \quad \frac{d}{dx} l_e l_e x = \frac{1}{x l_e x}.$$

$$117. \frac{d}{dx} a^x = a^x l_e a; \quad \frac{d}{dx} a^y = a^y l_e a \frac{d}{dx} y.$$

$$118. \frac{d}{dx} e^x = e^x; \quad \frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}.$$

$$119. \frac{d^m}{dx^m} a^x = a^x (l_e a)^m.$$

$$120. \frac{d^m}{dx^m} e^x = e^x; \quad \frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m \cdot e^{ax}. \quad e^{ax} = \int \frac{(ax)^a}{a!}.$$

$$121. e^{ax} = \int \frac{(ax)^a}{a!}.$$

$$122. \frac{d}{dx} u^z = u^z \left(l_e u \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{du} u}{u} \right).$$

$$123. \frac{d}{dx} u^{z^t} = u^{z^t} \left(l_e (u^z) \frac{d}{dx} t + t \cdot l_e u \frac{d}{dx} z + z \frac{\frac{d}{du} u}{u} \right).$$

$$124. \frac{d}{dx} u^{(z^t)} = u^{(z^t)} \cdot z^t \left(l_e u \cdot l_e z \frac{d}{dx} t + t l_e u \cdot \frac{\frac{d}{dz} z}{z} + \frac{\frac{d}{du} u}{u} \right).$$

$$125. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x; \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x;$$

$$\frac{d}{dx} (\sin x)^2 = \sin 2x; \quad \frac{d}{dx} (\cos x)^2 = -\sin 2x.$$

$$126. \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin \left(\frac{n}{2} \pi + x \right); \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos \left(\frac{n}{2} \pi + x \right).$$

$$127. \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2; \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2).$$

$$128. \frac{d}{dx} \sec x = \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = (\tan x) \sec x; \quad \frac{d}{dx} \csc x = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -(\cot x) \csc x.$$

129. $\frac{d}{x} \arcsin(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}; \quad \frac{d}{x} \arccos(x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$
130. $\frac{d}{x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \frac{d}{x} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$
131. $\frac{d}{x} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}; \quad \frac{d}{x} \operatorname{arccsc}(x) = -\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}}.$
132. $\frac{d}{x} l_e \sin x = \cot x; \quad \frac{d}{x} l_e \cos x = -\tan x.$
133. $\frac{d}{x} l_e \operatorname{cosec} x = -\cot x; \quad \frac{d}{x} l_e \sec x = \tan x.$
134. $\frac{d}{x} l_e \tan x = \frac{2}{\sin 2x}; \quad \frac{d}{x} l_e \cot x = \frac{-2}{\sin 2x}.$
135. $x + iy \cdot \frac{d}{dy} F_0(x + iy) = f_0(x + iy)$ dann und nur dann, wenn sowohl $\frac{d}{x}$ als auch $\frac{d}{iy} F_0(x + iy) = f_0(x + iy).$
136. $x + iy \cdot \frac{d}{dy} (x + iy)^c = c(x + iy)^{c-1} \quad * \text{ wo } c \text{ reine Zahl.}$
137. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} (x + iy)^c = c(c-1) \cdots (c-m+1)(x + iy)^{c-m}.$
138. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} S_{a_a}(x + iy)^a = S_{(a-m)!} a_a (x + iy)^{a-m}.$
139. $x + iy \cdot \frac{d^a}{dy^a} (x + iy)^{-n} = (-1)^a n(n+1) \cdots (n+a-1)(x + iy)^{-(n+a)}.$
140. $x + iy \cdot \frac{d^a}{dy^a} (x + iy)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{a-1} (n-1)(2n-1) \cdots ((a-1)n-1)(x + iy)^{\frac{1}{n}-a}.$
141. $x + iy \cdot \frac{d^a}{dy^a} (x + iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{(-1)^a (n+1)(2n+1) \cdots ((a-1)n+1)}{n^a} (x + iy)^{-(a+\frac{1}{n})}.$
142. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} e^{x+iy} = e^{x+iy}.$
143. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} a^{x+iy} = (l_e a)^m a^{x+iy}; \quad x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} e^{a(x+iy)} = a^m e^{a(x+iy)}.$
144. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} l_e(x + iy) \cong (-1)^{m-1} (m-1)! \frac{1}{(x + iy)^m}.$
145. $x + iy \cdot \frac{d}{dy} \sin(x + iy) = \cos(x + iy); \quad x + iy \cdot \frac{d}{dy} \cos(x + iy) = -\sin(x + iy).$
146. $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} \sin(x + iy) = \sin\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right)$
 $x + iy \cdot \frac{d^m}{dy^m} \cos(x + iy) = \cos\left(\frac{m}{2}\pi + x + iy\right).$
147. $x + iy \cdot \frac{d}{dy} \tan(x + iy) = \frac{1}{(\cos(x + iy))^2}; \quad x + iy \cdot \frac{d}{dy} \cot(x + iy) = -\frac{1}{(\sin(x + iy))^2}.$
148. $x + iy \cdot \frac{d}{dy} \sec(x + iy) = \frac{\sin(x + iy)}{(\cos(x + iy))^2} = \tan(x + iy) \sec(x + iy).$
 $x + iy \cdot \frac{d}{dy} \operatorname{cosec}(x + iy) = -\frac{\cos(x + iy)}{(\sin(x + iy))^2} = -\cot(x + iy) \operatorname{cosec}(x + iy).$

149. $\frac{\partial}{\partial x + iy} \text{Arc}(\sin = x + iy) \cong \frac{1}{[1 - (x + iy)^2]^{1/2}}$
150. $\frac{\partial}{\partial x + iy} \text{Arc}(\tan = x + iy) \cong \frac{1}{1 + (x + iy)^2}$
151. $\frac{\partial}{\partial x + iy} \text{Arc}(\sec = x + iy) \cong \frac{1}{(x + iy)[1 + (x + iy)^2]^{1/2}}$
152. Alle Grundformeln für Diffe sind auch für die Richtgrößen gültig.
153. Wenn $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, so ist
 $\frac{\partial}{\partial x} y = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$ und $\frac{\partial^a}{\partial x^a} y = n(n-1) \dots$
 $(n-a)a_n x^{n-a} + \dots + (a+1) \cdot a \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_{a+1} x + a(a-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot a_a = 0$.
154. Wenn x stetig von $-a$ bis $+a$, so $\frac{1}{x}$ stetig von $-\frac{1}{a}$ bis $+\frac{1}{a}$.
155. $f_0 x$ stetig, so lange $\frac{\partial}{\partial x} \geq 0 \geq \frac{1}{0}$.
156. Befondere Werte von $f_0 x$, wo $\frac{\partial}{\partial x} f_0 x = 0$, bez. $\frac{\partial}{\partial x} x = 0$.
157. Fortbeugung von $f_0 x$, wenn $\sum \frac{(+v)^{2+a}}{(2+a)!} \frac{\partial^{2+a}}{\partial x^{2+a}} f_0 x$ für $+v =$ für $-v$
 und alle Diffe endlich.
 Hohle Fortbeugung, wenn Strich-, Erhabene, wenn Plusgröße.
158. Fortbeugung, wenn $\frac{\partial^{2a}}{\partial x^{2a}} f_0 x$ der erste Diff, der ausser dem ersten ≥ 0 .
159. Grenzwert, wenn bei Fortbeugung auch $\frac{\partial}{\partial x} f_0 x = 0$.
160. Umbeugung von $f_0 x$, wenn $\sum \frac{v^{2+a}}{(2+a)!} \frac{\partial^{2+a}}{\partial x^{2+a}} f_0 x$ für $+v$ und für $-v$
 entgegengesetzt und alle Diffe endlich.
 Senkende Umbeugung, wenn für $+v$ Strich-, Erhebende, wenn für $+v$
 Plusgröße.
161. Umbeugung, wenn $\frac{\partial^{2a+1}}{\partial x^{2a+1}} f_0 x$ der erste Diff, der ausser dem ersten ≥ 0 .
162. x^n stetig von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x ganze Zahl.
163. x^n hat für $x=0$, wenn n Pluszahl, für $\frac{1}{x} = 0$, wenn n Strichzahl, eine
 Beugung.
164. $x^{\frac{m}{n}}$ stetig, wenn x eine Pluszahl.
165. $S_{a,n} x^a$ stetig, wenn a_n und x Pluszahlen und a_n endlich.
166. Für $z = S_{a,n} x^a$, $\frac{\partial}{\partial x} z = S_{a,n} a_n x^{a-1}$, $\frac{\partial^c}{\partial x^c} z = S_{a,n} (a-1) \cdot \dots \cdot (a-c+1) a_n x^{a-c}$.
167. Für $y^m = z = S_{a,n} x^a$ ist $y = z^{\frac{1}{m}}$, $\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1} \frac{\partial z}{\partial x}$;

$$\frac{d^2}{x} y = \frac{1}{m} \left[\frac{d^2}{x} z - \frac{(m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^2}{m \cdot z^2} \right];$$

$$\frac{d^3}{x} y = \frac{1}{m} \left[\frac{d^3}{x} z - 3(m-1) \left(\frac{d^2}{x} z \right) \frac{d}{x} z + \frac{(m-1)(2m-1) \left(\frac{d}{x} z \right)^3}{m^2 \cdot z^3} \right].$$

168. Gleichung n ten Grades $\frac{d^c}{x} z$ und $\frac{d^c}{x} y$ abzuleiten.

169. Jede Gleichung n ten Grades, wenn $a_n > 0$ die Form

$$z = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \text{ und}$$

$$z = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_{n-1})(x - c_n) = 0, \text{ wo } c_a \text{ die Wurzeln.}$$

170. Für alle Wurzeln werden $\frac{d^c}{x} y$ unendlich und muss man entweder $x = c_a \pm h$ oder $\frac{d}{y} x$, oder $y^m = y^m + a^m$ nehmen.

171. Für alle $x > c_a$ ist $y > 0$ und $\frac{d^c}{x} y$ endlich.

172. y ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$, wenn $\frac{d^{2a}}{x} y = \pm a > 0$ und alle vorher gehenden Diffe $= 0$.

173. Wenn $x > c_a$ und $\frac{d}{x} y > 0$, dagegen $\frac{d^2}{x} y, \frac{d^3}{x} y, \dots, \frac{d^c}{x} y = 0, \frac{d^{c+1}}{x} y > 0$, so ist

$$\frac{d^{c+1}}{x} y = \frac{1}{m} \left[\frac{d^{c+1}}{x} z - \frac{m(m-1) \dots (m-c) \left(\frac{d}{x} z \right)^{c+1}}{m^c + 1} \right], \text{ wo } y^m = z = \sum_{0,a} S_a x^a.$$

174. Wenn $x > c_a$ und $\frac{d^a}{x} y = 0$ für $a = 2, 3, \dots, c$ und ungleich 0 für $c+1 = 2b$, so Fortbeugung, und zwar hohle, wenn $\frac{d^{2b}}{x} y$ eine Strichzahl, erhabene, wenn Pluszahl.

175. Wenn $x > c_a$ und $\frac{d^a}{x} y = 0$ für $a = 2, 3, \dots, c$, und ungleich 0 für $c+1 = 2b+1$, so Umbeugung, und zwar senkende, wenn $\frac{d^{2b+1}}{x} y$ Strichzahl, erhebende, wenn Pluszahl.

176. a^x stetig von $x = -\infty$ bis $+\infty$, wenn a Pluszahl ungleich 1.

177. ${}_a x$ stetig für a und x Pluszahl, wenn a ungleich 1.

178. $\sin x$ und $\cos x$ stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$

179. $\tan x$ und $\cot x$ stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$.

180. $\sec x$ und $\csc x$ stetig für $x = -\infty$ bis $+\infty$.

181. $\arcsin(\sin = x)$ und $\arccos(\cos = x)$ stetig für $x = M[-1 \text{ bis } +1]$.

182. $\arctan(\tan = x)$ und $\operatorname{arccot}(\cot = x)$ stetig für $x = M[-\infty \text{ bis } +\infty]$.

183. $\operatorname{arcsec}(\sec = x)$ und $\operatorname{arccsc}(\csc = x)$ stetig für $x = \left\{ \begin{array}{l} M[-1, -\infty] \\ M[+\infty, +1] \end{array} \right\}$.

184. $F_0(x, i) = g_0 x + i v_0 x$ stetig, wenn $g_0 x$ stetig und $v_0 x$ stetig.

Die Integern und die Integrale.

185. Erstes Integral nach $x = \sum_x^1 f_0 x$ (gewöhnlich $\int f_0 x$).

186. M tes Integral nach x $\sum_x^m f_0 x$, w_a willkürliche Konstante.

$$187. \sum_x^m f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + q_0 x.$$

188. M te Integre nach x $\frac{d}{x}^{-m} f_0 x$, wo $w_a = 0$ gesetzt.

$$189. \frac{d}{x}^m \frac{d}{x}^{-m} f_0 x = f_0 x = \frac{d}{x}^m \sum_x^m f_0 x.$$

$$190. \frac{d}{x}^{-m} \frac{d}{x}^m q_0 x = \frac{d}{x}^m \frac{d}{x}^{-m} q_0 x = q_0 x.$$

$$191. \sum_x^m f_0 x \cong w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots + w_{m-1} x^{m-1} + \frac{d}{x}^{-m} f_0 x.$$

$$192. \frac{d}{x}^{-m} (f_{01} x + f_{02} x + \dots + f_{0n} x) = \frac{d}{x}^{-m} f_{01} x + \frac{d}{x}^{-m} f_{02} x + \dots + \frac{d}{x}^{-m} f_{0n} x.$$

$$193. \frac{d}{x}^{-m} a f_0 x = a \frac{d}{x}^{-m} f_0 x.$$

$$194. \frac{d}{x}^{-1} a_n x^n = \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}; \quad \frac{d}{x}^{-m} a_n x^n = \frac{n!}{(m+n)!} a_n x^{m+n}.$$

$$195. \frac{d}{x}^{-m} S a_n x^a = S \frac{a!}{(m+a)!} a_n x^{m+a}.$$

$$196. \frac{d}{x}^{-1} a_n x^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} a_n x^{-n};$$

$$\frac{d}{x}^{-m} a_n x^{-(m+n)} = (-1)^m \frac{(n-1)!}{(m+n-1)!} a_n x^{-n}.$$

$$197. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x} = l_0 x.$$

$$198. \frac{d}{x}^{-1} x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n x - \frac{1}{n}.$$

$$199. \frac{d}{x}^{-m} x - \left(m - \frac{1}{n}\right) = (-1)^{m-1} \frac{(n-m)!}{n!} n^m x^{\frac{1}{n}}.$$

$$200. \frac{d}{x}^{-1} e^x = e^x; \quad \frac{d}{x}^{-1} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}; \quad \frac{d}{x}^{-m} e^x = e^x.$$

$$201. \frac{d}{x}^{-1} \sin x = -\cos x; \quad \frac{d}{x}^{-1} \cos x = \sin x.$$

$$202. \frac{d}{x}^{-m} \sin x = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right); \quad \frac{d}{x}^{-m} \cos x = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x\right).$$

$$203. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(\cos x)^2} = \tan x; \quad \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(\sin x)^2} = -\cot x.$$

$$204. \frac{d}{x}^{-1} \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \sec x; \quad \frac{d}{x}^{-1} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\operatorname{cosec} x.$$

$$205. \frac{d}{x}^{-1} \cot x = l_0 \sin x; \quad \frac{d}{x}^{-1} \tan x = -l_0 \cos x.$$

$$206. \frac{d}{x}^{-1} \cot x = -l_0 \operatorname{cosec} x; \quad \frac{d}{x}^{-1} \tan x = l_0 \sec x.$$

$$207. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = l_0 \tan x = -l_0 \cot x;$$

$$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2} l_0 \tan x = -\frac{1}{2} l_0 \cot x.$$

208. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$; $\frac{d}{x}^{-1} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = \arccot(x)$.
209. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \arcsin(x)$; $\frac{d}{x}^{-1} -\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} = \arccos(x)$.
210. $\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}} = \operatorname{arcsec}(x)$;
 $\frac{d}{x}^{-1} \left(-\frac{1}{x(1+x^2)^{1/2}} \right) = \operatorname{arccosec}(x)$.
211. $\frac{d}{x}^{-1} (f_y) \frac{d}{x} y = \frac{d}{y}^{-1} f_y$; $\frac{d}{x}^{-1} f_y = \left(\frac{d}{y}^{-1} f_y \right) \frac{d}{y} x$ * wo y Folge von x .
212. $\frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V = UV - \frac{d}{x}^{-1} V \frac{d}{x} U$;
 $\frac{d}{x}^{-1} UW = U \frac{d}{x}^{-1} W - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} W \right) \frac{d}{x} U$
 * wo U und V Folgen von x und $W = \frac{d}{x} V$ gesetzt.
213. $\frac{d}{x}^{-1} U \frac{d}{x} V = U \frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} V - \frac{d}{x}^{-1} \left(\frac{d}{x}^{-1} \frac{d}{x} V \right) \frac{d}{x} U$.
214. $\frac{d}{x+iy}^{-1} (x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+1}}{c+1}$.
215. $\frac{d}{x+iy}^{-m} (x+iy)^c = \frac{(x+iy)^{c+m}}{(c+1)(c+2)\cdots(c+m)}$.
216. $\frac{d}{x+iy}^{-m} [S_a(x+iy)^a] = \frac{\int (x+iy)^{a+m} a!}{a! (a+m)!}$.
217. $\frac{d}{x+iy}^{-1} (x+iy)^{-n} = \frac{(x+iy)^{-(n-1)}}{n-1}$ * wo $n > 1$.
218. $\frac{d}{x+iy}^{-1} \frac{1}{x+iy} = l_e(x+iy)$.
219. $\frac{d}{x+iy}^{-m} (x+iy)^{-(m+1)} = (-1)^m \frac{1}{m! (x+iy)}$.
220. $\frac{d}{x+iy}^{-1} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n(x+iy)^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}$;
 $\frac{d}{x+iy}^{-a} (x+iy)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^a (x+iy)^{\frac{1}{n}+a}}{(n+1)(2n+1)\cdots(an+1)}$.
221. $\frac{d}{x+iy}^{-1} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} (x+iy)^{1-\frac{1}{n}}$;
 $\frac{d}{x+iy}^{-a} (x+iy)^{-\frac{1}{n}} = \frac{n^a (x+iy)^{a-\frac{1}{n}}}{(n-1)(2n-1)\cdots(an-1)}$.
222. $\frac{d}{x+iy}^{-1} e^{x+iy} = e^{x+iy}$; $\frac{d}{x+iy}^{-a} e^{x+iy} = e^{x+iy}$.
223. $\frac{d}{x+iy}^{-m} a^{x+iy} = \frac{a^{x+iy}}{(l_e a)^m}$; $\frac{d}{x+iy}^{-m} e^{a(x+iy)} = \frac{e^{a(x+iy)}}{a^m}$.

$$224. \frac{d^{-1}}{x+iy} \sin(x+iy) = -\cos(x+iy); \quad \frac{d^{-1}}{x+iy} \cos(x+iy) = \sin(x+iy).$$

$$225. \frac{d^{-m}}{x+iy} \sin(x+iy) = \sin\left(\frac{3m}{2}\pi + x+iy\right);$$

$$\frac{d^{-m}}{x+iy} \cos(x+iy) = \cos\left(\frac{3m}{2}\pi + x+iy\right).$$

$$226. \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{1}{(\cos(x+iy))^2} = \tan(x+iy); \quad \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{1}{(\sin(x+iy))^2} = -\cot(x+iy).$$

$$227. \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{\sin(x+iy)}{(\cos(x+iy))^2} = \frac{d^{-1}}{x+iy} (\tan(x+iy)) \sec(x+iy) = \sec(x+iy).$$

$$228. \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{1}{[1-(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \text{Arc}(\sin = x+iy) \cong -\text{Arc}(\cos = x+iy).$$

$$229. \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{1}{1+(x+iy)^2} \cong \text{Arc}(\tan = x+iy) \cong -\text{Arc}(\cot = x+iy).$$

$$230. \frac{d^{-1}}{x+iy} \frac{1}{(x+iy)[1+(x+iy)^2]^{1/2}} \cong \text{Arc}(\sec = x+iy) \cong -$$

$$\text{Arc}(\text{cosec} = x+iy).$$

231. Alle Grundformeln für Integrale gelten auch für Richtgrößen.

$$232. \frac{d^{-1}}{x} (a+bx)^n = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}; \quad \frac{d^{-m}}{x} (a+bx)^n = \frac{n!(a+bx)^{n+m}}{(n+m)!b^m}.$$

$$233. \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}};$$

$$\frac{d^{-m}}{x} \frac{1}{(a+bx)^n} = \frac{(-1)^m \cdot m!}{b^m(n-m)!(a+bx)^{n-m}}.$$

$$234. \frac{d^{-1}}{x} \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b} l_e(a+bx).$$

$$235. \frac{d^{-1}}{x} (a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+1}}{b \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)};$$

$$\frac{d^{-p}}{x} (a+bx)^{\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+p}}{b^p \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right) \left(\frac{m}{n}+2\right) \cdots \left(\frac{m}{n}+p\right)}.$$

$$236. \frac{d^{-1}}{x} (a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{1-\frac{m}{n}}}{b \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)};$$

$$\frac{d^{-p}}{x} (a+bx)^{-\frac{m}{n}} = \frac{(a+bx)^{p-\frac{m}{n}}}{b^p \left(1-\frac{m}{n}\right) \left(2-\frac{m}{n}\right) \cdots \left(p-\frac{m}{n}\right)}.$$

$$237. \frac{d^{-1}}{x} l_e x = x l_e x - x.$$

- $$238. \frac{d}{x}^{-m} l_e x = \frac{x^m}{m!} \left[l_e x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right].$$
- $$239. \frac{d}{x} l_e (a + bx) = \frac{(a + bx)^m}{b^m \cdot m!} \left[l_e (a + bx) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right].$$
- $$240. \frac{d}{x}^{-(m+n)} \frac{1}{(a + bx)^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{m!} \frac{(a + bx)^m}{b^{m+n}} \left[l_e (a + bx) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right].$$
- $$241. \frac{d}{x}^{-1} x^{m-1} (a + bx^m)^\mu = \frac{(a + bx^m)^{\mu+1}}{b(\mu+1)}.$$
- $$242. \frac{d}{x}^{-1} \frac{x}{(a + bx^2)^{1/2}} = \frac{(a + bx^2)^{1/2}}{b}; \quad \frac{d}{x}^{-1} \frac{x}{(a + bx^2)^{3/2}} = -\frac{1}{b(a + bx^2)^{1/2}}.$$
- $$243. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a + bx^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a(a + bx^2)^{1/2}}.$$
- $$244. \frac{d}{x}^{-1} \frac{x^n - 1}{a + bx^n} = \frac{1}{n \cdot b} l_e (a + bx^n).$$
- $$245. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a + bx}{a - bx}; \quad \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a - bx^2} = \frac{1}{2(ab)^{1/2}} l_e \frac{a^{1/2} + xb^{1/2}}{a^{1/2} - xb^{1/2}}.$$
- $$246. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} l_e (bx + (a^2 + b^2 x^2)^{1/2});$$
- $$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a + bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} l_e [xb^{1/2} + (a + bx^2)^{1/2}].$$
- $$247. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\tan = \frac{bx}{a} \right);$$
- $$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a + bx^2} = \frac{1}{(ab)^{1/2}} \arctan \left(\tan = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}} \right).$$
- $$248. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a^2 - b^2 x^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \arcsin \left(\sin = \frac{bx}{a} \right);$$
- $$\frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{(a - bx^2)^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} \arcsin \left(\sin = \frac{xb^{1/2}}{a^{1/2}} \right).$$
- $$249. \frac{d}{x}^{-1} \cos(a + bx) = \frac{1}{b} \sin(a + bx); \quad \frac{d}{x}^{-1} \cos bx = \frac{1}{b} \sin bx.$$
- $$250. \frac{d}{x}^{-1} \sin(a + bx) = -\frac{1}{b} \cos(a + bx); \quad \frac{d}{x}^{-1} \sin bx = -\frac{1}{b} \cos bx.$$
- $$251. \frac{d}{x}^{-1} \cot(a + bx) = \frac{1}{b} l_e \sin(a + bx); \quad \frac{d}{x}^{-1} \cot x = l_e \sin x.$$
- $$252. \frac{d}{x}^{-1} \tan(a + bx) = -\frac{1}{b} l_e \cos(a + bx); \quad \frac{d}{x}^{-1} \tan x = -l_e \cos x.$$
- $$253. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a^2 (\cos x)^2 + b^2 (\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\tan = \frac{b \cdot \tan x}{a} \right).$$
- $$254. \frac{d}{x}^{-1} \frac{1}{a^2 (\cos x)^2 - b^2 (\sin x)^2} = \frac{1}{2ab} l_e \frac{a + b \tan x}{a - b \tan x}.$$

$$255. \frac{d}{x}^{-1} \arcsin(ax) = x \cdot \arcsin(ax) + \frac{(1 - a^2 x^2)^{1/2}}{a}.$$

$$256. \frac{d}{x}^{-1} \arctan(ax) = x \cdot \arctan(ax) - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2).$$

$$257. \frac{d}{x}^{-1} (Sa_a x^a) = \sum_{a+1}^{a_a} x^a + 1; \quad \frac{d}{x}^{-m} (Sa_a x^a) = \sum_{(m+a)!}^{a! \cdot x^{m+a}}.$$

* wo a_a endlich und $x^2 < 1$.

$$258. \frac{d}{x}^{-1} (Sa_a x^a f x) = Sa_a \frac{d}{x}^{-1} x^a f x; \quad \frac{d}{x}^{-m} (Sa_a x^a f x) = Sa_a \frac{d}{x}^{-m} x^a f x.$$

* wo a_a endlich, $x^2 < 1$ und $\left(\frac{d}{x}^{-m} x^a f x\right)^2 < 1$ ist.

259. Bruch ganzer Höhenreihen, echter, unechter.

$$\text{Form } \frac{A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} = \frac{S A_a x^a}{S a_a x^a}.$$

260. Jeder unechte Bruch lässt sich in eine ganze Höhenreihe und einen echten Bruch zerlegen.

$$261. \frac{f_{ax}}{f_{ax}} = \frac{S A_a x^a}{S a_a x^a} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{C_0}{(x-c)^c} + \frac{C_1}{(x-c)^{c-1}} + \dots + \frac{C_{c-1}}{x-c} + \dots + \frac{L_0}{(x-l)^l} + \frac{L_1}{(x-l)^{l-1}} + \dots + \frac{L_{l-1}}{x-l}.$$

* wo $f_{ax} = (x-b)^b (x-c)^c \dots (x-l)^l$ und B_0 bis L_{l-1} Konstante.

$$262. \frac{f_{ax}}{f_{ax}} = \frac{S A_a x^a}{S a_a x^a} = \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l} \text{ und } \frac{f_{ax_b}}{f_{ax_b}} = B$$

* wo $f_{ax} = (x-b)(x-c) \dots (x-l)$.

$$263. \text{Wenn in } \frac{f_{ax}}{f_{ax}} \text{ das } b = p + iq, c = -iq, \text{ so ist } \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{Px + Q}{(x-p)^2 + q^2}.$$

$$264. \frac{f_{ax}}{f_{ax}} = \frac{S A_a x^a}{S a_a x^a} = \frac{B_0}{(x-b)^b} + \frac{B_1}{(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{B_{b-1}}{x-b} + \frac{F_0 x}{f x} \text{ und}$$

$$B_0 \rightarrow x_b, B_1 = \frac{d}{x} x_b, \quad a! B_a = \frac{d^a}{x} x_b \quad \text{und} \quad \frac{d^a}{x} x_b = \sum_{(m-a)!}^{m!}.$$

$$265. \frac{d}{x}^{-1} \frac{A x^m}{(a + bx)^n} = \sum_{(m-n-a+1)!}^{(-1)^a A \cdot m^a \cdot a^a} \frac{1}{b^{m+1}} (a + bx)^{m-n-a+1}.$$

$$266. \frac{d}{x}^{-p} \frac{A x^m}{(a + bx)^n} = \sum_{b^{m+p} (m+p-n-a)!}^{(-1)^a A \cdot a^a \cdot m^a (m-n-a)!} (a + bx)^{m+p-n-a}.$$

$$267. \frac{d}{x}^{-1} \frac{B}{x-b} = B_{1e} (x-b) \quad * \text{ wo } x < b.$$

$$268. \frac{a^{-1} f_{0x}}{x} = \frac{a^{-1}}{x} \frac{0, m}{\sum a_q x^q} = \frac{B_0(x-b) + C_0(x-c) + \dots + L_0(x-l)}{\sum a_q x^q} \\ * \text{ wo } f_{0x} = (x-b)(x-c) \dots (x-l) \text{ und } x > b, x > c, \dots x > l \text{ ist.}$$

$$269. \frac{a^{-(r+1)} B}{x-b} = \frac{B(x-b)^r}{r!} \left[l_0(x-b) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} \right) \right] \\ * \text{ wo } x > b, r > 0 \text{ ist.}$$

$$270. \frac{a^{-(r+1)} f_{0x}}{x} = \frac{a^{-(r+1)} 0, m}{\sum a_q x^q} = \frac{B(x-b)^r}{r!} l_0(x-b) \\ + \frac{C(x-c)^r}{r!} l_0(x-c) + \dots + \frac{L(x-l)^r}{r!} l_0(x-l) \\ + \left[B(x-b)^r + C(x-c)^r + \dots + L(x-l)^r \right] \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right) \\ * \text{ wo } f_{0x} = (x-b)(x-c) \dots (x-l) \text{ und } x > b, x > c, \dots x > l, r > 0.$$

271. Wenn $n > 1$, $x > b$ und $r > 0$ ist, so ist

$$\text{für } r < n \quad \frac{a^{-r} B}{x(x-b)^n} = \frac{(-1)^r r! B}{(n-r)! (x-b)^{n-r}}$$

$$\text{für } r = n \quad \frac{a^{-r} B}{x(x-b)^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! B l_0(x-b)$$

$$\text{für } r > n \quad \frac{a^{-r} B}{x(x-b)^n} \\ = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! B}{(r-n)!} (x-b)^{r-n} \left[l_0(x-b) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right].$$

$$272. \frac{a^{-n} f_{0x}}{x} = \frac{0, m}{\sum a_q x^q} = \frac{a^{-r} B_0}{x(x-b)^b} + \frac{a^{-r} B_1}{x(x-b)^{b-1}} + \dots + \frac{a^{-r} B_{b-1}}{x(x-b)} \\ + \frac{a^{-r} C_0}{x(x-c)^c} + \frac{a^{-r} C_1}{x(x-c)^{c-1}} + \dots + \frac{a^{-r} C_{c-1}}{x(x-c)} + \dots \\ + \frac{a^{-r} L_0}{x(x-l)^l} + \frac{a^{-r} L_1}{x(x-l)^{l-1}} + \dots + \frac{a^{-r} L_{l-1}}{x(x-l)}.$$

* wo $f_{0x} = (x-b)^b(x-c)^c \dots (x-l)^l$ und $x > b, x > c \dots x > l$, $r > 0$ und B_0, B_1, \dots, L_{l-1} nach 264 bestimmt sind.

$$273. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{(4ac-b^2)^{1/2}} \arctan \left(\frac{b+2cx}{(4ac-b^2)^{1/2}} \right) * \text{ wo } 4ac-b^2 > 0 \\ = -\frac{2}{b+2cx} * \text{ wo } 4ac-b^2 = 0$$

$$= -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}} l_0 \frac{(b^2-4ac)^{1/2} + b+2cx}{(b^2-4ac)^{1/2} - b-2cx} * \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } 4ac-b^2 < 0 \text{ und} \\ (b^2-4ac)^{1/2} > b+2cx \end{array} \right. \\ = -\frac{1}{(b^2-4ac)^{1/2}} l_0 \frac{b+2cx + (b^2-4ac)^{1/2}}{b+2cx - (b^2-4ac)^{1/2}} * \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } 4ac-b^2 < 0 \text{ und} \\ (b^2-4ac)^{1/2} < b+2cx. \end{array} \right.$$

$$274. \frac{a^{-1}}{x} \frac{x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c} l_0(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c} \cdot \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

$$275. \frac{a^{-1}}{x} \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} = \frac{B}{2c} l_0(a+bx+cx^2) + \frac{2Ac-Bb}{2c} \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

Für 276 bis 290 setzen wir $T = a + bx + cx^2$, $\alpha = b + 2cx$, $\lambda = 4ac - b^2$.

$$276. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{(a + bx + cx^2)^{\alpha+1}} = \frac{b + 2cx}{a(4ac - b^2)(a + bx + cx^2)^{\alpha}} \\ + \frac{(2\alpha - 1)2c}{a(4ac - b^2)x} \frac{\bar{a}^{-1}}{(a + bx + cx^2)^{\alpha}} \\ \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{a\lambda} \frac{1}{T^{\alpha}} + \frac{(2\alpha - 1)2c}{a\lambda} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha}}.$$

$$277. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha+1}} = \frac{S}{0, n-1} \frac{(2n+1-2c)! 2^c C^c \alpha}{n(n-1) \dots (n-c) \lambda^c + 1 T^{n-c}} \\ + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^n c^n}{n! \lambda^n} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha}}.$$

* wo $(2n+1-2c)! = (2n+1-2)(2n+1-4) \dots (2n+1-2c)$ und für $c = 0$ das $(2n+1-2c)! = 1$.

$$278. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n-m+1)c} \cdot \frac{x^{m-1}}{T^n} - \frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1}} \\ + \frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1}}.$$

$$279. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x \cdot T^{n+1}} = \frac{\bar{a}^{-1}}{y} \frac{y^{2n+1}}{(c + by + ay^2)^{n+1}} \quad * \text{ wo } y = \frac{1}{x} \text{ oder } x = \frac{1}{y} \text{ ist.}$$

$$280. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^m T^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)a \cdot x^{m-1} T^n} - \frac{(n+m-1)b}{(m-1)a} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-1} T^{n+1}} \\ - \frac{(2n+m-1)c}{(m-1)a} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-2} T^{n+1}}.$$

$$281. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{(a + bx)^n}{(a + bx)^{1/2}} = \frac{\bar{a}^{-1}}{x} (a + bx)^{n-1/2} = \frac{2(a + bx)^{n+1/2}}{(2n+1)b}.$$

$$282. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{x^m (a + bx)^n}{(a + bx)^{1/2}} = \frac{\bar{a}^{-1}}{x} x^m (a + bx)^{n-1/2} \\ = \frac{2x^m (a + bx)^{n+1/2}}{(2m+2n+1)b} - \frac{2ma}{(2m+2n+1)b} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} x^{m-1} (a + bx)^{n-1/2}.$$

$$283. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} (A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) (a + bx)^{n-1/2} = \frac{S}{0, m} A_m \frac{\bar{a}^{-1}}{x} x^m (a + bx)^{n-1/2}.$$

$$284. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{(a + bx + cx^2)^{1/2}} = \frac{1}{c^{1/2}} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} b + cx + c^{1/2} (a + bx + cx^2)^{1/2} \right] * \text{ wo } c > 0 \text{ ist.} \\ = \frac{1}{(-c)^{1/2}} \arcsin \left[\frac{-2cx - b}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \right] \quad * \text{ wo } c < 0 \text{ ist.}$$

$$285. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha+1/2}} = \frac{2\alpha}{(2\alpha-1)\lambda} \frac{1}{T^{\alpha-1/2}} + \frac{(\alpha-1)8c}{(2\alpha-1)\lambda} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{\alpha-1/2}}.$$

$$286. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} \frac{1}{T^{n+1/2}} = \frac{2\alpha}{(2n-1)\lambda} \frac{1}{T^{n-1/2}} + \sum_{1, n-1} \frac{2\alpha(n-1)(n-2) \dots (n-c)(8c)^c}{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-(2c+1)) \lambda^{c+1}} \frac{1}{T^{n-\frac{2c+1}{2}}}.$$

$$287. \quad \frac{\bar{a}^{-1}}{x} T^{n+1/2} = \frac{2\alpha}{(n+1)8c} T^{n+1/2} + \frac{(2n+1)\lambda}{(n+1)8c} \frac{\bar{a}^{-1}}{x} T^{n-1/2}.$$

$$288. \frac{a^{-1}}{x} T^{n+1} = \frac{2aT^{n+1}}{(n+1)8c} + \frac{82a(2n+1)(2n-1) \cdots (2n+3-2c)\lambda^c T^{n+1/2-c}}{(n+1)n(n-1) \cdots (n+1-c)(8c)^{c+1}} \\ + \frac{(2n+1)(2n-1) \cdots (2n+1-2c)\lambda^{c+1} a^{-1}}{(n+1)n(n-1) \cdots (n+1-c)(8c)^{c+1}} \frac{1}{x} \frac{1}{T^{1/2}}.$$

$$289. \frac{a^{-1}}{x} \frac{x^m}{T^{n+1/2}} = \frac{1}{(2n-m)c} \frac{x^{m-1}}{T^{n-1/2}} - \frac{(2n+1-2m)b}{(2n-m)2c} \frac{a^{-1}}{x} \frac{x^{m-1}}{T^{n+1/2}} + \frac{(m-1)a}{(2n-m)c} \frac{a^{-1}}{x} \frac{x^{m-2}}{T^{n+1/2}}.$$

$$290. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{x^m \cdot T^{n+1/2}} = - \frac{1}{(m-1)a x^{m-1} T^{n-1/2}} - \frac{(2n+2m-3)b}{(m-1)2a} \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-1} T^{n+1/2}} \\ - \frac{(2n-m-2)c}{(m-1)a} \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-2} T^{n+1/2}}.$$

291. Die Brüche mit Tiefen verwandelt man in Brüche mit Höhen durch neue Veränderliche.

$$292. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}, \text{ wenn } \frac{m}{n} \text{ ganze Zahl; setze } a+bx^n = z^q, \text{ dann ist} \\ \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{2b^n} \frac{a^{-1}}{z} (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1}.$$

$$293. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}, \text{ wenn } \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \text{ eine ganze Zahl; setze } a+bx^n = z^q, \\ \text{dann ist } \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = - \frac{q \cdot a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}}{n} \frac{z^{p+q-1}}{(z^q - b)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 1}}.$$

$$294. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^s - \frac{bns}{m} \frac{a^{-1}}{x} x^{m+n-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

$$295. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{bn(s+1)} \\ - \frac{bn(s+1)}{m-n} \frac{a^{-1}}{x} x^{m-n-1}(a+bx^n)^{s+1}.$$

$$296. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{am} - \frac{b(m+ns+n)}{am} \frac{a^{-1}}{x} x^{m+n-1}(a+bx^n)^s.$$

$$297. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{s+1}}{b(m+ns)} - \frac{a(m-n)}{b(m+ns)x} \frac{a^{-1}}{x} x^{m-n-1}(a+bx^n)^s.$$

$$298. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = \frac{x^m(a+bx^n)^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns} \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{s-1}.$$

$$299. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^s = - \frac{x^m(a+bx^n)^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m+n+ns}{an(s+1)} \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1}(a+bx^n)^{s+1}.$$

$$300. \frac{a^{-1}}{x} f_{oeax} = \frac{1}{a} \frac{a^{-1}}{y} \frac{1}{y} f_{oy} \quad * \text{ wo } y = e^{ax}.$$

$$301. \frac{a^{-1}}{x} x^m e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1} e^{ax}.$$

$$302. \frac{a^{-1}}{x} x^m e^{ax} = e^{ax} \left[\frac{x^m}{a} - \frac{m}{a^2} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^3} x^{m-2} \cdots + (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}} \right] \\ = e^{ax} \left[\frac{S(-1^m m(m-1) \cdots (m-a+1)}{a^a + 1} x^{m-a} \right] * m \text{ ganze Pluszahl.}$$

303. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^m} e^{ax} = -\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^{m-1}} e^{ax}.$
304. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{e^{ax}}{x} = l_0 x + \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax)^a}{a!} = l_0 x + \frac{1}{1} \frac{ax}{1} + \frac{1}{2} \frac{(ax)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{(ax)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$
305. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x^m} e^{ax} = -e^{ax} \left[\frac{S}{1, m-1} \frac{a^{a-1}}{(m-1)(m-2) \dots (m-a)x^{m-a}} + \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{e^{ax}}{x} \right]$
306. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} e^{ax} f_0 x = \frac{1}{a} e^{ax} f_0 x - \frac{1}{a} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} e^{ax} \frac{\mathfrak{a}}{x} f_0 x.$
307. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} f_0 l_0 x \stackrel{*}{=} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{y} e^y f_0 y \quad * \text{ wo } l_0 x = y.$
308. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (l_0 x)^m \stackrel{*}{=} x \left[S(-1)^a m(m-1) \dots (n-(a-1)) (l_0 x)^{m-a} \right]$
 $* m \text{ ganze Pluszahl.}$
309. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{l_0 x} = l_0(l_0 x) + \frac{1}{1} \frac{l_0 x}{1} + \frac{1}{2} \frac{(l_0 x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \frac{(l_0 x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = l_0(l_0 x) + \frac{1}{1, a} \frac{(l_0 x)^a}{a!}.$
310. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{(l_0 x)^m} = -x \left[\frac{S}{1, m-1} \frac{1}{(m-1)(m-2) \dots (m-a)(l_0 x)^{m-a}} \right] + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{l_0 x}.$
311. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} x^\mu f_0(l_0 x) \stackrel{*}{=} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{y} e^{(\mu+1)y} f_0 y \quad * \text{ wo } l_0 x = y \text{ ist.}$
312. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x} (l_0 x)^m \stackrel{*}{=} \frac{(l_0 x)^{m+1}}{m+1} \quad * \text{ wo } m \geq -1 \text{ ist.}$
313. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \frac{1}{x l_0 x} = l_0(l_0 x).$
314. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} x^\mu (l_0 x)^m = x^{\mu+1} \left[\frac{(l_0 x)^m}{\mu+1} - \frac{m(l_0 x)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(l_0 x)^{m-2}}{(\mu+1)^3} + \frac{(-1)^m m \cdot m!}{(\mu+1)^{m+1}} \right]$
 $= x^{\mu+1} \left[\frac{S}{0, m} \frac{m(m-1) \dots (m-(a-1)) (l_0 x)^{m-a}}{(\mu+1)^a + 1} \right].$
315. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} f_0 \sin x \stackrel{*}{=} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{y} \frac{f_0 y}{(1-y^2)^{1/2}} \quad * \text{ wo } \sin x = y.$
316. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \sec x = l_0 \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x \right).$
317. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} \operatorname{cosec} x = l_0 \tan \frac{1}{2}x.$
318. $\frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (\sin x)^p (\cos x)^q = \frac{(\sin x)^p + 1 (\cos x)^{q-1}}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (\sin x)^{p+2} (\cos x)^{q-2}, (1)$
 $= -\frac{(\sin x)^{p-1} (\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^{q+2}, (2)$
 $= \frac{(\sin x)^{p+1} (\cos x)^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (\sin x)^{p+2} (\cos x)^q, (3)$
 $= -\frac{(\sin x)^{p-1} (\cos x)^{q+1}}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \frac{\mathfrak{a}^{-1}}{x} (\sin x)^{p-2} (\cos x)^q, (4)$

$$= \frac{(\sin x)^{p+1}(\cos x)^{q-1}}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p (\cos x)^{q-2}. \quad (5)$$

$$= \frac{(\sin x)^p + 1(\cos x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} x^{\frac{q+1}{2}} (\sin x)^p (\cos x)^{q+2}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 319. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p (\cos x)^q &= - \frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q} \left[\sin x^{p-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S \ (p-1)(p-3) \cdots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{0,1/2(p-1) \ (p+q-2)(p+q-4) \cdots (p+q-2a)} \right] * p \text{ un-} \\ &= - \frac{(\cos x)^{q+1}}{p+q} \left[\sin x^{p-1} + \frac{S \ (p-1)(p-3) \cdots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{0,1/2(p-1) \ (p+q-2)(p+q-4) \cdots (p+q-2a)} \right] \text{ gerade.} \\ &\quad + \frac{(p-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 x^{\frac{q-1}{2}} (\cos x)^q}{(p+q-2) \cdots (q+2)} \quad * \text{ wo } p \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 320. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p (\cos x)^q &= \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q} \left[(\cos x)^{q-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S \ (q-1)(q-3) \cdots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{0,1/2(q-1) \ (p+q-2)(p+q-4) \cdots (p+q-2a)} \right] * q \text{ un-} \\ &= \frac{(\sin x)^{p+1}}{p+q} \left[(\cos x)^{q-1} + \frac{S \ (q-1)(q-3) \cdots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{0,1/2(q-1) \ (p+q-2)(p+q-4) \cdots (p+q-2a)} \right] \text{ gerade.} \\ &\quad + \frac{(q-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p}{(p+q-2) \cdots (p+2)}. \quad * \text{ wo } q \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 321. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p &= - \frac{\cos x}{p} \left[(\sin x)^{p-1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{S \ (p-1)(p-3) \cdots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{0,1/2(p-1) \ (p-2)(p-4) \cdots (p-2a)} \right] * p \text{ un-} \\ &= - \frac{\cos x}{p} \left[(\sin x)^{p-1} + \frac{S \ (p-1)(p-3) \cdots (p+1-2a)(\sin x)^{p-1-2a}}{0,1/2(p-1) \ (p-2)(p-4) \cdots (p-2a)} \right] \text{ gerade.} \\ &\quad + \frac{(p-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot x}{(p-2)(p-4) \cdots 4 \cdot 2} \quad * p \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 322. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\cos x)^q &= \frac{\sin x}{q} \left[(\cos x)^{q-1} + \frac{S \ (q-1)(q-3) \cdots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{0,1/2(q-1) \ (q-2)(q-4) \cdots (q-2a)} \right] \\ &= \frac{\sin x}{q} \left[(\cos x)^{q-1} + \frac{S \ (q-1)(q-3) \cdots (q+1-2a)(\cos x)^{q-1-2a}}{0,1/2(q-1) \ (q-2)(q-4) \cdots (q-2a)} \right] * q \text{ ungerade.} \\ &\quad + \frac{(q-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot x}{(q-2) \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \quad * q \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 323. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\sin x)^p &= \frac{(-1)^{1/2(p+1)}}{2^{p-1}} \left[\frac{S \ (-1)^a p^{2a} \cos(p-2a)x}{0,1/2(p-1) \ p-2a} \right] * \text{ wo } p \text{ ungerade.} \\ &= \frac{(-1)^{1/2p}}{2^{p-1}} \left[\frac{S \ \sin(p-2a)x}{0,1/2(p-1) \ p-2a} + (-1)^{1/2p} p^{1/2p} \cdot \frac{x}{2} \right] \\ &\quad * \text{ wo } p \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 324. \quad x^{\frac{q-1}{2}} (\cos x)^p &= \frac{1}{2^{p-1}} \left[\frac{S \ \sin(p-2a)x}{0,1/2(p-1) \ p-2a} \right] * \text{ wo } p \text{ ungerade.} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \left[\frac{S \ \sin(p-2a)x}{0,1/2(p-1) \ p-2a} + p^{1/2p} \cdot \frac{x}{2} \right] * \text{ wo } p \text{ gerade.} \end{aligned}$$

$$825. \frac{a^{-1}}{x} (\tan x)^p = \frac{S}{0,1/2(p-3)} (-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2(p+1)} l_e \cos x$$

* wo p ungerade.

$$= \frac{S}{0,1/2p-1} (-1)^a \frac{(\tan x)^{p-1-2a}}{p-1-2a} + (-1)^{1/2p} x$$

* wo p gerade.

$$326. \frac{a^{-1}}{x} f_e \cos x = - \frac{a^{-1}}{x} \frac{f_{ey}}{(1-y^2)^{1/2}} \quad * \text{ wo } \cos x = y.$$

$$327. \frac{a^{-1}}{x} f_e \tan x = \frac{a^{-1}}{x} \frac{f_{ey}}{1+y^2} \quad * \text{ wo } \tan x = y.$$

$$328. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right).$$

$$329. \frac{a^{-1}}{x} \frac{(\cos x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(\cos x) \sin x}{2a^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} + \frac{1}{2a^2b} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right).$$

$$330. \frac{a^{-1}}{x} \frac{(\sin x)^2}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = - \frac{(\cos x) \sin x}{2b^2[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} + \frac{1}{ab^2} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right).$$

$$331. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]^2} = \frac{(b^2 - a^2)(\cos x) \sin x}{2a^2b[a^2(\cos x)^2 + b^2(\sin x)^2]} + \frac{b^2 + a^2}{2a^3b^2} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right).$$

$$332. \frac{a^{-1}}{x} F_e \tan^{1/2} x = \frac{a^{-1}}{t} (F_e)_1 + t^2 \quad * \text{ wo } \tan^{1/2} x = t.$$

$$333. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{2}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \arctan \left(\frac{b + (c-a) \tan^{1/2} x}{(c^2 - a^2 - b^2)^{1/2}} \right)$$

* $a^2 + b^2 < c^2$.

$$= - \frac{2}{b + (c-a) \tan^{1/2} x} \quad * \text{ wo } a^2 + b^2 = c^2.$$

$$= \frac{-1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} l_e \left[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} + b + (c-a) \tan^{1/2} x}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} - (b + (c-a) \tan^{1/2} x)} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ u. auch $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} > b + (c-a) \tan^{1/2} x$.

$$= \frac{-1}{(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} l_e \left[\frac{b + (c-a) \tan^{1/2} x + (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}}{b + (c-a) \tan^{1/2} x - (a^2 + b^2 - c^2)^{1/2}} \right]$$

* wo $a^2 + b^2 > c^2$ u. auch $(a^2 + b^2 - c^2)^{1/2} < b + (c-a) \tan^{1/2} x$.

$$334. \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{a^{-1}}{x} \frac{1}{a(1 + \cos x) + b \sin x} = \frac{1}{l_e} (a + b \tan^{1/2} x) \quad * \text{ wo } a = c.$$

$$335. \frac{a^{-1}}{x} x^n \sin ax = - \frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{a^{-1}}{x} x^{n-2} \sin ax.$$

$$336. \frac{a^{-1}}{x} x^n \sin ax = - \frac{x^n}{a} \cos ax + S \frac{n(n-1) \cdots (n-2a)}{a^{2a+2}} x^{n-1-2a} \sin ax - S \frac{n(n-1) \cdots (n-2a-1)}{a^{2a+2}} x^{n-2-2a} \cos ax.$$

$$337. \frac{a^{-1} \sin ax}{x^n} = - \frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a \cos ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)x} \frac{a^{-1} \sin ax}{x^{n-2}}.$$

$$338. \frac{a^{-1} \sin ax}{x^n} \stackrel{*}{=} 0, \frac{S}{x^{n-3}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + 0, \frac{S}{x^{n-5}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a+1} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2(n-1)} \frac{a^{n-2}}{(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{a^{-1} \cos ax}{x} \quad * \text{ wo } n \text{ ungerade.} \\ \stackrel{*}{=} 0, \frac{S}{x^{n-2}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + 0, \frac{S}{x^{n-2}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a+1} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2n} \frac{a^{n-2}}{(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{a^{-1} \sin ax}{x} \quad * \text{ wo } n \text{ gerade.}$$

$$339. \frac{a^{-1} \sin ax}{x} = \frac{1}{1} \frac{ax}{1} - \frac{1}{3} \frac{(ax)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \frac{(ax)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots = S \frac{(-1)^a (ax)^{2a+1}}{2a+1 (2a+1)!}.$$

$$340. \frac{a^{-1} \cos ax}{x} = 1_0 x - \frac{1}{2} \frac{(ax)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4} \frac{(ax)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots = 1_0 x + S (-1)^a \frac{1}{2a} \frac{(ax)^{2a}}{(2a)!}.$$

$$341. \frac{a^{-1}}{x} x^n \cos ax = \frac{x^n \sin ax}{a} + \frac{nx^{n-1} \cos ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{a^{-1}}{x} x^{n-2} \cos ax.$$

$$342. \frac{a^{-1}}{x} x^n \cos ax = \frac{x^n}{a} \sin ax + S (-1)^a \frac{n(n-1) \dots (n-2a)x^{n-1-2a} \cdot \cos ax}{a^{2a+2}} \\ + S (-1)^a \frac{n(n-1) \dots (n-2a-1)x^{n-2-2a}}{a^{2a+3}} \cdot \sin ax.$$

$$343. \frac{a^{-1} \cos ax}{x^n} = - \frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a \sin ax}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(n-2)x} \frac{a^{-1} \cos ax}{x^{n-2}}.$$

$$344. \frac{a^{-1} \cos ax}{x^n} \stackrel{*}{=} 0, \frac{S}{x^{n-3}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + \frac{S}{0, \frac{1}{2}(n-5)} (-1)^a \frac{a^{2a+1} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2(n-1)} \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{a^{-1} \sin ax}{x} \\ * \text{ wo } n \text{ ungerade.}$$

$$\stackrel{*}{=} 0, \frac{S}{x^{n-2}} (-1)^{a+1} \frac{a^{2a} \cos ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-1-2a)x^{n-1-2a}} \\ + 0, \frac{S}{x^{n-2}} (-1)^a \frac{a^{2a+1} \sin ax}{(n-1)(n-2) \dots (n-2-2a)x^{n-2-2a}} \\ + (-1)^{1/2n} \frac{a^{n-2}}{(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{a^{-1} \cos ax}{x} \quad * \text{ wo } n \text{ gerade.}$$

$$345. \frac{a^{-1}}{x} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}; \quad \frac{a^{-1}}{x} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$346. \frac{a^{-1}}{x} x^n e^{ax} \sin bx = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[x^n e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) - na \frac{a^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \sin bx \right. \\ \left. + nb \frac{a^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \cos bx \right].$$

$$347. \frac{a^{-1}}{x} x^n e^{ax} \cos bx = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[x^n e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) - na \frac{a^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \cos bx - nb \frac{a^{-1}}{x} x^{n-1} e^{ax} \sin bx \right].$$

$$348. \frac{a^{-1}}{x} x e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} \left[(a(a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)) \sin bx - (b(a^2 + b^2)x - 2ab) \cos bx \right].$$

$$\frac{a^{-1}}{x} x e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} \left[(a(a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)) \cos bx + (b(a^2 + b^2)x - 2ab) \sin bx \right].$$

$$349. \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{arc}}(\sin = x) = \frac{a^{-1}}{y} (f_{\text{oy}}) \cos y \quad * \text{ wo } \text{arc}(\sin = x) = y.$$

$$350. \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{arc}}(\cos = x) = \frac{a^{-1}}{y} (f_{\text{oy}}) \sin y \quad * \text{ wo } \text{arc}(\cos = x) = y.$$

$$351. \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{arc}}(\tan = x) = \frac{a^{-1}}{y} (f_{\text{oy}}) (\sec y)^2 \quad * \text{ wo } \text{arc}(\tan = x) = y.$$

$$352. \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{arc}}(\cot = x) = \frac{a^{-1}}{y} (f_{\text{oy}}) (\csc y)^2 \quad * \text{ wo } \text{arc}(\cot = x) = y.$$

$$353. \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \text{arc}(\sin = x) = \text{arc}(\sin = x) \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{ox}} - \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

$$354. \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \text{arc}(\cos = x) = \text{arc}(\cos = x) \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{ox}} + \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

$$355. \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \text{arc}(\tan = x) = \text{arc}(\tan = x) \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{ox}} - \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \frac{1}{1+x^2}.$$

$$356. \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \text{arc}(\cot = x) = \text{arc}(\cot = x) \frac{a^{-1}}{x} f_{\text{ox}} + \frac{a^{-1}}{x} (f_{\text{ox}}) \frac{1}{1+x^2}.$$

$$357. \frac{a^{-1}}{x} \text{arc}(\sin = x) = x \cdot \text{arc}(\sin = x) + (1-x^2)^{1/2}.$$

$$358. \frac{a^{-1}}{x} \text{arc} \tan = x = x \cdot \text{arc}(\tan = x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

$$359. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1} \text{arc}(\sin = x) = \frac{x^m}{m} \text{arc}(\sin = x) - \frac{1}{m} \frac{a^{-1}}{x} \frac{x^m}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

$$360. \frac{a^{-1}}{x} x^{m-1} \text{arc}(\tan = x) = \frac{x^m}{m} \text{arc}(\tan = x) - \frac{1}{m} \frac{a^{-1}}{x} \frac{x^m}{1+x^2}.$$

Dritter Abschnitt der Folgelehre: Dehnende Folgelehre oder Folgen zweier und mehrer Veränderlichen.

361. Folge zweier Veränderlichen. Zeichen $f_{\text{o}}(x, y)$.

362. Folge mehrer Veränderlichen. Zeichen $f_{\text{o}}(x, y, z, \dots)$.

363. $f_{\text{o}}(x, y, z, \dots)$ ist stetig, wenn sie für x stetig, für y stetig, u. s. w.

364. Steigende Höhenreihe ist echt, wenn $x^2, y^2, \dots < 1$ und alle Vorzeichen endlich.

365. Jede stetige Reihfolge $\frac{R}{x-y, \dots}$ kann, wenn $x^2, y^2, \dots < 1$, einer steigenden Höhereihe gleich gesetzt werden, welche echt, wenn alle Vorzahlen endlich.

366. Jede stetige Richtfolge kann, wenn $x^2, y^2, \dots < 1$, einer Richtgrösse $a + ib$ gleich gesetzt werden, wo a und b echte steigende Höhenreihen sind.

$$367. \frac{R}{x, y} = S_{a, b} x^a y^b = \begin{matrix} a & 00 & 10 & 01 & 20 & 11 \end{matrix} + \dots$$

$$368. \frac{R}{x, y} = 00, 10, 01, 20, 11, 02, 30, 21, 12, 03, 40, 31, 22, 13, 04, \dots$$

wo das Zeichen ab das Glied $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} x^a y^b$ bezeichnet.

Die Diffe oder Differentialquotienten.

$$369. \text{Volldiff: } \frac{\partial}{\partial x, y, z, \dots} f_0 = \frac{\partial}{\partial x} f_0 + \frac{\partial}{\partial y} f_0 + \frac{\partial}{\partial z} f_0 + \dots$$

$$370. \text{Der } (m+1)\text{te Volldiff: } \frac{\partial}{\partial x, y, z, \dots} \left(\frac{\partial^m}{\partial x, y, z, \dots} f_0 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^m}{\partial x, y, z, \dots} f_0 + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^m}{\partial x, y, z, \dots} f_0 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^m}{\partial x, y, z, \dots} f_0 + \dots$$

$$371. \text{Teildiff: } \frac{\partial^a}{\partial x} \frac{\partial^b}{\partial y} \frac{\partial^c}{\partial z} \dots f_0(x, y, z, \dots)$$

$$372. \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} f_0(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^m}{\partial x} f_0(x, y).$$

$$373. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^m}{\partial x} f_0(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x} f_0(x, y).$$

$$374. \text{Volldiff: } \frac{\partial^n}{\partial x, y} f_0(x, y) = \sum n! a \frac{\partial^{n-a}}{\partial x} \frac{\partial^a}{\partial y} f_0(x, y).$$

$$375. \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \frac{\partial^q}{\partial u} \dots F_0(x, y, z, u, \dots) = \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \frac{\partial^q}{\partial u} \frac{\partial^m}{\partial x} \dots F_0(x, y, z, u, \dots).$$

$$376. \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \frac{\partial^q}{\partial u} \dots F_0(x, y, z, u, \dots) = \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \frac{\partial^{q+1}}{\partial u} \dots F_0(x, y, z, u, \dots).$$

$$377. \text{Volldiff: } \frac{\partial^n}{\partial x, y, z, \dots} F_0(x, y, z, \dots) = \sum \frac{n(n-1) \dots (n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot c \cdot \dots} \frac{\partial^{n-a}}{\partial x} \frac{\partial^b}{\partial y} \frac{\partial^c}{\partial z} \dots F_0(x, y, z, \dots)$$

* wo $a = b + c + \dots$.

$$378. \text{Der } m\text{te Eckdiff nach } x: \frac{\partial^m}{\partial x} f_0(x, y, z, \dots) = \frac{\partial^m}{\partial x} (S_{a, b, c, \dots}^a x^a y^b z^c \dots).$$

$$379. \text{Mitteldiff: } \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \dots f_0(x, y, z, \dots) \text{ oder } \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \dots (S_{a, b, c, \dots}^a x^a y^b z^c \dots).$$

$$380. \frac{\partial^m}{\partial x} (S_{a, b, c, \dots}^a x^a y^b z^c \dots) = \sum \frac{a!}{(a-m)!} \frac{\partial^a}{\partial x} x^{a-m} y^b z^c \dots$$

$$381. \frac{\partial^m}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial y} \frac{\partial^p}{\partial z} \dots (S_{a, b, c, \dots}^a x^a y^b z^c \dots) = \sum \frac{a!}{(a-m)!} \frac{b!}{(b-n)!} \frac{c!}{(c-p)!} \dots \frac{\partial^a}{\partial x} x^{a-m} y^{b-n} z^{c-p} \dots$$

Die Integern und die Integrale.

$$382. \text{Der getrennte } m\text{te Eckdiff nach } x: \frac{\partial^m}{\partial x} (S_{a, b, c, \dots}^a x^a y^b z^c \dots) = \frac{\partial^m}{\partial x} (S_{a, 0, 0, \dots}^a x^a y^0 z^0 \dots).$$

$$383. \frac{\partial^m}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} (S_{a,b,c} x^a y^b z^c \dots) = S_{(a-m),0,0} \frac{a!}{(a-m)!} x^{a-m}.$$

$$384. \frac{\partial^{a+m}}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} (S_{a,b,c} x^a + S_{b,b} y^b + S_{c,c} z^c + \dots) \\ = S_{(a-m)} \frac{a!}{(a-m)!} x^{a+m} + S_{(b-m)} \frac{b!}{(b-m)!} y^{b+m} + S_{(c-m)} \frac{c!}{(c-m)!} z^{c+m} + \dots \\ \text{Integral} = \text{Integre} + S_{a',b',c'} x^{a'} y^{b'} z^{c'} \dots \text{ wo } a' + b' + c' + \dots < m.$$

$$385. \text{ Wenn } \frac{\partial^m}{\partial x^a} f(x,y,z,\dots) = S_{a,a} x^a, \frac{\partial^n}{\partial y^b} f(x,y,z,\dots) = S_{b,b} y^b, \frac{\partial^p}{\partial z^c} f(x,y,z,\dots) = S_{c,c} z^c \dots \\ \text{so ist } f(x,y,z,\dots) = S_{(m+a)} \frac{a!}{(m+a)!} x^{m+a} + S_{(n+b)} \frac{b!}{(n+b)!} y^{n+b} + S_{(p+c)} \frac{c!}{(p+c)!} z^{p+c} + \dots \\ \text{Integral} = \text{Integre} + S_{a',b',c'} x^{a'} y^{b'} z^{c'} \dots, \text{ wo } a' < m, b' < n, c' < p, \dots$$

386. Trennbarer mter Eckdiff nach x .

$$387. \frac{\partial^{a-m}}{\partial x^a} (f(x) \Phi_y) + \frac{\partial^{a-n}}{\partial y^b} (f(x) \Phi_y) = 0 \text{ wird getrennt } \frac{\partial^{a-m}}{\partial x^a} f(x) + \frac{\partial^{a-n}}{\partial y^b} \Phi_y = 0.$$

388. Ergänzungsdiffe oder einander ergänzende Diffe: Zeichen $\frac{\partial^m}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}$.

$$\frac{\partial^m}{\partial x^{a_1 b_1 c_1}} S_{a_1 b_1 c_1} x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1}, \frac{\partial^n}{\partial y^{b_2 c_2}} S_{a_2 b_2 c_2} x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2}, \frac{\partial^p}{\partial z^{c_3 c_4}} S_{a_3 b_3 c_3} x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3}, \dots \\ \text{find ergänzend, wenn } a_2, a_3, \dots < m, b_1, b_3, \dots < n, c_1, c_2, c_4, \dots < p \text{ find.}$$

$$389. \text{ Wenn } \frac{\partial^m}{\partial x^a} f(x,y,z,\dots) = S_{a_1 b_1 c_1} x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots, \frac{\partial^n}{\partial y^b} f(x,y,z,\dots) = S_{a_2 b_2 c_2} x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \dots \\ \frac{\partial^p}{\partial z^c} f(x,y,z,\dots) = S_{a_3 b_3 c_3} x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3} \dots \text{ u. s. w., wo } a_2, a_3, \dots < m, \\ b_1, b_3, \dots < n, c_1, c_2, c_4, \dots < p, \dots \text{ so ist} \\ f(x,y,z,\dots) = S_{(m+a_1)} \frac{a_1!}{(m+a_1)!} x^{m+a_1} y^{b_1} z^{c_1} \dots \\ + S_{(n+b_2)} \frac{b_2!}{(n+b_2)!} x^{a_2} y^{n+b_2} z^{c_2} \dots + S_{(p+c_3)} \frac{c_3!}{(p+c_3)!} x^{a_3} y^{b_3} z^{p+c_3} \dots + \dots \\ \text{Integral} = \text{Integre} + S_{a,b,c} x^a y^b z^c, \text{ wo zugleich } a < m, b < n, c < p, \dots$$

390. Ergänzbare Eckdiffe.

391. Mitteldiffe: Wenn $\frac{\partial^m}{\partial x^a} \frac{\partial^n}{\partial y^b} \frac{\partial^p}{\partial z^c} \dots f(x,y,z,\dots)$ gegeben, so find im Integral $f(x,y,z,\dots) = S_{a,b,c} x^a y^b z^c$ alle Beständigen willkürlich, wo entweder $a < m$, oder $b < n$, oder $c < p, \dots$ ist.

Die Diffgleichungen.

392. Einfache Diffe: Wenn alle Diffe nach derselben Veränderlichen genommen $\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f, \dots$ kurz $\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f, \dots$.

$$393. \text{ Die einfachen Diffe } \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f, \dots = \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f, \dots$$

$$394. \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial y} f : \frac{\partial}{\partial x} f.$$

395. Diffgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z,\dots) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z,\dots) + \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z,\dots) + \dots = 0.$$

$$396. \text{ Form: } \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z,\dots) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z,\dots) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z,\dots) + \dots = 0.$$

$$397. \quad \mathfrak{d}_x^{-1} \left[\mathfrak{d}_x f_0(x, y, z, \dots) + \mathfrak{d}_y f_0(x, y, z, \dots) + \mathfrak{d}_z f_0(x, y, z, \dots) + \dots \right] \\ = \mathfrak{d}_x^{-1} f_0(x, y, z, \dots) + \mathfrak{d}_y^{-1} f_0(x, y, z, \dots) + \mathfrak{d}_z^{-1} f_0(x, y, z, \dots).$$

398. Abhängig ist x von den Veränderlichen t, u, v , wenn $x = f_0(t, u, v, \dots)$
Unabhängig ist x von den Veränderlichen t, u, v, \dots , wenn x (nicht als
 $f_0(t, u, v, \dots)$ darstellbar.

399. Wenn y abhängig von x , so auch x abhängig von y .

a. Diffgleichungen von einander abhängiger Veränderlicher.

400. Gleichstufige (homogene) Folgen, wo die Summe der Stufen aller
Veränderlichen gleich ist.

401. Für $\mathfrak{d}_x(Sa_a x^m - a y^a) + \mathfrak{d}_y(Sb_b x^m - b y^b) = 0$ ist, wenn $y = xz$,

$$\text{Integre } \frac{\mathfrak{d}_x^{-1} 1}{x} + z \frac{\mathfrak{d}_x^{-1} Sb_b z^b}{Sa_a z^a + Sb_b z^b + 1} = 0.$$

402. Gleichstufige Folgen solche, die sich gleichstufig machen lassen.

403. $\mathfrak{d}_x(a + bx + cy) = \mathfrak{d}_y(e + fx + gy)$ gleichstufig $x = t + \alpha$, $y = a + \beta$.

b. Diffgleichungen von einander unabhängiger Veränderlicher.

404. Wenn x und u unabhängig von einander, ist $\frac{\mathfrak{d}^a}{x} y$ entweder 0 oder $\frac{1}{0}$.

405. Wenn $\frac{\mathfrak{d}}{x} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\mathfrak{d}}{y} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\mathfrak{d}}{z} f_0(x, y, z, \dots) \neq 0$, * alle un-
abhängig, so ist $f_0(x, y, z, \dots) = 0$, $f_1(x, y, z, \dots) = 0$, $f_2(x, y, z, \dots) = 0, \dots$

406. Wenn $\mathcal{P}(x, y, z, \dots)$

$$= \frac{\mathfrak{d}}{x} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\mathfrak{d}}{y} f_0(x, y, z, \dots) + \frac{\mathfrak{d}}{z} f_0(x, y, z, \dots) + \dots \neq 0$$

* wo alle unabhängig, so ist $f_0(x, y, z, \dots) = 0$, $f_1(x, y, z, \dots) = 0$,

$$f_2(x, y, z, \dots) = 0, \dots \text{ und ist } \frac{\mathfrak{d}}{x} \mathcal{P}(x, y, z, \dots) = \frac{\mathfrak{d}}{x}^{-1} f_0(x, y, z, \dots),$$

$$\frac{\mathfrak{d}}{y}^{-1} (\mathcal{P}(x, y, z, \dots)) = \frac{\mathfrak{d}}{y}^{-1} f_1(x, y, z, \dots) \dots$$

407. Für die Gleichungen Unabhängiger gelten die Gesetze der Ausdehnungs-
lehre, Abschnitt 1.

Vierter Abschnitt der Folgelehre: Erweiternde Folgelehre oder die erweiterten Folgen.

408. Die erweiterten Folgen (Fouriersche-, Bernouillische-, Gamma-, Elliptische
Funktionen).



Formelbuch
der
Ausdehnungslehre.



Dritter Zweig
der
Formenlehre oder Mathematik.





Einleitung in die Ausdehnungslehre.

1. Ausdehnungslehre: $a + e \geq b + e$, wenn $a \geq b$.
 $e + (-e) = 0$ $ee \geq e$.
2. Vielfachensumme: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = S_{1,n} \alpha_a a_a$.
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Vorzahlen, a_1, a_2, \dots, a_n die Größen.
3. $a + (b + c) = a + b + c$; $a + b = b + a$; $a(bc) = abc$; $ab \geq ba$.
 $a(b + c) = ab + ac$; $(a + b)c = ac + bc$.
4. Für Zufügen und Abziehen, für Vervielfachen und Teilen mit Zahlen gelten alle Gesetze der Zahlenlehre.
 $\alpha a = a\alpha$, $\frac{1}{\alpha} a = \frac{a}{\alpha} = a \frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha a}{\alpha} = a$, * wo $\alpha \geq 0$.
5. Einander ersetzende Vereine von Gleichungen.
6. $\frac{\alpha a}{a} = \alpha$ * wenn $a \geq 0$.
7. $\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}$ * wenn $\beta c \geq 0$.
8. Wenn $\alpha a + \beta a + \dots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \dots$, so ist $\alpha + \beta + \dots = \alpha_1 + \beta_1 + \dots$.

Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

9. Hörige GröÙe: $a = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n = S_{1,n} \beta_a b_a$.
Freie GröÙe: $a \geq \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n$.
Deckende oder kongruente GröÙe: $a \cong b$, wenn $a = \beta b$, wo $\beta \geq 0$.
10. Jede Einheit ist frei, jede Vielfachensumme ist zu ihren Einheiten hörig.
11. Null ist zu jeder Größenreihe hörig.
12. $\alpha S_{1,n} \beta_a b_a = S_{1,n} \alpha \beta_a b_a$; $\frac{1}{\alpha} S_{1,n} \beta_a b_a = S_{1,n} \frac{\beta_a}{\alpha} b_a$.
13. $S_{1,n} \alpha_a b_a \pm S_{1,n} \gamma_a b_a = S_{1,n} (\alpha_a \pm \gamma_a) b_a$.

14. Wenn $S_{\alpha_a b_a} = 0$ und $\alpha_m \geq 0$, so ist b_m hörig und umgekehrt.
15. Wenn $S_{\alpha_a b_a} = 0$ und b_a frei, so ist $\alpha_a = 0$ und umgekehrt.
16. Wenn $S_{\alpha_a c_a} = S_{\beta_a c_a}$, wo c_a frei, so ist $\alpha_a = \beta_a$ und umgekehrt.
17. Wenn $\alpha a + \beta b + \dots = xk + \lambda l + \dots$
 * wo $a = S_{\alpha_a g_a}$, $b = S_{\beta_a g_a}$, $\dots k = S_{x_a g_a}$, $l = S_{\lambda_a g_a}$, \dots und g_a frei, so ist
 $\alpha \alpha_a + \beta \beta_a + \dots = x x_a + \lambda \lambda_a + \dots$
18. Wenn die erste GröÙe ≥ 0 und jede folgende von den vorhergehenden frei ist, so ist die Reihe eine freie GröÙenreihe.
19. Wenn zwischen n GröÙen eine Hörigkeit besteht, so stets eine Reihe freier auszufordern.
20. Jede GröÙe $a = S_{\beta_a b_a}$, wo b_a frei.
21. Gebiet n ter Stufe: Alle GröÙen $S_{\alpha_a a_a}$, wo α_a beliebig, a_a frei. Zeichen $c(a_1, \dots, a_n)$.
22. $c(a_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{*}{=} c(b_1, b_2, \dots, b_n)$ * wenn $a_1 = S_{\alpha_a b_a}$, wo $\alpha_1 \geq 0$.
23. Wenn $a_1 = S_{\alpha_a b_a}$, $a_2 = S_{\beta_a b_a}$, $\dots a_m = S_{\mu_a b_a}$, und a_1, a_2, \dots, a_m frei, so kann man $c(a_1, \dots, a_m, a_m + 1, \dots, a_n) \cong c(b_1, \dots, b_n)$ machen.
24. Wenn $a_1 = S_{\alpha_a b_a}$, $a_2 = S_{\beta_a b_a}$, $\dots a_n = S_{\nu_a b_a}$, und a_1, a_2, \dots, a_n frei, so ist $c(a_1, a_2, \dots, a_n) = c(b_1, b_2, \dots, b_n)$.
25. Jedes Gebiet n ter Stufe ist aus n freien GröÙen desselben abzuleiten.
26. Wenn n GröÙen erster Klasse einem Gebiete kleinerer Stufe als n angehören, so herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.
27. Wenn $c(a_1, \dots, a_n)$ zu b_1, b_2, \dots, b_n hörig, so sind diese frei und umgekehrt.
28. Zurückleitung einer GröÙe n ter auf ein Gebiet m ter Stufe, wo $m < n$.
29. Wenn $\alpha a + \beta b + \dots = xk + \lambda l + \dots$, so auch $\alpha a' + \beta b' + \dots = xk' + \lambda l' + \dots$, wo $a', b', \dots k', l', \dots$ die Zurückleitungen auf dasselbe Gebiet.
30. Verbindendes Gebiet: $\overset{n}{\circ} + \overset{m}{\circ}$; gemeinsames Gebiet $\overset{n}{\circ} \times \overset{m}{\circ}$.
 $[c(a_1, a_2, \dots, a_n)] \times [c(b_1, b_2, \dots, b_m)] = 0$, wenn keine GröÙe gemein.
31. Sei g die Stufe des gemeinsamen, v die des verbindenden Gebietes, so ist $m + n = g + v$.
32. Wenn $h > m + n$, so ist $g \geq m + n - h$.
33. $[c(e_{a_1} e_{a_2} \dots e_{a_n})] \times [c(e_{b_1} e_{b_2} \dots e_{b_m})] \stackrel{*}{=} 0$ * wenn $a_1 \dots a_n \geq b_1 \dots b_m$.
34. Für die Gebiete der Ausdehnungslehre gelten alle Sätze der Logik.
35. Für die Gebiete gelten alle Gesetze der Zufügung und Verwebung.
36. $\circ A + \circ A = \circ A$. $\circ A \cdot \circ A = \circ A$.
37. $1 \cdot \circ A = \circ A$. $(\circ A)^n = \circ A$.
38. $\circ A = \circ A + \circ A \cdot B$. $\circ A = \circ A (\circ A + B)$.
39. Wenn $\circ A + \circ B = \circ B$, Wenn $\circ A \cdot \circ B = \circ B$,
 so ist $\circ A \cdot \circ B = \circ A$. so ist $\circ A + \circ B = \circ A$.
40. $\circ A + 1 = 1$. $\circ A \cdot 0 = 0$.
 $\circ A + 0 = \circ A$. $\circ A \cdot 1 = \circ A$.

41. Wenn $\circ A + \circ C = \circ B + \circ C$ und auch $\circ A \cdot \circ C = \circ B \cdot \circ C$ ist, so ist $\circ A = \circ B$.
42. Wenn $\circ A + \circ B = 0$, so ist $\circ A = 0$ und $\circ B = 0$. Wenn $\circ A \cdot \circ B = 1$, so ist $\circ A = 1$ und $\circ B = 1$.
43. Nichtgebiet $\circ \bar{A}$. Selbstgebiet $\circ A$.
44. $\circ A + \circ \bar{A} = 1$. $\circ A \cdot \circ \bar{A} = 0$.
45. Für jedes Gebiet giebt es nur ein Nichtgebiet.
46. $\circ \bar{\bar{A}} = A$.
47. $\bar{1} = 0$. $\bar{0} = 1$.
48. Wenn $\circ A \cdot \circ \bar{B} + \circ \bar{A} \cdot \circ B = 0$, so ist $\circ A = \circ B$. Wenn $(\circ A + \circ \bar{B}) \cdot (\circ \bar{A} + \circ B) = 1$, so ist $\circ A = \circ B$.
49. $\circ A + \circ B = \circ A \cdot \circ B + \circ A \cdot \circ \bar{B} + \circ \bar{A} \cdot \circ B$.
50. $\circ A + \circ B + \circ \bar{A} \cdot \circ \bar{B} = 1$.
51. $(\circ A + \circ B) = \circ \bar{A} \cdot \circ \bar{B}$. $(\circ A \cdot \circ B) = \circ \bar{A} + \circ \bar{B}$.
52. Deckgebiete; Eingebiete; Schneidgebiete; Trenngebiete.
53. Summe der Gebiete. Zeug der Gebiete.
54. $\circ A + \circ B \geq \circ B$. $\circ A \cdot \circ B \leq \circ B$.
55. $1 \geq \circ A$. $0 \leq \circ A$.
56. $(\circ A + \circ B = \circ B) = (\circ A \leq \circ B)$. $(\circ A \cdot \circ B = \circ A) = (\circ A \leq \circ B)$.
57. $(\circ A \cdot \circ B = 0) = (\circ B < \circ \bar{A})$. $(\circ \bar{A} \cdot \circ B = 0) = (\circ B \leq \circ A)$.
 $= (\circ A \leq \circ \bar{B})$. $= (\circ \bar{A} \leq \circ \bar{B})$.
58. $(\circ A < \circ B) = (\circ \bar{B} < \circ \bar{A})$.
59. $(\circ A + \circ B = \circ B)(\circ A \cdot \circ B = \circ B) = (\circ A = \circ B)$.
60. $(\circ A < \circ B)(\circ B < \circ A) = (\circ A = \circ B)$.
61. $(\circ A < \circ B)(\circ \bar{A} < \circ \bar{B}) = (\circ A = \circ B)$.
62. Gleichungen für Deck- und Eingebiete:
- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. $\circ A \leq \circ B$. | 3. $\circ A + \circ B = \circ B$. | 5. $\circ A \cdot \circ B = \circ A$. | 7. $\circ A \cdot \circ \bar{B} = 0$. |
| 2. $\circ \bar{B} \leq \circ \bar{A}$. | 4. $\circ \bar{A} + \circ \bar{B} = \circ \bar{A}$. | 6. $\circ \bar{A} \cdot \circ \bar{B} = \circ \bar{B}$. | 8. $\circ \bar{A} + \circ B = 1$. |
63. Gleichungen für Trenngebiete:
- | | | | |
|-----------------------------------|--|--|--|
| 1. $\circ A \leq \circ \bar{B}$. | 3. $\circ A + \circ \bar{B} = \circ \bar{B}$. | 5. $\circ A \cdot \circ \bar{B} = \circ A$. | 7. $\circ A \cdot \circ B = 0$. |
| 2. $\circ B \leq \circ \bar{A}$. | 4. $\circ \bar{A} + \circ B = \circ \bar{A}$. | 6. $\circ \bar{A} \cdot \circ B = \circ B$. | 8. $\circ \bar{A} + \circ \bar{B} = 1$. |
64. Hauptgebiet $\circ H$.
65. Ergänzung zum Hauptgebiet für $\circ A$ ist $\circ \bar{A} \cdot H$.
66. Jedes Gebiet mit $\circ H$ verwebt oder multipliziert.
67. Die Sätze 34 bis 63 gelten auch für die Hauptgebiete.
68. Einheit nter Klasse: Zeug von n Einheiten erster, sofern $\sum 0$. Einheit nter Klasse von andern nter Klasse frei, wenn eine andere Einheit erster Klasse.
69. Wenn $\alpha E + \beta F + \gamma G + \dots = 0$, so $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \dots$.
70. $(\alpha a)(\beta b) = (\alpha \beta)(ab)$.
71. $P(\alpha a, \beta b, \dots) = (\alpha \beta \dots) P(a, b, \dots)$ wo P ein Zeug aus den Größen.
72. $P(\alpha a, \beta a, \dots) = P(\beta a, \alpha a, \dots)$.
73. $P(\alpha a + \beta b + \dots) c = \alpha P a c + \beta P b c + \dots$.
74. $(S \alpha_a a_a)(S \beta_b b_b) = S \alpha_a \beta_b (a_a b_b)$.
75. $(S \alpha_a a_a)(S \beta_b b_b) \dots (S \nu_n n_n) = S \alpha_a \beta_b \dots \nu_n (a_a b_b \dots n_n)$.
76. Zeug von Größen erster Klasse ist eine Vielfachensumme nter Klasse, soweit die Zeuge $\sum 0$.
77. Innere Webung: $e_a e_b = 0$; $e_a e_a = 1$.
78. Aeusere Webung: $e_a e_b \sum 0$; $e_a e_b e_c \sum 0$.

79. Flachung: $e_a e_b + e_b e_a = 0$ oder $e_a e_b = -e_b e_a$, $e_a e_a = 0$.

80. Flechtung: $e_a e_b = e_b e_a$; $e_a e_a \neq 0$.

Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

81. Flach, Flachung, Zeichen $\{abc \dots\}$.

82. $\{e_1 e_2 e_3 \dots\} \geq 0$.

83. $\{Ee_1 e_2\} + \{Ee_2 e_1\} = 0$.

84. Für Fläche gilt Einigung und Beziehung der Größen, Vertauschung der Zahlen.

85. Für Fläche gelten alle Gesetze 70 bis 76.

86. $\{Abc\} + \{Ac b\} = 0$ wo b, c Größen erster Klasse.

87. $\{AbcD\} + \{Ac bD\} = 0$ wo b, c Größen erster Klasse.

88. $\{P_a, b\} + \{P_b, a\} = 0$ oder $\{P_a, b\} = -\{P_b, a\}$.

89. $\{AB_r C_s\} = (-1)^{rs} \{AC_s B_r\}$ wo B ein Zeug von r , C eins von s Flächen erster Klasse.

90. $\{A_q B_r C_s\} = (-1)^{q(r+s) + rs} \{C_s B_r A_q\}$.

91. $\{P\} = (-1)^r \{Q\}$ wo r die Anzahl der Fachpare erster Klasse, welche in P und Q entgegengesetzt geordnet sind.

92. $\{P_a, a\} = 0$ das Flach mit zwei gleichen Flächen ist Null.

93. $\{a_1 a_2 \dots a_n\} = 0$ wenn $a_m = \sum_{i,m-1}^S \alpha_i a_i + \sum_{m+1,n}^S \alpha_i a_i$.

94. $\{(\sum \alpha_a a_a)(\sum \beta_b b_b) \dots (\sum \mu_m m_m)\} = S(\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) \{a_a b_b \dots m_m\}$.

95. $\{(\sum \alpha_a a_a)(\sum \beta_b b_b) \dots (\sum \mu_m m_m)\} = S(\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) \{a_a b_b \dots m_m\}$.

96. Flachtausche oder Determinante \mathcal{A}^m aus m Reihen von je m Zahlen $\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m$ wo jedes Glied mit $(-1)^r$ vervielfacht, wo r die Zahl der niedern Zeiger, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

97. $\mathcal{A}^m = S_{1,n} (-1)^r \alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m$, wo r die Zahl der niedern Zeiger, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

98. Geschiedsfläche aus n Größen zur m ten Klasse $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}^m$ find die Fläche aus m Größen, wenn jede nur mit den folgenden geflacht. (Anzahl n^m).

99. Die Geschiedsfläche find die Ausgeschiede, jedes als Flach betrachtet.

100. $\{(\sum \alpha_a a_a)(\sum \beta_b b_b) \dots (\sum \mu_m m_m)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^m \cdot \mathcal{A}^m$.

101. $\{(\sum \alpha_a a_a)(\sum \beta_b b_b) \dots (\sum \nu_n n_n)\} = \mathcal{A}^n \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

102. Wenn $\{b_1 b_2 \dots b_n\} = 0$, so giebt es ein $b_m = \sum_{i,m-1}^S \beta_i b_i + \sum_{m+1,n}^S \beta_i b_i$.

103. Sämmtliche Gesetze der Flachung gelten, wenn statt der Einheiten a_1, a_2, \dots, a_n n beliebige gegenseitig freie Größen b_1, b_2, \dots, b_n als neue Einheiten genommen werden.

104. Wenn $Z_b = S_{1,n} \alpha_a x_a$ und $x_a = S_{1,n} \beta_c y_c$ auch $Z_b = S_{1,n} \beta_c y_c$, so ist $\beta_c y_c = \beta_{\alpha_1} \beta_c + \beta_{\alpha_2} \beta_c + \dots + \beta_{\alpha_n} \beta_c$.

105. Wenn $\{Z_1 Z_2 \dots Z_n\} = \mathcal{A}_{\alpha}^n \{x_1 x_2 \dots x_n\}$ und $\{x_1 x_2 \dots x_n\} = \mathcal{A}_{\beta}^n \{y_1 y_2 \dots y_n\}$ auch

$$\{Z_1 Z_2 \dots Z_n\} = \mathcal{A}_{\gamma}^n \{y_1 y_2 \dots y_n\}, \text{ so ist } \mathcal{A}_{\alpha}^n \cdot \mathcal{A}_{\beta}^n = \mathcal{A}_{\gamma}^n.$$

106. Wenn $\alpha A + \beta B + \dots = 0$, wo A, B, \dots Geschiedsfläche freier Größen, so ist $\alpha = 0, \beta = 0, \dots$ d. h. A, B, \dots sind gegenseitig frei.

107. $[a_1 a_2 \dots a_m] \cong [b_1 b_2 \dots b_m]$ dann und nur dann, wenn stets $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m$ gesetzt werden kann, welche Werte auch $x_1 \dots x_m$ haben mögen.
108. Einfache GröÙe mter Klasse $= [b_1 b_2 \dots b_m]$; zusammengesetzte.
109. $[b_1 b_2 \dots b_m] =$ einfache GröÙe mter Klasse.
110. Linige Aenderung, einfache, mehrfache.
111. $[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_1 a_2 \dots (a_m + a_{m+1}) \dots a_n] = [a_1 a_2 \dots (a_{m-1} + a_m) \dots a_n]$.
112. $[a_1 \dots a_n] = [(a_1 + a_m) a_2 \dots a_n]$.
113. Wenn $[abc \dots m] = [ABC \dots M] \geq 0$, so lassen sich die GröÙen $a, b, c, \dots m$ durch linige Aenderung in $A, B, C, \dots M$ umwandeln.
114. $[a_1 a_2 \dots a_n] = \left[a_1 a_2 \dots (a_n) \dots \binom{a_m}{\alpha} \dots a_n \right]$.
115. $[(a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots)] = [a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots]$.
116. $[A(BC)] = [ABC]$.
117. $A * [BC]$ * wenn $A \geq B$ und $B \geq 0$.
118. $(S_{a,b,c,\dots}^{\alpha} [a_a a_b a_c \dots])(S_{m,n,o,\dots}^{\beta} [b_m b_n b_o \dots])$
 $= S_{a,b,c,\dots,m,n,o,\dots}^{\alpha, \beta} [a_a a_b a_c \dots b_m b_n b_o \dots]$.
119. Jedes Flach, welches zwei gleiche Fache erster Klasse hat, ist Null.
120. Jedes Flach, wo ein Fach zu einem andern Fache erster Klasse hörig, ist Null.
121. Wenn $[A \cdot B] = 0$ und $0 \cdot A \cdot B = 0$, so ist $A = 0$ und $B = 0$.
122. Wenn $[aS] = 0$, so ist $S = [aP]$.
123. Wenn $0 = [a_a S]$ von $a = 1$ bis $a = m$, so ist $S = [a_1 a_2 \dots a_m S_m]$.
124. Wenn $0 = [a_a S]$ von $a = 1$ bis $a = m$, wo S eine Summe mter Klasse, so ist $S = n[a_1 a_2 \dots a_m]$.
125. Wenn $0 = [a_a S]$ von $a = 1$ bis $a = m + 1$, wo S eine Summe mter Klasse, so ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 a_2 \dots a_{m+1}] = 0$.

Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modulungslehre.

126. Hauptgebiet H nter Stufe, $\begin{bmatrix} p \\ \end{bmatrix}$ heist ein Modulflach oder Enflach,
 $\begin{bmatrix} p \\ c_1 c_2 \dots c_n \end{bmatrix} = 1$.
127. Ergänzung der Einheit E ist \overline{E} , gelesen Nicht E .
128. $\begin{bmatrix} p \\ EE \end{bmatrix} = 1$.
129. $\overline{\overline{E}} = E$; aber, wenn n gerade und zugleich m die Klasse von E ungerade, so ist $\overline{\overline{E}} = -E$.
130. $\overline{A} = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots) = \alpha_1 \overline{E}_1 + \alpha_2 \overline{E}_2 + \dots$.
131. Klasse von \overline{E} ist $n - m$, wenn die von E m ist.
132. $\overline{\overline{A}} = A$; aber wenn n gerade und zugleich m die Klasse von A ungerade, so ist $\overline{\overline{A}} = -A$.
133. Fortschreitendes Flach $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix}$, wo $\alpha + \beta < n$; $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix} = [EF]$.
 Rückschreitendes Flach $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix}$, wo $\alpha + \beta > n$; $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix} = [\overline{EF}]$.
 Stehendes Flach $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix}$, wo $\alpha + \beta = n$; $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix} = \pm 1$. $\begin{bmatrix} p \\ EF \end{bmatrix} = \pm 1$.

134. Modellsomme oder Enfsomme $\overset{n}{\alpha} + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma - an$, wo $\overset{n}{\alpha} + \beta + \gamma < n$.
135. Wenn $\alpha + \beta > n$, so $A = [CA_1]$ und $B = [CB_1]$ wo $\alpha + \beta = n + \gamma$.
136. Summe einfacher Größen ($n - 1$) Klasse ist eine einfache Größe ($n - 1$)ter Klasse.
137. Das stehende Modellfläch ist $= \pm 1$, eine Größe 0ter Klasse $\overset{n}{\alpha} + \beta = 0$ und ist $[EF]$ wie $[\overline{EF}]$ stehend.
138. $\overline{E} \equiv [EFF]$ * wo $EF = \pm [e_1 e_2 \dots e_n]$.
139. Für rückschreitende Modellfläche ist $\overline{[EF]} = [\overline{EF}]$.
140. $\alpha + \beta + \dots = an + (\alpha + \beta + \dots)$.
141. Für alle Modellfläche gilt das Beziehungsgesetz.
142. Das Enfläch $[AB] = 0$ nur dann, wenn darin ein Fach erster Klasse 2mal öfter vorkommt als jede andere Einheit erster Klasse.
143. Für fortschreitende Modellfläche gelten alle Gesetze der Flächung.
144. Für fortschreitendes Modellfläch $[EF]$ ist $[\overline{EF}]$ rückschreitend.
145. Wenn $C = [AB]$, so ist $\gamma = (\alpha + \beta)$.
146. Wenn $R = [ABC \dots]$, so ist $\varrho = (\alpha + \beta + \gamma + \dots)$.
147. $\overline{[AB]} = [\overline{AB}]$.
148. $\overline{[ABC \dots]} = [\overline{A} \overline{B} \overline{C} \dots]$.
149. $\overline{[abc \dots]} = [\overline{a} \overline{b} \overline{c} \dots]$.
150. $\overline{[A \pm B \pm C \pm \dots]} = \overline{A} \pm \overline{B} \pm \overline{C} \pm \dots$.
151. Wenn $f_\alpha(A, B, \dots) = \varphi_\alpha(A', B', \dots)$, so ist auch $f_\alpha(\overline{A}, \overline{B}, \dots) = \varphi_\alpha(\overline{A'}, \overline{B'}, \dots)$.
152. Jeder Satz, der für Größen mter Klasse gilt, gilt auch für Größen ($n - m$)ter Klasse.
153. $[EF(EG)] \equiv [EFG \cdot E]$ * wo die Klassen $\alpha + \beta + \gamma = n$.
154. $[AB(AC)] \equiv [ABC \cdot A]$ * wo $\alpha + \beta + \gamma = n$ und A, B, C einfach.
155. $[AB(AC)] \equiv [ABC \cdot A]$ * wo $\alpha + \beta + \gamma = n$ und A einfach.
156. $[AB(AC)] \equiv [ABC \cdot A]$; $[AB(BC)] \equiv [ABC \cdot B]$; $[AC(BC)] \equiv [ABC \cdot C]$
* wo $\alpha + \beta + \gamma = an$ und A, B, C einfach.
157. $[A(BC)] \equiv [AC \cdot B]$; $[\overline{CB} \cdot A] \equiv [\overline{CA} \cdot B]$ * wo $\alpha + \beta = n$, A, B, C einfach und $B < A$.
158. $[AB] \geq 0$ dann und nur dann, wenn, sofern σ die Stufenzahl des verbindenden und γ die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, bei $\alpha + \beta \leq n$ auch $\alpha + \beta = \sigma$, d. h. $\gamma = 0$, bei $\alpha + \beta > n$ auch $\sigma = n$, d. h. $\gamma = (\alpha + \beta)$.
159. Nein $A \overline{A}$; $\overline{A} \equiv [AA' A']$ * wo $[AA'] = \pm [a_1 a_2 \dots a_n]$.
160. Alle Modulungsgesetze gelten, wenn beliebige Größen erster Klasse, deren Enfläch eins ist, als Einheiten $\overline{[]}$ gesetzt werden.

161. Wenn $1 = [a_1 a_2 \dots a_n] = [PP'] = [AA'] = [BB'] = \dots$ und $P = [ABC \dots]$, so ist $P' = [A'B'C' \dots]$.
162. Wenn $1 = [a_1 a_2 \dots a_n]$ und $A_r = [a_1 \dots a_{r-1} \cdot a_{r+1} \dots a_n]$, so ist
 $[A_n \dots A_{m+1}] = [a_1 \dots a_m]$ * wo A_n das Geschiedsflach aus $(n-1)$ Größen, in dem a_n fehlt.
163. $[AB] \cdot [AD_1 F_1] + [AD_2 F_2] + \dots$ * wo $[F_n D_n] = B$ und $\alpha + \delta_n = n$.
164. Reines Modellflach; gemischtes Modellflach.
165. Wenn $[ABC \dots]$ fortschreitend, so $[\overline{A} \overline{B} \overline{C}]$ rückschreitend und umgekehrt.
166. $[ABC \dots M]$ ist, wenn $\alpha + \beta + \gamma + \dots \leq n$ ist, rein fortschreitend, wenn $\alpha + \beta + \gamma + \dots \geq n(m-1)$ ist, rein rückschreitend, wenn $\alpha + \beta + \gamma + \dots > n$ und $< n(m-1)$ ist, gemischt.
167. Beim fortschreitenden Enflach ist die Klasse $\varphi = \alpha + \beta + \gamma + \dots$; nur wenn $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 0$, so ist $\varphi = 0$.
 Beim rückschreitenden Enflach ist $\varphi = \alpha + \beta + \gamma + \dots - (m-1)n$.
168. Beim fortschreitenden Enflach ist $\circ\varphi = \circ\delta$, beim rückschreitenden $\circ\varphi = \circ\gamma$.
169. $[A(BC)] = [ABC]$, wenn $[ABC]$ ein reines Enflach.
170. Wenn $P = [AB \cdot G]$ reines Enflach und $A = [a_1 a_2 \dots a_q]$, $B = [a_{q+1} \dots a_r] \cdot$
 $G = [a_{s+1} \dots a_t]$ und a_1, \dots, a_t Größen 1 oder $(n-1)$ ter Klasse, so ist
 $P = [a_1 a_2 \dots a_t]$.
171. $P = [ABC \dots]$ ist nur dann ≥ 0 , wenn beim fortschreitenden Enflach $\varphi = \delta = \alpha + \beta + \dots$, und wenn beim rückschreitenden $\varphi = \gamma = \alpha + \beta + \dots - (m-1)n$.
172. $P_{A,B} = P_{B,A}$, wenn P reines Enflach.
173. $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Enflach und $A > B$ oder $A < B$.
174. $[ABC] = 0$, wenn entweder $[AB] = 0$ oder A, B, C im Gebiete $n - \zeta$.
175. $[ABC] = [ACB]$, wenn $B \leq C$.
176. $[ABC] = (-1)^{\delta\gamma} [ACB]$, wenn $\alpha + \beta + \gamma \leq n$
 $= (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)} [ACB]$, wenn $\alpha + \beta + \gamma \geq 2n$
 $= (-1)^{(\beta-1)(\gamma-1)} [ACB]$, wenn $\alpha + \beta + \gamma = n + t$, wo $t < n$.
177. Aufzählung der Fälle, wo $[ABC] \cong [ACB] \cong [BAC] \cong [B \cdot AC]$.
178. $[A_1 A_2 \dots A_{n-1} \cdot A_n] \cong [A_n (A_{n-1} \cdot (\dots (A_2 \cdot A_1)))]$
 $\cong [A_1 \dots A_{n-r-1} \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_{n-r}))]$
 wenn $[A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n]$ ein Enflach der Klasse Null.
179. Zurückleitung A' einer Vielfachensumme von Geschiedsflächen beliebiger Klasse A auf das Gebiet $[a_1 \dots a_m]$ mit Ausschluss von $[a_{m+1} \dots a_n]$. Fortschreitend, wenn $a_1 \dots a_n$ Größen erster, rückschreitend, wenn sie Größen $(n-1)$ ter Klasse sind.

180. Sei m die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet, p die Klasse der Geschiedsfläche, f_0 ist die Zurückleitung fortschreitend, wenn $m \geq p$, rückschreitend, wenn $m < p$.
181. Sei A' die Zurückleitung von A auf das Gebiet B mit Ausschluss von C , f_0 ist $A' = \frac{[B(AC)]}{[BC]}$ und ist $A' = [B(AC)]$, wenn $[BC] = 1$.
182. Wenn $P = \alpha A + \beta B + \dots$, wo α, β, \dots Zahlen, und P', A', B' ihre Zurückleitungen auf das Gebiet M find, f_0 ist $P' = \alpha A' + \beta B' + \dots$.
183. Wenn $P = [A \cdot B \cdot \dots \cdot E]$ reines Enflach und $P', A', B', \dots E'$ die Zurückleitungen auf das Gebiet M find (auch die Zurückleitungen fortschreitend genommen find, wenn $[A \cdot B \cdot \dots \cdot E]$ fortschreitend ist, dagegen rückschreitend, wenn dies rückschreitend ist), f_0 ist $P' = [A' B' \dots E']$.
184. Das reine Enflach von Größen 1 oder $(n-1)$ ter Klasse ist ein Einheitsflach dieser Größen.
185. Gleichung, deren Glieder $(m-1)$ ter Klasse im Engebiets ist, lässt sich durch Zahlgleichungen ersetzen.

Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

186. Das Innenzeug (innere Produkt) zweier Einheiten E und F ist $E \times F = [E\bar{F}]$.
187. $[E_r \bar{E}_r] = 1$, $[F_r \bar{E}_s] = 0$.
188. $[E\bar{F}] \geq 0$ dann und nur dann, wenn $E < F$ oder $F < E$ ist.
189. $[E\bar{F} \cdot \bar{E}] = F$ und $[F \cdot \bar{(EF)}] = \bar{E}$, wenn E und F Einheiten und $[EF] \geq 0$.
190. Wenn E, F, G Einheiten und $[EF] \geq 0$ und $[EG] \geq 0$, f_0 ist
 $[E\bar{F}(\bar{E}G)] = [F\bar{G}]$ wenn F von gleicher oder höherer Klasse als G .
 $[F\bar{E}(\bar{G}E)] = [F\bar{G}]$ wenn G von gleicher oder höherer Klasse als F .
191. Das Innenzeug zweier Größen ist $A \times B = [A\bar{B}]$.
192. $[A\bar{B}] = [B\bar{A}]$, sofern B von höherer Klasse als A ; aber $[A\bar{B}] = -[B\bar{A}]$ wenn die Klasse von B gerade, die von A ungerade.
193. Die Klasse von $[A\bar{B}]$ ist $\alpha - \beta$, wenn $\beta \leq \alpha$, dagegen $\alpha + n - \beta$, wenn $\beta > \alpha$.
194. Die Anzahl der Einheiten, deren Vielfachensumme das Innenzeug $A \times B$ ist, ist $n^{\alpha - \beta}$, wenn $\beta \leq \alpha$, dagegen $n^{\beta - \alpha}$, wenn $\beta > \alpha$.
195. Das Innenzeug zweier Größen gleicher Klasse ist eine Zahl.
196. $[(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)(\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m)] = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m$, wo $E_1 \dots E_m$ Einheiten gleicher Klasse.
197. $[A\bar{B}] = [B\bar{A}]$, wenn A und B gleicher Klasse.
198. Das Innenquader von A ist $A^2 = [A\bar{A}]$.
199. $(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2$.
200. Zahlwert von A ist $(A^2)^{1/2}$. Zahlwertig gleich find A und B , wenn $A^2 = B^2$.

201. Normig ist A zu B, wenn $\overset{P}{[A\overline{B}]} = 0$, wo $A \geq 0$ und $B \geq 0$.
Allseitig normig sind zwei Gebiete, wenn jede GröÙe erster Klasse des einen normig zu jeder des andern ist.
202. Normverein nter Stufe ist ein Verein von n zahlwertig gleichen GröÙen erster Klasse. Vollständiger. Einfacher (dessen Zahlwert 1).
203. Der Verein der ursprünglichen Einheiten ist ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte eins.
204. Kreifeländerung um den Winkel α ist, wenn sich a in $xa + yb$ und b in $\pm(xb - ya)$ verwandeln, wo $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ und a und b zahlwertig gleich und normig.
205. Jeder Normverein kann durch Kreifeländerung in einen zahlwertig gleichen verändert werden.
206. Das Enflach der GröÙen eines Normvereins bleibt durch positive Kreifeländerung unverändert, wird durch negative Kreifeländerung entgegengesetzt.
207. Die GröÙen eines Normvereins sind gegenseitig frei und jede GröÙe erster Klasse lässt sich als eine Vielfachensumme der GröÙen eines beliebigen vollständigen Normvereins darstellen.
208. Eine GröÙe A, welche zu mehreren GröÙen gleicher Stufe B, C, ... normig ist ist auch zu jeder Vielfachensumme dieser GröÙen normig.
209. Alle GröÙen, welche zu m GröÙen normig sind, gehören zu dem Gebiete der n - m andern GröÙen des Normvereins.
210. Jeder Normverein kann durch Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass statt a_i die GröÙe $c = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ eintritt, sofern $a_i^2 = c^2$.
211. Je zwei Normvereine von gleichem Gebiete gleicher Stufe und gleichem Zahlwerte können in einander umgewandelt werden.
212. In jedem Gebiete kann man einen Normverein gleicher Stufe mit beliebigem Zahlwerte aufstellen.
213. Normige Zurückleitung auf Gebiet B unter Ausschluss von \overline{B} .
214. A' sei normige Zurückleitung von A, so ist $A' = \frac{\overset{P}{[B(A\overline{B})]}}{B^2}$.
215. $A' = * \cdot \frac{\overset{P}{[A\overline{B}B]}}{B^2}$ * wenn $\alpha = \beta$.
216. $\overline{A} = * \cdot \frac{\overset{n}{[A\overline{B}B]}}{1}$ * wenn $\overset{P}{[AB]}$ die n GröÙen des Normvereins enthält, und dieser = 1.
217. Alle Sätze bleiben gültig, wenn statt $\overset{P}{[c_1 c_2 \dots c_n]}$ auch $\overset{P}{[a_1 a_2 \dots a_n]} = 1$ gesetzt.
218. Die Gleichungen $\overset{P}{[a_r \overline{a_s}]} = 0$, wo $r \geq s$ und $\overset{P}{[a_r \overline{a_r}]} = 1$ gelten, wenn $\overset{P}{[a_1 a_2 \dots a_n]}$ ein vollständiger Normverein.
219. $\overset{P}{[a\overline{b}]} = \overset{P}{[b\overline{a}]}$.
220. $\overset{P}{[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots)(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots)]} = \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \dots$, wo a_1, a_2, \dots normig.
221. $\overset{n}{[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots)(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots)]} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots$, wo a_1, a_2, \dots einfach normig.

$$222. (a_1 + a_2 + \dots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots, \text{ wo } a_1, a_2, \dots \text{ normig.}$$

$$223. (a + b)^2 = a^2 + 2[a\bar{b}] + b^2.$$

$$224. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b\bar{c}] + 2[c\bar{a}] + 2[a\bar{b}].$$

$$225. \begin{cases} [AB(\overline{AC})] = A^2[B\bar{C}] \\ [CA(\overline{BA})] = A^2[C\bar{B}] \end{cases} \quad \text{wo B und A allseitig normig und } \gamma \leq \beta.$$

$$226. [A\bar{B}] = [A\bar{B}'] \text{ und } [B\bar{A}] = [B'\bar{A}], \text{ wo } B' \text{ normige Zurückleitung von B auf A.}$$

$$227. [A\bar{B}] = \alpha\beta', \text{ wenn } A = \alpha E \text{ und die Zurückleitung von A auf B gleicher Stufe } = \beta' E.$$

$$228. B \text{ ist das ergänzende Geschiedsflach zu A, wenn } [AB] = [a_1 a_2 \dots a_n].$$

$$229. \begin{cases} [A\bar{B}(\overline{AB})] = [A\bar{A}(\overline{B\bar{B}})] + [A_1\bar{A}(\overline{B_1\bar{B}})] + \dots \\ [B_1\bar{A}(\overline{AB})] = [B_1\bar{B}(\overline{A\bar{A}})] + \dots \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} A = \alpha, B = \beta \text{ und } [AB] \geq 0, \text{ auch} \\ B, B_1, \dots \text{ die Ergänzung zu A, A}_1, \dots \end{array} \right\}$$

$$230. S[A_1\bar{A}(\overline{B_1\bar{B}}) \dots (L_1\bar{L})(M_1\bar{M})] \text{ die Summe, wo } \alpha_a = \alpha = A, \beta_b = \beta = B \dots$$

$$\mu_m = \mu \geq M \text{ und } [AB \dots M] \geq 0.$$

$$231. [AB \dots LM(\overline{AB \dots LM})] = S[A_1\bar{A}(\overline{B_1\bar{B}}) \dots (L_1\bar{L})(M_1\bar{M})] \text{ wo Alles wie in 229.}$$

$$232. [AB \dots (\overline{AB \dots})] = \frac{[A'B' \dots]}{[AB \dots]}, \text{ wo } \alpha' = \alpha = A, \beta' = \beta = B \dots \text{ und}$$

$$A' = S[A_1\bar{A}_1 A_2 \dots]$$

$$233. [abc \dots (\overline{a'b'c' \dots})] = A \left\{ \begin{array}{l} [a\bar{a}'] [a\bar{b}'] [a\bar{c}'] \dots = S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) \\ [b\bar{a}'] [b\bar{b}'] [b\bar{c}'] \dots \text{ wo } \alpha_1 = [a\bar{a}'], \alpha_2 = [a\bar{b}'] \dots \\ [c\bar{a}'] [c\bar{b}'] [c\bar{c}'] \dots \quad \beta_1 = [b_1\bar{a}'], \beta_2 = [b_1\bar{b}'] \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right.$$

$$234. [a\bar{b}(\overline{a'b'})] = [a\bar{a}'(\overline{b\bar{b}})] - [a\bar{b}'(\overline{a'\bar{b}})].$$

$$235. [a\bar{b}]^2 = a^2 b^2 - [a\bar{b}]^2.$$

$$236. [a\bar{b}c]^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2 [b\bar{c}]^2 - b^2 [c\bar{a}]^2 - c^2 [a\bar{b}]^2 + 2[a\bar{b}(\overline{bc})(c\bar{a})].$$

$$237. [abcd]^2 = A \left\{ \begin{array}{l} a^2, [a\bar{b}], [a\bar{c}], [a\bar{d}], [b\bar{a}], b^2, [b\bar{c}], [b\bar{d}], \\ [c\bar{a}], [c\bar{b}], c^2, [c\bar{d}], [d\bar{a}], [d\bar{b}], [d\bar{c}], d^2. \end{array} \right.$$

$$238. [a\bar{b}c] = [a\bar{c}b] - [b\bar{c}a].$$

$$239. [abc\bar{d}] = [a\bar{d}(\overline{bc})] + [b\bar{d}(\overline{ca})] + [c\bar{d}(\overline{ab})].$$

$$240. [abcde] = [a\bar{e}(\overline{bcd})] + [b\bar{e}(\overline{cad})] + [c\bar{e}(\overline{abd})] + [d\bar{e}(\overline{cba})].$$

$$241. [A\bar{B}] + [A_1\bar{B}_1] + \dots = 0, \text{ wo } \alpha = \alpha_a, \beta = \beta_b = n - \alpha.$$

$$242. [a\bar{b}(\overline{cd})] + [a\bar{c}(\overline{db})] + [a\bar{d}(\overline{bc})] = 0.$$

$$243. [a\bar{b}c] + [b\bar{c}a] + [c\bar{a}b] = 0.$$

$$244. [abc\bar{d}] - [bcd\bar{a}] + [cda\bar{b}] - [dab\bar{c}] = 0.$$

245. ${}^p[AA'] + {}^p[B\bar{B}'] + \dots = 0$, wo $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 2m$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = \dots = 2m$ und A, B, C, \dots, a_1 als Fach enthalten und ${}^p[AA'] = {}^p[a_1 a_2 \dots a_{1m}]$.

246. Cosinus des Winkels AB ; $\cos \angle AB = \frac{{}^p[A\bar{B}]}{\alpha\beta}$,
 wo A, B gleicher Klasse, α, β ihre Zahlwerte und $\angle AB = M[0, \pi]$
 $(\sin {}^p[abc\dots])^2 = \frac{{}^p[abc\dots]^2}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \dots}$ $\sin {}^p[abc\dots] \geq 0$.

247. $\sin {}^p[ab] = \sin \angle ab$ wenn a, b erster Klasse.

248. ${}^p[A\bar{B}] = \alpha\beta \cos \angle AB$, wo A und B gleicher Klasse, α, β ihre Zahlwerte.

249. ${}^p[ab]^2 = (\alpha\beta \sin \angle ab)^2$.

250. ${}^p[ab(\bar{c}d)] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle ab)(\sin \angle cd)(\cos \angle ab(cd))$.

251. Normige Zurückleitung von A auf B gleicher Klasse $= A \cos \angle AB$.

252. $\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots$, wo a, b, \dots normig, α, β, \dots ihre Zahlwerte, auch k als Vielfachenfumme zu a, b, \dots hörig.

253. $\cos \angle kl = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$, wo a, b, c, \dots normig, und k, l als Vielfachenfumme zu ihnen hörig.

254. Wenn alle Zurückleitungen normig, so kann man statt k auf l auch k auf a, b, \dots zurückleiten, diese a, b, \dots auf l zurückleiten und fügen.

255. $0 = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$, wo alle normig und k und l Vielfachenfummen von a, b, \dots .

256. $1 = (\cos \angle ka)^2 + (\cos \angle kb)^2 + \dots$, wo k Vielfachenfumme von a, b, \dots die normig.

257. Wenn $a + b + \dots = 0$, und α, β, \dots ihre Zahlwerte, so ist

1. $\alpha : \beta : \dots = \sin a' : \sin b' : \dots$, wo a', b', \dots die Ergänzung zu a, b, \dots ,

2. $\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \dots = 0$, wo x eine beliebige Größe,

3. $(\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \dots = 0$.

258. $(a + b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \angle ab + \beta^2$.

259. $(a + b + c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \angle bc + 2\gamma\alpha \cos \angle ca + 2\alpha\beta \cos \angle ab$.

260. $(\sin \angle AB)(\sin \angle AB) \cos \angle AB(AB) = S(\cos \angle A_r A) \cos \angle B_r B$, wo die Klassen von A und A_r gleich und B_r die ergänzenden Geschiedsfläche zu A_r find.

261. $(\sin {}^p[abc\dots])(\sin {}^p[a'b'c'\dots]) \cos \angle abc\dots a'b'c'\dots = \begin{cases} \cos \angle aa', \cos \angle ab', \dots \\ \cos \angle ba', \cos \angle bb', \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$

262. $(\sin {}^p[ab])(\sin {}^p[cd]) \cos \angle ab(cd) = (\cos \angle ac) \cos \angle bd - (\cos \angle ad) \cos \angle bc$.

263. $(\sin {}^p[ab])(\sin {}^p[ac]) \cos \angle ab(ac) = \cos \angle bc - (\cos \angle ac) \cos \angle ab$.

264. $(\sin \angle ab)^2 = 1 - (\cos \angle ab)^2$.

265. $(\sin \angle abc)^2 = 1 - (\cos \angle bc)^2 - (\cos \angle ca)^2 - (\cos \angle ab)^2 + 2(\cos \angle ab)(\cos \angle bc) \cos \angle ca$.

$$266. (\sin^p[ab])(\sin^p[cd])\cos \angle ab(cd) + (\sin^p[ac])(\sin^p[bd])\cos \angle ac(bd) \\ + (\sin^p[ad])(\sin^p[bc])\cos \angle ad(bc) = 0.$$

$$267. (\sin A)(\sin A')\cos \angle AA' + (\sin B)(\sin B')\cos \angle BB' + \dots = 0,$$

wo A, B, C, ... die Geschiedsfläche aus 4n Größen zur 2n Klasse und A', B', C', ... deren ergänzende Geschiedsfläche sind.

Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

$$268. \text{Auflösung von } m \text{ Gleichungen ersten Grades mit } m \text{ Unbekannten.}$$

$$\text{Gegeben } \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \dots + \mu_1 x_m = \nu_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \dots + \mu_2 x_m = \nu_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \dots + \mu_m x_m = \nu_m,$$

$$\text{so ist } x_1 = \mathcal{A}^m(\nu_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \mu_m) : \mathcal{A}^m(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \mu_m)$$

$$x_2 = \mathcal{A}^m(\alpha_1 \nu_2 \gamma_3 \dots \mu_m) : \mathcal{A}^m(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \mu_m)$$

$$\vdots$$

$$x_m = \mathcal{A}^m(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \lambda_1 \nu_m) : \mathcal{A}^m(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \dots \mu_m).$$

$$269. \text{Entfernung aller } m \text{ Unbekannten aus } m \text{ Gleichungen ersten Grades.}$$

$$\text{Gegeben } \nu_0 + \alpha_0 x_1 + \beta_0 x_2 + \dots + \mu_0 x_m = 0$$

$$\nu_1 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \dots + \mu_1 x_m = 0$$

$$\vdots$$

$$\nu_m + \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \dots + \mu_m x_m = 0,$$

so ist $\mathcal{A}^{m+1}(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m \nu_n) = 0$, wo die Zeiger a, b, ... n sämtlich einander ungleich sind, die Gleichung, wo alle Unbekannte entfernt sind.

$$270. \text{Entfernung einer Unbekannten aus 2 Gleichungen } m \text{ ten und } n \text{ ten Grades.}$$

$$\text{Gegeben } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = 0$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = 0,$$

so ist $\left[\begin{smallmatrix} m+n \\ u_1 u_2 \dots u_{m+n} \end{smallmatrix} \right] = 0$ die Gleichung, wo x entfernt ist und in welcher $u_a = a_{a-1} e_1 + a_{a-2} e_2 + \dots + a_0 e_a + b_{a-1} e_{n+1} + b_{a-2} e_{n+2} + \dots + b_0 e_{n+a}$ und e_1, e_2, \dots, e_{m+n} sämtlich gegenseitig freie Einheiten.

Formelbuch

der

Erweiterungslehre.



Vierter Zweig

der

Formenlehre oder Mathematik.



1875

1875

1875

1875

1875

1875

1. Die Flechtung.

1. Flecht $ab =$ Flecht a mal b . e Einheiten, a, b, c, \dots Größen erster Klasse, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Zahlen.
2. $e_a e_a \geq 0$ $e_a e_b e_c \geq 0$.
3. $e_r(e_s e_t) = e_r e_s e_t$ $e_r e_s = e_s e_r$.
4. Einheit nter Klasse $e_1 e_2 e_3 \dots e_n$, Größe nter Klasse $abc \dots n$.
5. Für die Flechte gelten alle Gesetze der Verwebung.
6. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b) \dots (S\mu_m m_m) = S(\alpha_a \beta_b \dots \mu_m)(a_a b_b \dots m_m)$.
7. Das Flecht von n Größen erster Klasse $=$ Vielfachenfumme von Einheiten nter Klasse.
8. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b) \dots (S\mu_m m_m) = S(\alpha_a \beta_b \dots \mu_m)(a_a a_b \dots a_m)$.
9. Flechttausche Demutante $D^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)$.
10. Die Flechte mit m Fachen aus n Größen $=$ Geschiedsflechte aus n Größe zur m ten Klasse.
11. Die Geschiedsflechte aus n Größe zur m ten Klasse sind Vollgeschiede aus n Größe zur m ten Klasse.
12. $(S\alpha_a a_a)(S\beta_b b_b) \dots (S\mu_m m_m) = SD^m \dots (a_r a_s a_t \dots)$ wo $r \leq s \leq t \leq \dots$
13. Wenn $AB = 0$ und $A \geq 0$, so ist $B = 0$.
14. Wenn $AB = AC$ und $A \geq 0$, so ist $B = C$.
15. $A : B \cdot B = A$.
16. $AB : B = A$.
17. Alle Gesetze fürs Teilen gelten auch für die Flechte.

2. Die Hauptformeln und Hauptgrößen.

18. Zahlgröße αe . Hauptgröße $S\alpha_a a_a$.
19. Wenn $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ist, so ist $y = f([\overline{x e_1}], [\overline{x e_2}], \dots, [\overline{x e_n}]) = q x$ wo e_1, e_2, \dots, e_n ein einfacher Normverein.
20. Wenn $y_a = f_a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, auch e_1, \dots, e_n und e_1, \dots, e_m einfacher Normverein, so ist $y = F(x) = e_1 \varphi_1 x + e_2 \varphi_2 x + \dots + e_m \varphi_m x$ wo $\varphi_a x = f_a([\overline{x e_1}], [\overline{x e_2}], \dots, [\overline{x e_n}])$.
21. Wenn alle Größen Vielfachenfummen von e_1, \dots, e_n , so lässt sich jeder Verein von Folgen derselben als n Folge einer veränderlichen Größe darstellen.

3. Die Lückenzeuge und die Lückenausdrücke.

22. Erklärung. N -Lückenzeng $Pl^n(x_1, \dots, x_n) = Pl^n 0(x_1 x_2 \dots x_n) : n!$
Z. B.: $Pa_1 la_2 la_3$ giebt $Pl^3(x_1 y) = (a_1 x a_2 y a_3 + a_1 y a_2 x a_3)2$.
23. $Pl^n(x_1 x_2 \dots x_n) = Pl^n 0(x_1 x_2 \dots x_n) : n!$
24. $Pl^n x^n = P x x \dots x$.

25. $Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n x^m) = \frac{Pl^{n+m} 0(x_1 x_2 \dots x_n x^m)}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}$.
26. $\left\{ \begin{array}{l} Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n) \\ Pl^{n+m}(x_1 x_2 \dots x_n)^m \end{array} \right. = \frac{Pl^{n+m} 0(x_1 x_2 \dots x_n)^m}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}$.
27. $Pl^m x = \frac{Pl^m 0(x)^m}{m}$.
29. N-Lückenausdruck = Vielfachensumme von N-Lückenzeugen.
30. Wenn $e_0, e_1 \dots$ einfacher Normverein und $x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \dots$.
31. Auch $A = S\alpha_a \bar{e}_0^r \dots [\bar{e}_1]^s [\bar{e}_2]^b \dots$ wo $r + s + b + \dots = n$ so ist $S\alpha_a \bar{e}_0^r \dots x_1^s x_2^b \dots = Ax^n$ wo A ein N-Lückenausdruck.
32. $A(x_1 x_2 \dots x_n) = Ax_1 x_2 \dots x_n$.
33. In $Ax_1 x_2 \dots x_n$ wo $A = Pl^{n+m}$, kann man in $x_1 x_2 \dots x_n$ beliebig Klammern setzen.
34. In $Ax_1 x_2 \dots$ wo A ein Lückenausdruck ist die Ordnung der Fache in $x_1 \dots x_n$ beliebig.
35. $At(x + y + \dots)u = Atxu + Atyu + \dots$ wo A ein Lückenausdruck.
36. Für die Lückenausdrücke gelten alle Gesetze der Verwebung und der Beziehung.

4. Die Hauptbrüche oder die Hauptquotienten.

37. Der Hauptbruch $Q = \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{a_1, a_2, \dots, a_n}$, wo a_1, a_2, \dots, a_n gegenseitig frei im Hauptgebiete nter Stufe ist die Größe $Qa_a = b_a$.
- Umgekehrter Hauptbruch $\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \dots, a_n}{b_1, b_2, \dots, b_n}$, wo b_1, b_2, \dots, b_n gegenseitig frei.
38. Wenn $Qa_1 = Q_1 a_1, \dots, Qa_n = Q_1 a_n$ und $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ so ist $Qx = Q_1 x$.
39. $\beta \frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} = \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \dots)(\beta b_2 + \gamma c_2 + \dots), \dots}{a_1, a_2, \dots}$.
40. $\frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} = \frac{S^1 \alpha_a b_a, S^2 \alpha_a b_a, \dots}{S^1 \alpha_a a_a, S^2 \alpha_a a_a, \dots}$ wo b_a, a_a Zahlen und $S^b \alpha_a a_a$ gegenseitig frei.
41. $\frac{S^1 \alpha_a a_a, S^2 \alpha_a a_a, \dots}{e_1, e_2, \dots} = S^b \alpha_a {}^b E_a$, wo ${}^b E_a = \frac{{}^1 c_b, {}^2 c_b, \dots}{{}^1 c_a, {}^2 c_a, \dots}$ und ${}^b E_a$ gegenseitig frei.
42. $\frac{b_1, b_2, \dots}{a_1, a_2, \dots} = [\bar{1}a_1]b_1 + [\bar{x}1a_2]b_2 + \dots$ wenn a_1, \dots, a_n einfacher Normverein.

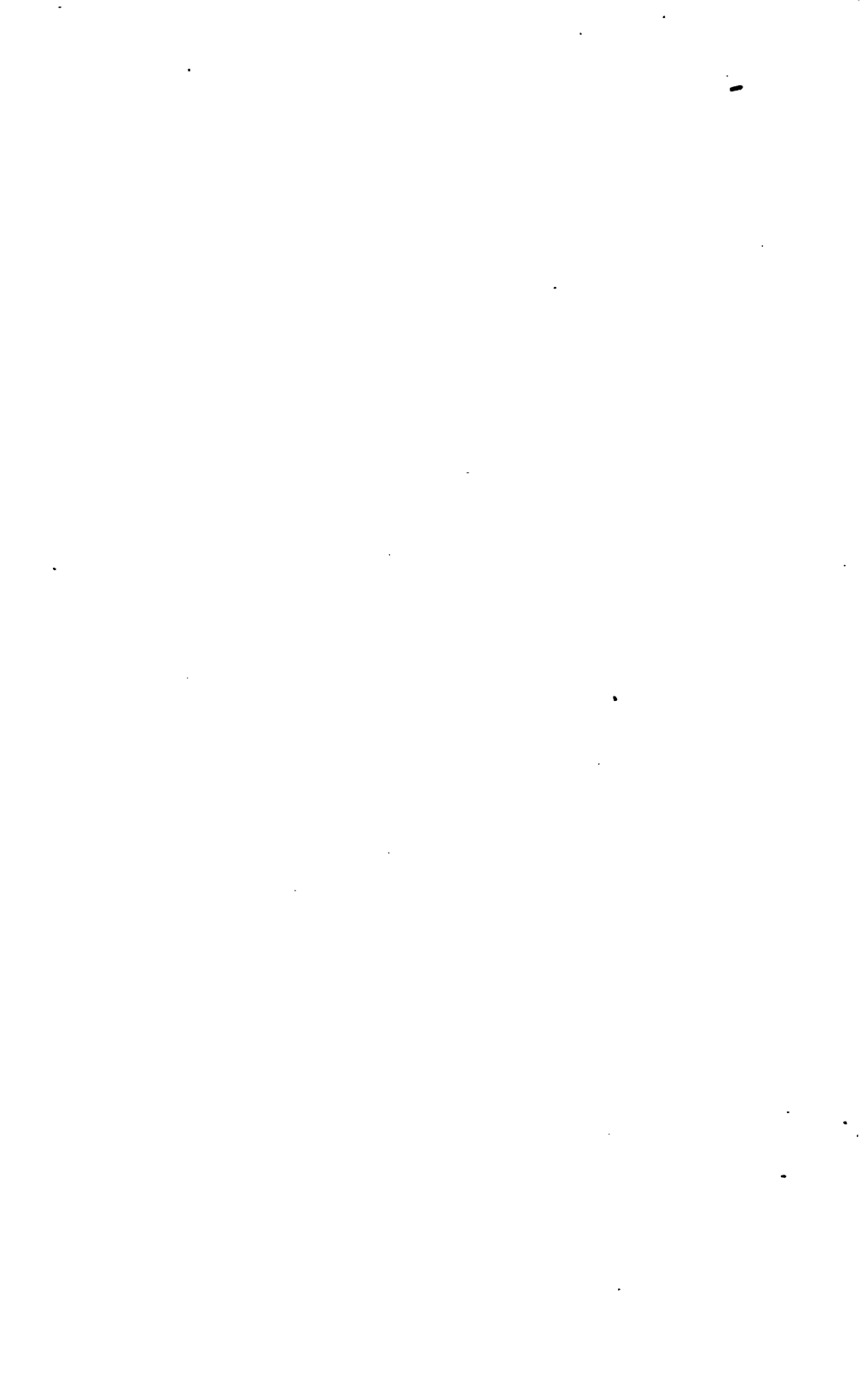
5. Die Höhenwerte und die Hauptzahlen der Hauptbrüche.

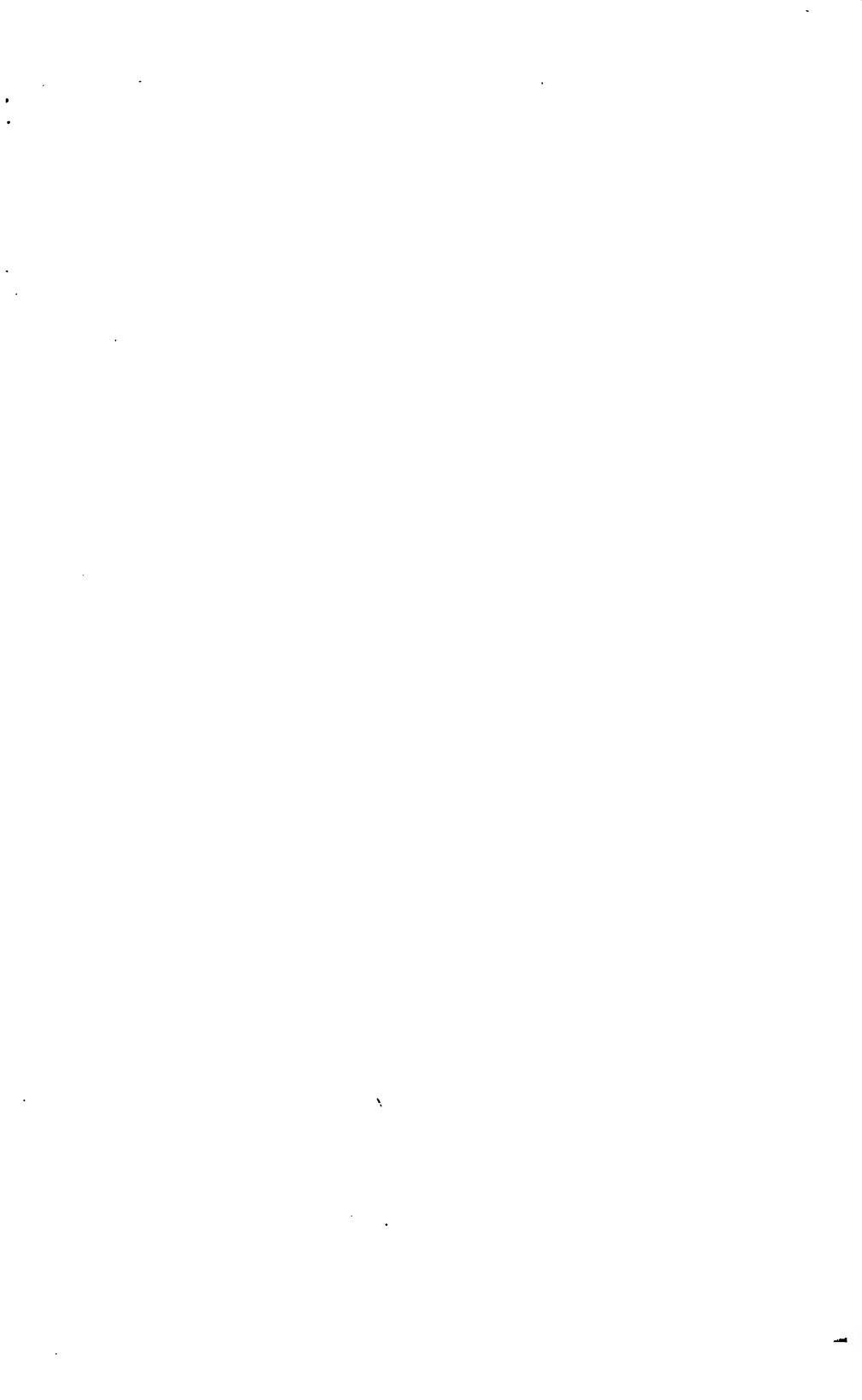
43. Höhenwert $[Q^n] = \bar{p}[b_1 b_2 \dots b_n]$ wo $Q = \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{e_1, e_2, \dots, e_n}$, wo e_1, e_2, \dots, e_n die ursprüngliche Einheit.
44. $[Q^n] = \frac{\bar{p}[b_1 b_2 \dots b_n]}{\bar{p}[a_1 a_2 \dots a_n]}$ wenn $Q = \frac{b_1, b_2, \dots, b_n}{a_1, a_2, \dots, a_n}$.
45. Wenn $Q = \alpha Q_1$ so ist $[Q^n] = \alpha_n [Q_1^n]$.

46. Wenn $a_m + b = b_{a_1} a_1 + b_{a_2} a_2 + \dots + b_{a_m} a_m$ und $c_m + b =$
 $b_{a_1} c_1 + b_{a_2} c_2 + \dots + b_{a_m} c_m - c_m + b = \frac{c_1, c_2, \dots, c_m}{a_1, a_2, \dots, a_m} a_m + b - c_m + b$ ist, so ist
 $Q = \frac{a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots, 0}{c_1, c_2, \dots, c_m, c_m + 1, c_m + 2, \dots, c_m + b}$.
47. Hauptzahl des Hauptbruches Q ist q , wenn $Q = qx$, wo $x \geq 0$ erster Klasse.
48. Der Hauptbruch Q der n Nenner e_1, \dots, e_n hat n Hauptzahlen q_1, \dots, q_n , welche die Wurzeln der Gleichung $\alpha_0 q^n - \alpha_1 q^{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_n = 0$, wo $\alpha_n =$
 $[Qe_1 Qe_2 \dots Qe_n e_{a+1} \dots e_n][Q^n] = q_1 q_2 \dots q_n$.
49. Wenn q, \dots, q_n alle ungleich, so sind die n Hauptgebiete alle erster Stufe und stehen in keiner Zahlenbeziehung.
50. Wenn $q_1, \dots, q_n = \alpha$, so ist $(q - \alpha)^a [a_1 a_2 \dots a_n c_a + 1 \dots c_n]$ wo $c_a + b =$
 $(q - Q)e_a + b$ für jeden Zeiger b .
51. Wenn $q_1, \dots, q_n = \alpha$, so $Qp = ap + q$ wo p eine Vielfachensumme von a_1, \dots, a_n , q eine Vielfachensumme von $a_1, \dots, a_n - 1$ ist.
52. Wenn $q_1, \dots, q_n = \alpha$, $q_a + 1, \dots, q_n + b = \beta, \dots$ wo $\alpha \geq \beta \geq \dots$, so kann man n gegenseitig freie Größen $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \dots$ angeben der Art, dass $Qp = \beta p + q$ wo p eine Vielfachensumme der ersten, m , q eine Vielfachensumme der m -ten dieser Größen ist.
53. Wenn in Q für beliebige Größen erster Klasse a und $b \geq 0 [Qa\bar{a}] \geq 0$ und $[Qa\bar{b}] = [Qb\bar{a}]$, so lassen sich n gegenseitig freie Größen erster Klasse c_1, \dots, c_n finden, für welche $[Qc_a \bar{c}_b] = 0$ wo $a \geq b$. Dann sind alle Hauptzahlen von Q reell, und so viele Plus als $[Qc_a \bar{c}_a]$ Plus und giebt es dann n normige Größen e_1, \dots, e_n für die $Qe_a = q_a e_a$, wo $[e_a \bar{e}_b] = 0$.

6. Die verwandten Vereine.

54. Verwandt sind die Vereine a, b, \dots und a_1, b_1, \dots wenn dem $p = \alpha a + \beta b + \dots$ stets $p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \dots$ entspricht.
55. In zwei verwandten Vereinen n ter Stufe kann man n gegenseitig freien Größen des einen, n beliebige gegenseitig freie des andern entsprechend setzen und ist dann für jede Größe des einen, die entsprechende des andern bestimmt.
56. Von zwei verwandten Vereinen n ter Stufe kann man in einen jede beliebige $n+1$ Größen a_1, \dots, a_n, b , von denen $n a_1, \dots, a_n$ gegenseitig frei sind, setzen und im andern $n+1$ entsprechende Größen $\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_n a_n, \beta b$ setzen, dann ist jede des andern bestimmt, wenn noch q als Vorzahl für alle bestimmt ist.
57. Aus zwei verwandten Vereinen a, b, \dots und a_1, b_1, \dots kann man die linigen Zeuge $P(a, b, \dots)$ und $P(a_1, b_1, \dots)$ entsprechend setzen und sind auch die dadurch erhaltenen Vereine einander verwandt.









JUN 9 1968